Chapitre 12 : Mouvement de particules chargées dans E et B

I Force de Lorentz

A) Expression

On considère une particule chargée q en M dans un champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$.

A tout instant t et en tout point P de l'espace, on observe un champ électrique $\vec{E}(P,t)$ et magnétique $\vec{B}(P,t)$.

Soit (R) un référentiel.

Cette particule est soumise à une force électromagnétique, appelée force de Lorentz : $\vec{F}=q(\vec{E}(M,t)+\vec{v}_{M/(R)}\wedge\vec{B}(M,t))$.

$$\boxed{\vec{F}=\underbrace{q\vec{E}(M,t)}_{\vec{f}_{\text{électrique}}}+\underbrace{q\vec{v}_{M/(R)}\wedge\vec{B}(M,t)}_{\vec{f}_{\text{magnétique}}}}$$

B) Travail de la force de Lorentz

Pour un déplacement infinitésimal $d\vec{M}$ de la charge q :

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{Lorentz}}&=\vec{F}_{\text{Lorentz}}\cdot d\vec{M}\\&=q\vec{E}(M,t)\cdot d\vec{M}+q(\vec{v}_{M/(R)}\wedge\vec{B}(M,t))\cdot\underbrace{d\vec{M}}_{\vec{v}_{M/(R)}dt}\\&=q\vec{E}(M,t)\cdot d\vec{M}\end{aligned}$$

Ainsi, la force électromagnétique ne travaille pas.

On suppose que $\vec{E}$ est un champ électrostatique. Alors $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

Donc $\delta W_{\text{Lorentz}}=-q\overrightarrow{\text{grad}}_M V\cdot d\vec{M}=-q.dV=-d(qV)$

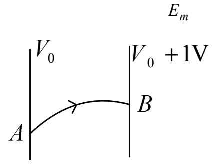
Donc $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$ est conservative, et dérive d'une énergie potentielle $E_p=qV$.

Exemple :

Si (R) est galiléen, q soumise uniquement à $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$, on a, d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$dE_C=\delta W_{\text{Lorentz}}=-d(qV)$$

Soit $d(\underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2+qV(M)}_{E_m})=0$



Charge $q=-e$ (électron) allant de A à B.

donc $E_m(A) = E_m(B)$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -eV(B) + eV(A) = e \times 1\text{V}(=1\text{eV})$$

$E_C(B) - E_C(A) = 1\text{eV}$, énergie acquise par un électron soumis à une différence de potentiel de 1V.

II Mouvement dans $\vec{E}$ uniforme et stationnaire

A) Equation horaire du mouvement

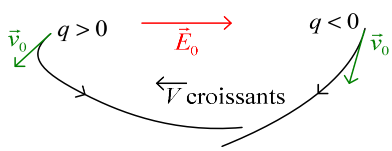
On se place dans (R) galiléen, on considère une charge ponctuelle q en M.
On suppose $\vec{E}$ uniforme et stationnaire (qui ne dépend ni de P ni de t) = $\vec{E}_0$.
Et $\vec{B} = \vec{0}$
Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans (R) galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}_{M/(R)}}{dt} = q\vec{E}_0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}_{M/(R)}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E}_0$$ uniforme et stationnaire.

Analogie avec le mouvement dans $\vec{g}$ uniforme :

$$\vec{v}_{M/(R)} = \frac{q\vec{E}_0}{m}t + \vec{v}_0 \text{, et } \overrightarrow{OM} = \frac{q\vec{E}_0}{2m}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}_0 .$$

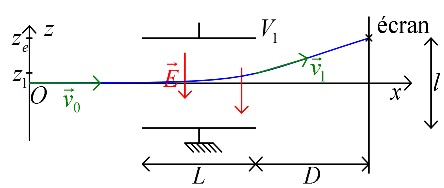
La trajectoire est donc parabolique si $\vec{v}_0$ et $\vec{E}_0$ sont non colinéaires :



Si $\vec{E}_0$ et $\vec{v}_0$ sont colinéaires, on a un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

B) Application – oscilloscope

Condensateur : on suppose ici V_1 indépendant du temps.



