



Chapitre 11 : Système de deux particules

I Notation, définitions

A) Système de deux particules dans (R)

Soit $(R) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient deux particules M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2 .

On note :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \overrightarrow{OM_1}, \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} \\ \vec{v}_1 &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \right|_{(R)}, \quad \vec{v}_2 = \left. \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} \right|_{(R)} \\ \vec{a}_1 &= \left. \frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2} \right|_{(R)}, \quad \vec{a}_2 = \left. \frac{d^2\overrightarrow{OM_2}}{dt^2} \right|_{(R)}\end{aligned}$$

1) Centre d'inertie du système de deux particules

G : barycentre – ou centre d'inertie – de masse de $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est défini par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{OM_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{OM_2}$$

2) Quantité de mouvement du système

Définition :

$$\begin{aligned}\vec{P}_{/(R)} &= \vec{p}_{1/(R)} + \vec{p}_{2/(R)} \\ &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \\ &= m_1 \left. \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \right|_{(R)} + m_2 \left. \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} \right|_{(R)} \\ &= \frac{d}{dt} \left(m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} \right)_{(R)}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \vec{P}_{/(R)} = (m_1 + m_2) \left. \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right|_{(R)} = (m_1 + m_2) \vec{v}_G$$

Donc \vec{P} coïncide avec la quantité de mouvement de G , barycentre du système, affecté de la masse totale $m = m_1 + m_2$

3) Moment cinétique du système

Soit A un point quelconque de l'espace.

Définition :

Moment cinétique en A du système :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A/(R)} &= \vec{\sigma}_{A/(R)}^{(1)} + \vec{\sigma}_{A/(R)}^{(2)} \\ &= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2\end{aligned}$$

Soit alors A' un autre point de l'espace. On a :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A'/(R)} &= \overrightarrow{A'M_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{A'M_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 \\ &= \overrightarrow{A'A} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{A'A} \wedge m_2 \vec{v}_2 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{\sigma}_{A'/(R)} = \vec{\sigma}_{A/(R)} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{P}$$

4) Energie cinétique du système

$$\text{Définition : } E_{C/(R)} = E_{C/(R)}^{(1)} + E_{C/(R)}^{(2)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

B) Référentiel barycentrique

1) Définition

Le référentiel barycentrique (B^*) est défini par :

$$(B^*) = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Ainsi, (B^*) est en translation par rapport à (R).

2) Grandeurs cinématiques dans (B^*)

$$\begin{aligned}\vec{r}_1^* &= \overrightarrow{GM_1}, \quad \vec{r}_2^* = \overrightarrow{GM_2} \\ \vec{v}_1^* &= \left. \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} \right|_{(B^*)}, \quad \vec{v}_2^* = \left. \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} \right|_{(B^*)}\end{aligned}$$

Remarque : pour une translation, on a pour tout vecteur \vec{A} : $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{(R)} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{(B^*)}$.

Ainsi :

$$\vec{v}_1^* = \left. \frac{d(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OG})}{dt} \right|_{(R)} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \right|_{(R)} - \left. \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right|_{(R)} = \vec{v}_1 - \vec{v}_G$$

(et de même pour \vec{v}_2^*)

3) Quantité de mouvement du système dans (B^*)

$$\begin{aligned}
 \vec{P}^* &= m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* \\
 &= m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_G) + m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_G) \\
 &= \vec{P} - (m_1 + m_2) \vec{v}_G \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

4) Moment cinétique du système dans (B^*)

Soit A un point de l'espace. On a :

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_A^* &= \vec{\sigma}_A^{(1)*} + \vec{\sigma}_A^{(2)*} \\
 &= \overrightarrow{AM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{AM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2^*
 \end{aligned}$$

Pour un autre point A' : $\vec{\sigma}_{A'}^* = \vec{\sigma}_A^* + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{P}^* = \vec{\sigma}_A^*$

Ainsi, le moment cinétique du système est indépendant du point d'application. Il est noté $\vec{\sigma}^*$, moment cinétique du système dans (B^*).

