

## Chapitre 7 : Bilans énergétiques

### I Transformation d'un système obéissant à l'une des lois de Joule

#### A) Système satisfaisant la 1<sup>ère</sup> loi de Joule

En particulier, le gaz parfait vérifie la 1<sup>ère</sup> loi de Joule.

Soit une transformation quasi-statique d'un état initial 1 vers un état final 2.



Pour une étape infinitésimale de la transformation :

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \underbrace{\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T}_{=0} dV = C_V dT \Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

Pour une transformation quelconque, on a aussi  $\Delta U = U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$  (il suffit de prendre une transformation quasi-statique qui a même état initial et même état final).

#### B) Système satisfaisant la 2<sup>ème</sup> loi de Joule

Le gaz parfait vérifie aussi la 2<sup>ème</sup> loi de Joule.

Soit une transformation quasi-statique d'un état initial 1 vers un état final 2.



Pour une étape infinitésimale de la transformation :

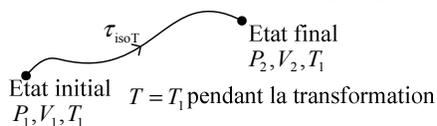
$$dH = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P dT + \underbrace{\left. \frac{\partial H}{\partial V} \right|_T}_{=0} dV = C_P dT \Rightarrow \Delta H = H_2 - H_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT$$

Pour une transformation quelconque, on a aussi  $\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT (= \Delta H_{\tau_{QS}})$

### II Transformation réversible d'un gaz parfait

#### A) Transformation isotherme réversible

On considère  $n$  moles d'un gaz parfait



Pour que la transformation soit isotherme et réversible, elle doit être très lente.

Pour une transformation infinitésimale :  $\delta W = -PdV$  (réversibilité). Puisque la transformation est quasi-statique, on a, pendant toute la transformation,  $P = \frac{nRT}{V}$ .

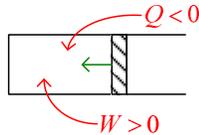
$$\text{Donc } \delta W = -nRT \frac{dV}{V} \Rightarrow W = \int_1^2 -nRT \frac{dV}{V} = -nRT \times \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$W = -nRT \ln a$  avec  $a = \frac{V_1}{V_2} (= \frac{P_2}{P_1})$ , rapport volumétrique de la transformation

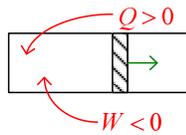
$$\Delta U = U_2 - U_1 = U(T_1) - U(T_2) = 0$$

D'après le premier principe,  $\Delta U = Q + W$ . Donc  $Q = -W = nRT_1 \ln a$ .

Pour une compression,  $a = \frac{V_2}{V_1} < 1$ .

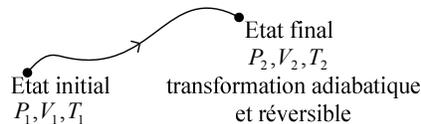


Pour une détente,  $a = \frac{V_2}{V_1} > 1$ .



## B) Transformation adiabatique réversible

On considère  $n$  moles d'un gaz parfait



Pour que la transformation soit adiabatique et réversible, il faut qu'elle soit assez lente (réversibilité), mais suffisamment rapide pour être adiabatique.

### 1) Loi de Laplace

Pour une étape infinitésimale de la transformation,  $dU = nC_{m,V}dT$  (1<sup>ère</sup> loi de Joule et quasi-staticité). On a :

$$C_{m,V} = \frac{R}{\gamma-1}, \text{ et, d'après le premier principe, } dU = \delta W + \underbrace{\delta Q}_{=0} = \underbrace{-PdV}_{\text{réversible donc } \delta W = -PdV}$$

$$\text{Donc } n \frac{R}{\gamma-1} dT = -PdV.$$

D'après l'équation d'état du gaz parfait :

$$PV = nRT \Rightarrow d(PV) = d(nRT) \Rightarrow VdP + PdV = nRdT$$

$$\text{Donc } \frac{PdV + VdP}{\gamma-1} = -PdV \Leftrightarrow PdV + VdP = -(\gamma-1)PdV \Leftrightarrow \gamma PdV + VdP = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \quad (\text{Formulation différentielle de la loi de Laplace})$$

Si  $\gamma$  est constante sur l'intervalle  $[T_1; T_2]$ , on peut intégrer la loi de Laplace :

$$\gamma \ln V + \ln P = cte$$

$$\Leftrightarrow \ln(V^\gamma P) = cte$$

$$\Leftrightarrow PV^\gamma = cte = P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad (\text{loi de Laplace})$$

ou  $TV^{\gamma-1} = cte$  ou  $T^\gamma P^{1-\gamma} = cte$  (à partir de l'équation d'état du gaz parfait)