On envoie un faisceau homocinétique (avec la même vitesse) d'électrons sur l'axe (Ox avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$.
Champ dans le condensateur :
$V = az + b$ (car le champ est uniforme).

Donc $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -a\vec{k} = -\frac{V_1 - 0}{l}\vec{k} = -\frac{V_1}{l}\vec{k}$

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron dans (R_{lab}) galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

On note $\vec{v}_1$ la vitesse de sortie, z_1 la côte de l'électron à la sortie du condensateur.

Durée de traversée : $\Delta t = \dfrac{L}{v_0}$

($\vec{E}$ n'a pas de composante selon $\vec{i}$, donc $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{i} = 0$, soit $\vec{v}\cdot\vec{i} = v_0 = \text{cte}$)

$$\begin{aligned} z_1 = \overrightarrow{OM_1}\cdot\vec{k} &= \left(\frac{1}{2}\frac{-e\vec{E}}{m}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}\right)\cdot\vec{k} \\ &= \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{eV_1}{m.l} \\ &= \frac{1}{2}\frac{eV_1L^2}{v_0^2 m.l} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{-e\vec{E}}{m}\Delta t + \vec{v}_0 = \frac{-eL\vec{E}}{mv_0} + \vec{v}_0$$

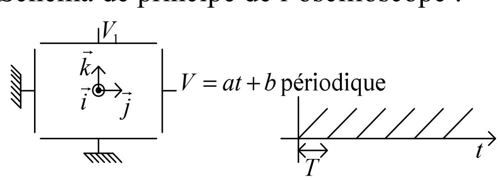
On note $\Delta t'$ le temps nécessaire ensuite pour arriver sur l'écran :

$\Delta t' = \dfrac{D}{v_0}$ (on a toujours v_0 comme composante de la vitesse selon $\vec{i}$)

Ainsi, $z_e - z_1 = v_{1_z}\Delta t' = \dfrac{eV_1L}{mv_0.l}\dfrac{D}{v_0}$, d'où $z_e = \dfrac{eV_1L}{mv_0.l}\dfrac{D}{v_0} + \dfrac{1}{2}\dfrac{eV_1L^2}{mv_0^2.l} = \dfrac{eV_1L}{mv_0^2.l}(D + \dfrac{L}{2})$.

Donc z_e est proportionnel à V_1.

Schéma de principe de l'oscilloscope :

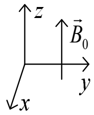


III Mouvement dans $\vec{B}$ uniforme – permanent

A) Pulsation synchrotron

On travaille dans un référentiel (R) galiléen.

On considère une charge q en M dans le champ $\vec{B} = \vec{B}_0 = B_0\vec{k}$, et $\vec{E} = \vec{0}$



Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans (R) galiléen :

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$, soit $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{q\vec{B}_0}{m} \wedge \vec{v}$.

On note $\vec{\Omega} = \dfrac{-q\vec{B}_0}{m} = -\Omega\vec{k}$ ($\Omega = \dfrac{qB_0}{m}$)

$\vec{\Omega}$ s'appelle la pulsation synchrotron.

On a :

$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\text{cte}}$; $\vec{v}_0 = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{\text{cte}}$

Donc $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{M_0M} + \vec{v}_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{vmatrix} + \vec{v}_0$.

On a alors le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \Omega(y - y_0) + v_{0_x} = \Omega(y - Y_0) \ (1) \\ \dot{y} = \Omega(x - x_0) + v_{0_y} = -\Omega(x - X_0) \ (2) \\ \dot{z} = v_{o_z} = \text{cte} \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \ddot{x} = \Omega\dot{y} = \Omega(-\Omega(x - X_0)) = -\Omega^2(x - X_0)$

Donc $\dfrac{d^2(x - X_0)}{dt^2} + \Omega^2(x - X_0) = 0$

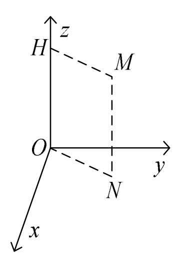
Donc $x - X_0 = R\cos(\Omega.t + \varphi)$, avec $R > 0$

On reporte dans (1) : $-R\Omega\sin(\Omega.t + \varphi) = \Omega(y - Y_0)$

Donc $y = Y_0 - R\sin(\Omega.t + \varphi)$.