On a :

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{G/(R)} &= \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 \\
 &= \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_G + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2^* + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_G \\
 &= \vec{\sigma}^* + \underbrace{(m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2)}_{=\vec{0} \text{ par définition de } G} \wedge \vec{v}_G
 \end{aligned}$$

Donc $\vec{\sigma}_{G/(R)} = \vec{\sigma}^*$

1^{ère} formule de Koenig :

Soit A un point de l'espace. On a :

$$\vec{\sigma}_{A/(R)} = \vec{\sigma}_{G/(R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{AG} \wedge (m_1 + m_2) \vec{v}_G$$

5) Energie cinétique du système dans (B^*)

On a :

$$E_C^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 E_C &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_1^* + \vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_2^* + \vec{v}_G)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_1^2 + \vec{v}_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot \vec{v}_1) + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_2^2 + \vec{v}_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot \vec{v}_2)
 \end{aligned}$$

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \underbrace{(m_1\vec{v}_1^* + m_2\vec{v}_2^*)}_{=\vec{P}^*=0} \cdot \vec{v}_G$$

D'où la deuxième formule de Koenig :

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2$$

II Application des théorèmes de la dynamique au système

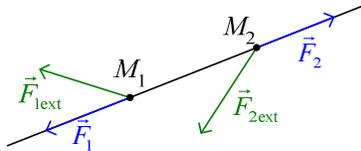
A) Présentation du problème

On suppose (R) galiléen.

Soit M_1 soumis à $\vec{F}_{1\text{ext}}$ (forces extérieures au système) et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ notée \vec{F}_1 exercée par M_2 sur M_1 .

Soit M_2 soumis à $\vec{F}_{2\text{ext}}$ (forces extérieures au système) et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ notée \vec{F}_2 .

On suppose de plus ici que \vec{F}_1 et \vec{F}_2 obéissent à la version forte de la loi de l'action et de la réaction, c'est-à-dire : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (version faible, toujours vraie) et $\vec{F}_1 \parallel \overline{M_1M_2}$.



On suppose enfin que $\|\vec{F}_1\|$ ($= \|\vec{F}_2\|$) ne dépend que de r avec $r = M_1M_2$.

Ainsi, en notant $\vec{u}_r = \frac{\overline{M_1M_2}}{M_1M_2}$, on pose $\vec{F}_2 = F(r)\vec{u}_r$ (et $\vec{F}_1 = -F(r)\vec{u}_r$)

B) Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M_1 et M_2 .

Dans (R) galiléen :

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\text{ext}} \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{2\text{ext}}$$

$$\text{D'où, en sommant : } \underbrace{m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \Big|_{(R)} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \Big|_{(R)}}_{\frac{d\vec{P}}{dt} \Big|_{(R)}} = \underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{=0} + \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}$$

$$\text{Donc } (m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}_G}{dt} \Big|_{(R)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}$$

(Théorème de la résultant cinétique).

Les forces intérieures n'interviennent pas. C'est comme si G de masse $m = m_1 + m_2$ était soumis à $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}$.

C) Théorème du moment cinétique

O est fixe dans (R) galiléen.

Le théorème du moment cinétique appliqué en O à M_1 dans (R) donne :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_O^{(1)}}{dt} \right|_{(R)} = \overrightarrow{OM_1} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\text{ext}})$$

$$\text{et à } M_2 : \left. \frac{d\vec{\sigma}_O^{(2)}}{dt} \right|_{(R)} = \overrightarrow{OM_2} \wedge (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\text{ext}}).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{(R)} &= \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{1\text{ext}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{2\text{ext}} + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_2 \\ &= \underbrace{(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})}_{\overrightarrow{M_1M_2}} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{1\text{ext}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{2\text{ext}} \end{aligned}$$

Or, $\vec{F}_2 // \overrightarrow{M_1M_2}$

$$\text{Donc } \left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{(R)} = \underbrace{\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{1\text{ext}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{2\text{ext}}}_{\text{moment en } O \text{ des forces extérieures}}$$

D) Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à M_1 dans (R) donne :

$$\left. \frac{dE_{C_1}}{dt} \right|_{(R)} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\text{ext}}) \cdot \vec{v}_1$$

$$\text{et à } M_2 : \left. \frac{dE_{C_2}}{dt} \right|_{(R)} = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\text{ext}}) \cdot \vec{v}_2$$

$$\text{Donc } \left. \frac{dE_C}{dt} \right|_{(R)} = \underbrace{\vec{F}_{1\text{ext}} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{2\text{ext}} \cdot \vec{v}_2}_{P_{\text{ext}}} + \underbrace{\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2}_{P_{\text{int}}}$$

$$P_{\text{int}} = -\vec{F}_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{F}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_2 \cdot \frac{d(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{F}_2 \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} \Big|_{(R)}$$

Pour un système rigide : $M_1M_2 = \text{cte}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \text{cte} ; 2\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = 0$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{M_1M_2} \perp \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}.$$

Les forces intérieures ne travaillent pas dans un système rigide.

