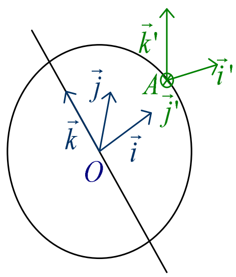
Chapitre 9 : Changement de référentiels

I Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

A) Equivalence référentiel – solide

Référentiel $(R) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont fixes dans (R). On a l'équivalence référentiel – solide : on peut lier un référentiel à un solide, et un référentiel peut être considéré comme un solide.

Exemple : Le solide Terre, référentiel terrestre ou du laboratoire.



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont fixes par rapport à la Terre. Tout point fixe de la terre peut être pris comme repère (avec un triplet de vecteurs formant une base orthonormée directe)

$$\left.\begin{aligned}(R_T) &= (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ &= (A, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')\end{aligned}\right\} \text{même référentiel}$$

B) Cas particuliers de mouvements d'un référentiel par rapport à un autre

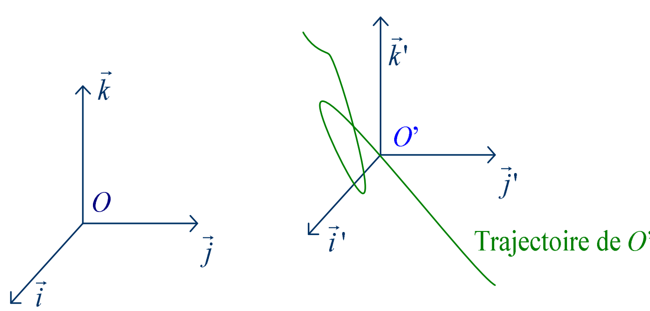
1) Mouvement de translation

Soient deux référentiels $(R) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(R') = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

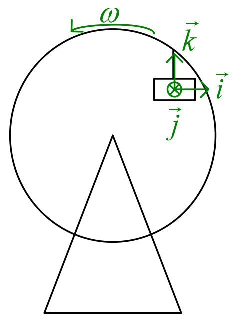
(R') est en translation par rapport à (R) si, et seulement si :

Tous les vecteurs fixes de (R') sont fixes dan (R) et inversement.

Remarque : on peut choisir alors $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme repère de (R').



Exemple : référentiel lié à une cabine de grande roue.



Ce référentiel est en translation par rapport au référentiel terrestre.

$\vec{A} = A_x(t)\cdot\vec{i} + A_y(t)\cdot\vec{j} + A_z(t)\cdot\vec{k}$

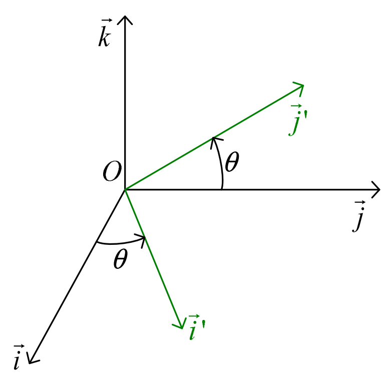
$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R)} = \dot{A}_x\cdot\vec{i} + A_x\underbrace{\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{(R)}}_{=\vec{0}} + \dot{A}_y\cdot\vec{j} + \dot{A}_z\cdot\vec{k}$$

et $$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R')} = \dot{A}_x\cdot\vec{i} + A_x\underbrace{\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{(R')}}_{=\vec{0}} + \dot{A}_y\cdot\vec{j} + \dot{A}_z\cdot\vec{k}$$

Donc $\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R')}}$ si (R) et (R') sont en translation l'un par rapport à l'autre.

2) Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On prend un axe $\Delta = (O,\vec{k})$ fixe dans (R) et (R').

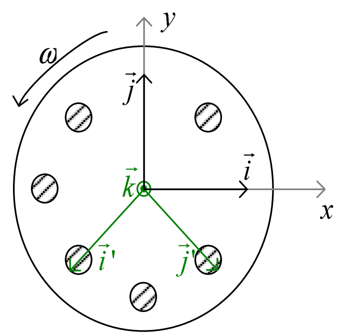


$(R) = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $(R') = (O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$

$\theta = (\vec{i},\vec{i}') = (\vec{j},\vec{j}')$

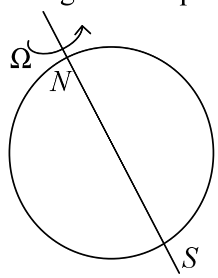
θ est une fonction affine du temps $\Leftrightarrow \dot{\theta} = \omega = \text{cte}$. On parle dans ce cas de rotation uniforme autour d'un axe fixe (Δ)

Exemple : manège



$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est fixe par rapport au manège, $\omega = \text{cte}$

Autre exemple : référentiel géocentrique terrestre en rotation par rapport au référentiel géocentrique



$\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$ $T = 23\text{h}56\text{min}4\text{s}$

Rotation autour de l'axe (SN) dans le sens trigonométrique associé à $\overrightarrow{SN}$

Retour au cas général :