## 2) travail reçu

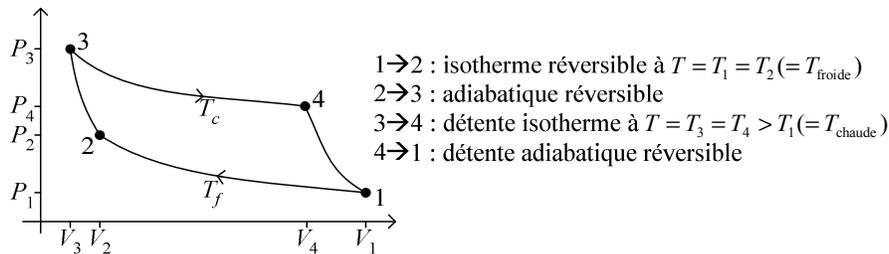
$$\Delta U = Q + W = W. \text{ Donc } W = \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} nC_{m,V} dT$$

$$\text{si } \gamma \text{ est constante, } W = \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} n \frac{R}{\gamma-1} dT = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$$

Pour une compression,  $\Delta U = W > 0$

Pour une détente,  $\Delta U = W < 0$

## C) Cycle de Carnot du gaz parfait



On pose  $a = \frac{V_1}{V_2} > 1$

$$\begin{cases} P_1 V_1 = P_2 V_2 (= nRT_f) \\ P_3 V_3 = P_4 V_4 (= nRT_c) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma \\ P_4 V_4^\gamma = P_1 V_1^\gamma \end{cases}$$

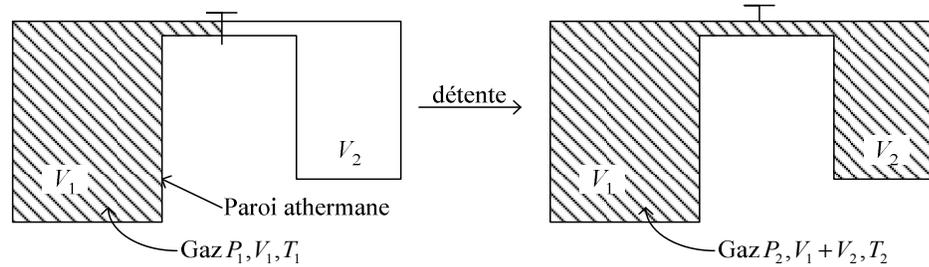
$$\Rightarrow \frac{P_2 V_2^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} = \frac{P_3 V_3^\gamma}{P_4 V_4^\gamma} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \frac{V_4}{V_3} \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma \Leftrightarrow a = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$$

Transformation	$W$	$Q$	$\Delta U$
$(T_f) \tau_{1 \rightarrow 2}$	$nRT_f \ln a > 0$	$-nRT_f \ln a < 0$	0
$\tau_{2 \rightarrow 3}$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$	0	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$
$(T_c) \tau_{3 \rightarrow 4}$	$-nRT_c \ln a < 0$	$nRT_c \ln a > 0$	0
$\tau_{4 \rightarrow 1}$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_c)$	0	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_c)$
(moteur) $\tau_{\text{cycle}}$	$-nR \ln a \times (T_c - T_f) < 0$	$nR \ln a \times (T_c - T_f) > 0$	0

$$\text{On définit le rendement } \eta = \frac{\overbrace{-W}^{\text{fourni par le système}}}{\underbrace{Q_{3 \rightarrow 4}}_{\text{payé par l'utilisateur}}} = \frac{nR \ln a \times (T_c - T_f)}{nRT_c \ln a} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

### III Détente de Joule Gay-Lussac

#### A) Présentation



#### B) Bilan énergétique

Système  $V_1 + V_2$

Détente adiabatique, et  $W = W_{\text{ext}} = 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \\ &= U(P_2, V_1 + V_2, T_2) - U(P_1, \underbrace{V_1}_{\substack{\text{car } U=0 \\ \text{à droite au} \\ \text{début}}}, T_1) \end{aligned}$$

On dit que la détente est isoU (à  $U$  constante)

#### C) Application aux gaz parfaits et réels

Gaz parfait :  $U$  ne dépend que de  $T$  (1<sup>ère</sup> loi de Joule).  $\Delta U = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$  ( $U(T)$  est injective car strictement croissante : plus  $T$  augmente, plus l'énergie interne augmente). La transformation est donc monotherme.

Gaz réel :  $U$  dépend de  $V, T$  (il ne satisfait plus la première loi de Joule)

Pour un gaz de Van der Waals  $U_{\text{vdw}}(V, T) = U_{\text{gp}}(T) - \frac{n^2 a}{V}$ . Pour une mole de gaz

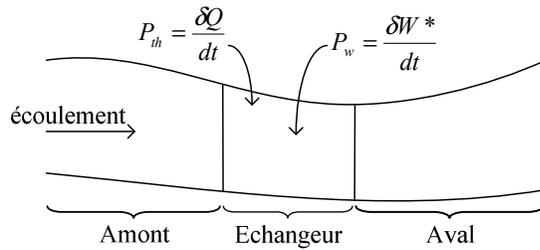
$$\text{réel diatomique : } U_{\text{vdw}} = \frac{5}{2} nRT - \frac{n^2 a}{V} = \frac{5}{2} RT - \frac{a}{V}$$

$$\text{Détente de } V = 1\text{L à } V = 2\text{L : } \Delta U = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) - \frac{a}{V_2} + \frac{a}{V_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) = a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right). \text{ Pour } a = 0,138 \text{ Pa.m}^6.\text{mol}^{-1}, T_2 - T_1 = -3,3\text{K}.$$