E) Energie potentielle d'interaction



$$\vec{u}_r(M_2) = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2} \text{ et } \vec{u}_r(M_1) = \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{M_2 M_1} = -\vec{u}_r(M_2)$$

$$\vec{F}_2 = F(r)\vec{u}_r(M_2)$$

On définit E_p^* (à une constante additive près) par $F(r) = \frac{-dE_p^*}{dr}$ (on suppose F intégrable)

$$\text{Ainsi, } \vec{F}_2 = \frac{-dE_p^*}{dt} \vec{u}_r(M_2) \text{ ou } \vec{F}_1 = \frac{-dE_p^*}{dt} \vec{u}_r(M_1)$$

E_p^* est l'énergie potentielle d'interaction entre les deux particules.

$$\text{Par exemple, pour la force gravitationnelle : } E_p^* = -\frac{Gm_1 m_2}{M_1 M_2}$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$dE_C = P_{\text{ext}} dt + P_{\text{int}} dt$$

$$P_{\text{int}} = \vec{F}_2 \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right|_{(R)}$$

$$\text{Donc } \delta W_{\text{int}} = P_{\text{int}} dt = F(r)\vec{u}_r(M_2) \cdot d(r\vec{u}_r(M_2))$$

$$\text{Or, } \frac{d(\vec{u}_r^2)}{dt} = 2\vec{u}_r \cdot \frac{d(\vec{u}_r)}{dt} = 0$$

$$\text{Donc } \delta W_{\text{int}} = F(r)dr = -dE_p^*$$

$$\text{Donc } dE_C = P_{\text{ext}} dt - dE_p^*, \text{ soit } d(E_C + E_p^*) = \delta W_{\text{ext}}$$

Ou alors, d'après la deuxième formule de Koenig :

$$d(\underbrace{E_C^* + E_p^*}_U) + d(\underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2}_{E_{\text{macro}}}) = \delta W_{\text{ext}}$$

(On retrouve le premier principe de la thermodynamique, en ayant regroupé δW et δQ sous δW_{ext})

III Système isolé de deux particules

On reprend les conditions du paragraphe précédent, en considérant que $\vec{F}_{1\text{ext}} = \vec{F}_{2\text{ext}} = \vec{0}$.
(Ainsi, le système est isolé)

A) Théorème de la résultante cinétique

Théorème de la résultante cinétique appliqué au système :

$$\left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right|_{(R)} = m \left. \frac{d\vec{v}_G}{dt} \right|_{(R)} = \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}} = \vec{0}$$

Donc $\vec{v}_G = \text{cte}$. Donc G décrit un mouvement rectiligne uniforme :

$$\vec{v}_G(t) = \vec{v}_G(0)$$

$$\vec{OG}(t) = \vec{OG}(0) + \vec{v}_G(0) \times t$$

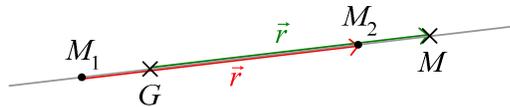
Donc (B^*) est aussi galiléen (lorsque le système est isolé)

B) Réduction du problème à deux corps – mobile fictif

On définit le vecteur position relative de M_2 par rapport à M_1 :

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*$$

On définit un point M , mobile fictif ou réduit par : $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r} = \overrightarrow{GM}$



$$\text{On a : } m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow m_1 (\vec{r}_2^* - \vec{r}) + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\text{Et } \vec{r}_1^* = \vec{r}_2^* - \vec{r} = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

- Quantité de mouvement de M_2 dans (B^*) :

$$\vec{P}^{*(2)} = m_2 \vec{v}_2^* = m_2 \frac{d\vec{r}_2^*}{dt} = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} \right|_{(B^*)}}_{\vec{v}}$$

On pose $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$: masse réduite/ masse du mobile fictif

Ainsi, $\vec{P}^{*(2)}$ s'apparente à la quantité de mouvement de $M(\mu)$ dans (B^*) .