Ainsi,

$$\begin{cases} x = X_0 + R\cos(-\Omega.t - \varphi) \\ y = Y_0 - R\sin(\Omega.t + \varphi) \\ z = v_{o_z}t + z_0 \end{cases}$$



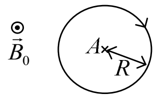
On note H la projection orthogonale de M sur $(Oz$. Ainsi, $z_H = v_{0_z}t + z_0$.

On note aussi N le projeté orthogonal de M sur xOy. Ainsi :

$$\begin{cases} x_N = X_0 + R\cos(-\Omega.t - \varphi) \\ y_N = Y_0 - R\sin(\Omega.t + \varphi) \end{cases}$$

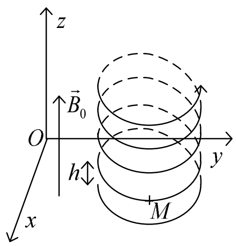
Donc H décrit un mouvement rectiligne uniforme sur l'axe $(Oz$, et M un mouvement circulaire uniforme de centre $A\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{vmatrix}$, de rayon R et de pulsation $-\Omega$.

Avec $q > 0, B_0 > 0$:



$$T = \frac{2\pi}{|\Omega|} = \frac{2\pi}{|qB_0|} m$$

Ainsi, si $v_0 \neq 0$, M décrit un mouvement hélicoïdal d'axe parallèle à $\vec{k}$:



Pas h de l'hélice : $h = v_{0_z} T = v_{0_z} \dfrac{2\pi m}{|qB_0|}$

Si $v_{0_z} = 0$, on a un mouvement circulaire uniforme

$$v_{xOy}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\Omega^2 \sin^2(-\Omega.t - \varphi) + R^2\Omega^2 \cos^2(-\Omega.t - \varphi)$$

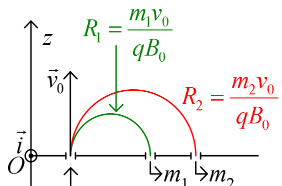
$$= R^2\Omega^2 = \text{cte}$$

Donc $v_{xOy} = R\Omega = \dfrac{|qB_0|R}{m}$

Soit $\boxed{m.v_{xOy} = |qB_0|R}$

B) Applications

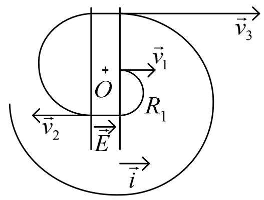
1) Spectrographe/spectromètre de masse



Ions de même charge q et de masses m_1 et m_2 différentes (comme des isotopes par exemple)

On a donc séparation des isotopes, qui sont pourtant de même charge.

2) Cyclotron



On suppose que $\vec{E} = E_0 \cos(\omega.t)\vec{i}$.

En dehors du condensateur, de faible épaisseur, on a un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{k}$, uniforme et permanent.

On émet des particules de charge q à $t = 0$, à l'intérieur du condensateur (en O), avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{0}$.

On prend par exemple $q > 0$:

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB_0}$$

Si on choisit $\omega = \Omega$, le champ $\vec{E}$ change de sens à chaque passage.

Ainsi, $R_2 = \dfrac{mv_2}{qB_0}$ (avec $v_2 > v_1$)

Lorsque la particule sort du système (de rayon R_Σ), elle aura une vitesse finale v telle que :

$$\underbrace{mv}_{P} = qB_0 R_\Sigma$$

On peut vérifier en faisant les mêmes calculs qu'en relativité restreinte, on a la même relation en considérant que $P = \gamma.mv = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}mv$

(La relation fondamentale de la dynamique est toujours valable, à condition d'écrire $\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$)

Application numérique :

$B_0 = 1\text{T}$; $R_\Sigma = 10\text{m}$; $q = 1{,}6.10^{-19}\,\text{C}$; $m = 1{,}6.10^{-27}\,\text{kg}$

Ainsi, $\gamma.v = 10^9\,\text{m.s}^{-1}$, d'où $v = 0{,}95 \times c$!!