## IV Détente de Joule Thomson (ou Joule Kelvin)

### A) Formulation du 1<sup>er</sup> principe pour un écoulement stationnaire



On suppose  $P_w$  et  $P_{th}$  indépendants du temps

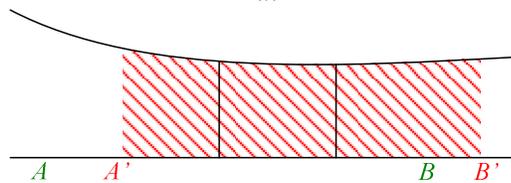
En amont : pression  $P_1$ , température  $T_1$

En aval : pression  $P_2$ , température  $T_2$

(Uniformes et stationnaires)

$d$  : débit massique =  $\frac{dm}{dt}$  : masse qui traverse une surface donnée pendant  $dt$

$D_m$  : débit molaire =  $\frac{dn}{dt}$



Système étudié entre  $A$  et  $B$  à  $t$  qui se déplace entre  $A'$  et  $B'$  à  $t + \Delta t$

1<sup>er</sup> principe appliqué au système :

$$\Delta U_{\Sigma} = W + Q$$

$$U_{\Sigma}(t + \Delta t) - U_{\Sigma}(t) = (U_{A'B}(t + \Delta t) + U_{BB'}(t + \Delta t)) - (U_{AA'}(t) + U_{A'B}(t))$$

Comme l'écoulement est stationnaire,  $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$  Donc  $\Delta U_{\Sigma} = U_{BB'} - U_{AA'}$

$$Q = P_{th} \Delta t$$

$$W = W_{P_{ext} \text{ amont}} + W_{P_{ext} \text{ aval}} + P_w \Delta t \quad (\delta W_{P_{ext}} = -PdV \text{ et } P \text{ est constante})$$

$$= -P_1 \times (-V_{AA'}) - P_2 \times (V_{BB'}) + P_w \Delta t$$

$$\text{Donc } U_{BB'} - U_{AA'} = P_1 V_{AA'} - P_2 V_{BB'} + P_w \Delta t + P_{th} \Delta t$$

$$\Leftrightarrow U_{BB'} + P_2 V_{BB'} - (U_{AA'} + P_1 V_{AA'}) = (P_w + P_{th}) \Delta t$$

$$\Leftrightarrow H_{BB'} - H_{AA'} = (P_w + P_{th}) \Delta t$$

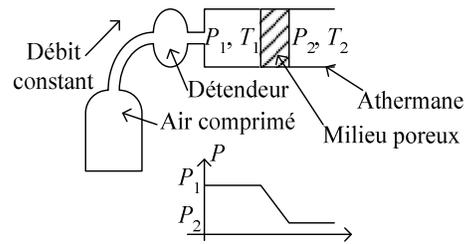
$$\text{Masse de } AA' = \int_t^{t+\Delta t} d \times dt = d \times \Delta t \quad (\text{car } \frac{\partial d}{\partial t} = 0)$$

De même, masse de  $BB' = d \times \Delta t$

On note  $h$  l'enthalpie massique ( $h$  est constante au cours du temps, et même partout en aval ou en amont car les paramètres d'état sont uniformes dans ces deux zones).  $d \times h_{\text{aval}} \times \Delta t - d \times h_{\text{amont}} \times \Delta t = (P_{th} + P_w) \Delta t$ . Donc  $d \times h_{\text{aval}} - d \times h_{\text{amont}} = P_{th} + P_w$  ou  $D_m \Delta H_m = P_{th} + P_w$ , où  $H_m$  est l'enthalpie molaire.

## B) Détente de Joule Kelvin

### 1) Présentation



On suppose l'écoulement stationnaire

### 2) Bilan énergétique

1<sup>er</sup> principe appliqué à l'écoulement :

$$d \times \Delta h = \underbrace{P_{th}}_{=0 \text{ car athermane}} + \underbrace{P_w}_{=0 \text{ car pas de forces extérieures}} = 0$$

Donc  $\Delta h = 0$

On dit que la détente de Joule Kelvin est isoH ou isenthalpique

### 3) Applications aux gaz

Pour un gaz parfait :  $H$  dépend uniquement de  $T$  (2<sup>nde</sup> loi de Joule)

Donc  $\Delta H = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$  (idem que pour  $U$ ), la détente est donc monotherme

Pour un gaz réel :  $H$  dépend de  $T$  et  $P$ . On a  $\Delta H = 0$  mais  $\Delta T \neq 0$

En général,  $\Delta T < 0$ .