- Moment cinétique barycentrique :

$$\vec{\sigma}^* = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^*$$

$$\text{Or, } m_1 \vec{v}_1^* = -m_2 \vec{v}_2^* \text{ car } \vec{P}^{*(1)} + \vec{P}^{*(2)} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \vec{\sigma}^* = (-\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \overrightarrow{GM} \wedge \mu \vec{v} = \vec{\sigma}_{M/(B^*)}$$

$$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_{M/(B^*)} \text{ (moment cinétique du mobile fictif dans } (B^*) \text{)}$$

$$\bullet E_C^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2m_1} (m_1^2 v_1^{*2}) + \frac{1}{2m_2} (m_2^2 v_2^{*2})$$

$$= \frac{1}{2m_1} \mu^2 v^2 + \frac{1}{2m_2} \mu^2 v^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_2 + m_1}{m_2 m_1}}_{1/\mu} \mu^2 v^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 = E_C(M) \text{ dans } (B^*)$$

C) Mouvement du mobile fictif

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M_2 dans (B^*) galiléen :

$$\left. \frac{d\vec{P}_2^*}{dt} \right|_{(B^*)} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_2$$



$$\vec{P}_2^* = \mu \vec{v} \text{ et } \vec{F}_2 = F(r) \vec{u}_r \text{ avec } r = M_1 M_2 = GM \text{ et } \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2} = \frac{\overrightarrow{GM}}{GM}$$

Donc

$$\mu \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{(B^*)} = F(r) \vec{u}_r$$

Donc $M(\mu)$ est soumis à une force $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$, centrale.

Le théorème des moments cinétiques appliqué au système dans (B^*) galiléen en G fixe dans (B^*) donne :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{G/(B^*)}}{dt} \right|_{(B^*)} = \vec{M}_G(\vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}) = \vec{0} \text{ (on travaille dans un système isolé)}$$

Donc $\vec{\sigma}^* = \text{cte} = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}$

Donc M décrit un mouvement plan, qui obéit à la loi des aires.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système dans (B^*) galiléen donne :

$$dE_C = \delta W_{\text{int}}$$

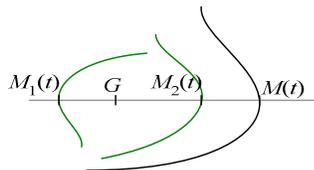
$$\delta W_{\text{int}} = -dE_p^* \text{ avec } \frac{dE_p^*}{dt} = -F(r)$$

Donc $d(E_p^* + E_C^*) = 0$, ou $E_m^* = \frac{1}{2} \mu v^2 + E_p^*(r) = \text{cte}$

D) Mouvement de M_1 et M_2 dans (B^*)

$$\vec{r}_1^* = \overrightarrow{GM_1} = \frac{-m_2}{m} \overrightarrow{GM} \text{ et } \vec{r}_2^* = \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m} \overrightarrow{GM} \text{ avec } m = m_1 + m_2$$

Les trajectoires de M_1 et M_2 sont donc homothétiques de la trajectoire de M .



E) Application

On considère un système de deux masses $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ en interaction gravitationnelle. Par exemple :

$M_1 =$ Soleil, masse m_s

$M_2 =$ Terre, masse m_T

On suppose le système isolé. On note G le centre de masse de $\{T, S\}$. On définit le mobile fictif par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{SR}$ de masse $\mu = \frac{m_T m_s}{m_T + m_s}$. On note enfin $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{GM}}{GM} = \frac{\overrightarrow{ST}}{ST}$.



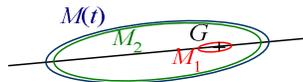
Relation fondamentale de la dynamique appliquée à $M(\mu)$ dans (B^*) galiléen :

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{(B^*)} = \vec{F}_{S \rightarrow T} = \frac{-G m_s m_T}{ST^2} \vec{u}_r = \frac{-G(m_s + m_T) \frac{m_s m_T}{m_s + m_T}}{ST^2} \vec{u}_r = \frac{-G(m_s + m_T) \mu}{GM^2} \vec{u}_r$$

Tout se passe donc comme si $M(\mu)$ est soumis à la force gravitationnelle exercée par G de masse $m_s + m_T$. Donc M décrit une ellipse de foyer G et obéit à la loi des aires.

La troisième loi de Kepler donne alors : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_s + m_T)}{4\pi^2}$ (m_T correspond à un terme correctif par rapport au résultat lorsque on fait l'approximation que le référentiel héliocentrique est galiléen).

Le mouvement de M_2 par rapport à M_1 est le même que celui de M par rapport à G .



Remarque : si on suppose $m_1 \gg m_2$

(exemple : $m_s = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} \gg m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$)

Alors :

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{-m_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{\ll 1}} \overrightarrow{GM}, \text{ d'où } GM_1 \ll r \text{ ou } G \approx M_1$$

$m_1 + m_2 \approx m_1$, d'où $G(m_1 + m_2) \approx M(m_1)$

et :

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{m_1}{\underbrace{m_1 + m_2}_{\approx 1}} \overrightarrow{GM}, \text{ d'où } M \approx M_1$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2, \text{ d'où } M(\mu) \approx M_2(m_2)$$