$\vec{i}\,' = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$

$\vec{j}\,' = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$

$\vec{k} = \vec{k}$

On a donc :

$$\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{i}\,\frac{d\cos\theta}{dt} + \underbrace{\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{(R)}}_{=\vec{0}}\cos\theta + \vec{j}\,\frac{d\sin\theta}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\cdot\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\cdot\vec{j} = \dot{\theta}\cdot\vec{j}\,'$$

$$\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)} = -\dot{\theta}\cos\theta\cdot\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta\cdot\vec{j} = -\dot{\theta}\cdot\vec{i}\,'$$

$$\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0}$$

On a :

$$\dot{\theta}\cdot\vec{k}\wedge\vec{i}\,'=\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}1 & (\vec{i}\,')\\0 & (\vec{j}\,')\\0 & (\vec{k})\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\\dot{\theta}\\0\end{vmatrix}=\dot{\theta}\cdot\vec{j}\,'=\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)}$$

$$\dot{\theta}\cdot\vec{k}\wedge\vec{j}\,'=\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dot{\theta}\\0\\0\end{vmatrix}=-\dot{\theta}\cdot\vec{i}\,'=\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)}$$

$$\dot{\theta}\cdot\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}=\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)}$$

Définition :

$\vec{\omega}_{R'/R}(=\vec{\omega})=\dot{\theta}\cdot\vec{k}$, vecteur rotation du référentiel (R') par rapport à (R)

Direction : axe de rotation

Module : $|\dot{\theta}|$, vitesse angulaire de rotation

Sens : tel que (R') tourne dans le sens trigonométrique associé à $\vec{\omega}$

Ainsi, $\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)}=\vec{\omega}\wedge\vec{i}\,'$; $\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)}=\vec{\omega}\wedge\vec{j}\,'$; $\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)}=\vec{\omega}\wedge\vec{k}$

Application :

$$\vec{A}=A_x(t)\cdot\vec{i}\,'+A_y(t)\cdot\vec{j}\,'+A_z(t)\cdot\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R')}=\dot{A}_x\cdot\vec{i}\,'+A_x\underbrace{\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R')}}_{=\vec{0}\text{ car }\vec{i}\,'\text{ fixe dans (R)}}+\dot{A}_y\cdot\vec{j}\,'+\dot{A}_z\cdot\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R)}=\dot{A}_x\cdot\vec{i}\,'+A_x\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)}+\dot{A}_y\cdot\vec{j}\,'+A_y\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)}+\dot{A}_z\cdot\vec{k}+A_z\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)}$$

$$=\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R')}+\vec{\omega}\wedge\left(A_x\cdot\vec{i}\,'+A_y\cdot\vec{j}\,'+A_z\cdot\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R)}=\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R')}+\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\vec{A}}$$

Si A est fixe dans (R'), $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R)}=\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\vec{A}$

II Transformation des grandeurs cinématiques

A) Définition

$(R)=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $(R')=(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$

On considère un point matériel M.

On pose $\overrightarrow{OM}=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{O'M}=x'(t)\cdot\vec{i}'+y'(t)\cdot\vec{j}'+z'(t)\cdot\vec{k}'$

On a alors :

$$\vec{v}_{M/(R)}=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)}=\dot{x}\cdot\vec{i}+\dot{y}\cdot\vec{j}+\dot{z}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{v}_{M/(R')}=\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')}=\dot{x}'\cdot\vec{i}'+\dot{y}'\cdot\vec{j}'+\dot{z}'\cdot\vec{k}'$$

$$\vec{a}_{M/(R)}=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{(R)}=\ddot{x}\cdot\vec{i}+\ddot{y}\cdot\vec{j}+\ddot{z}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{a}_{M/(R')}=\left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{(R')}=\ddot{x}'\cdot\vec{i}'+\ddot{y}'\cdot\vec{j}'+\ddot{z}'\cdot\vec{k}'$$

(O et O' sont fixes respectivement dans (R) et (R'))

B) Formule de transformation de la vitesse

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)}=\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)}+\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R)}$$

$$=\vec{v}_{O'/(R)}+\dot{x}'\vec{i}+x'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)}+\dot{y}'\vec{j}+y'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)}+\dot{z}'\vec{k}+z'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}$$

$$=\dot{x}'\vec{i}+\dot{y}'\vec{j}+\dot{z}'\vec{k}+\vec{v}_{O'/(R)}+x'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)}+y'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)}+z'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}$$

$$\underbrace{\vec{v}_{M/(R)}}_{\text{vitesse absolue}}=\underbrace{\vec{v}_{M/(R')}}_{\text{vitesse relative}}\underbrace{+\vec{v}_{O'/(R)}+x'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)}+y'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)}+z'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}}_{\text{vitesse d'entrainement de } R'/R \text{ en } M \text{ à } t}$$

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$$

Interprétation physique de $\vec{v}_e$:

On note P le point, fixe dans (R'), qui coïncide avec M à t_0.

Notation : $P=M \text{ à } t_0\in R'$

A tout instant t, $\overrightarrow{OP}(t)=\overrightarrow{OO'}(t)+\overrightarrow{O'P}(t)$

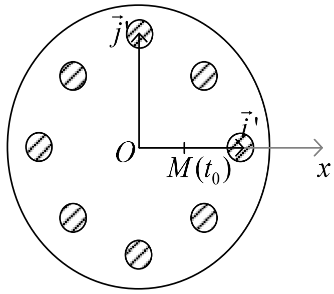
Or $\overrightarrow{O'P}=x'(t_0)\cdot\vec{i}+y'(t_0)\cdot\vec{j}+z'(t_0)\cdot\vec{k}$

(Car P est fixe dans (R') et $P(t_0)=M(t_0)$)

$$\text{Donc } \vec{v}_{P/(R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{v}_{O'/(R)} + x'(t_0)\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)} + y'(t_0)\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)} + z'(t_0)\left.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right|_{(R)}$$

Ainsi, à $t = t_0$, $\vec{v}_{P/(R)}(t_0) = \vec{v}_e$ (de R'/R en M à t_0)

Exemple : mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel lié à un manège tournant à une vitesse angulaire $\omega = \text{cte}$

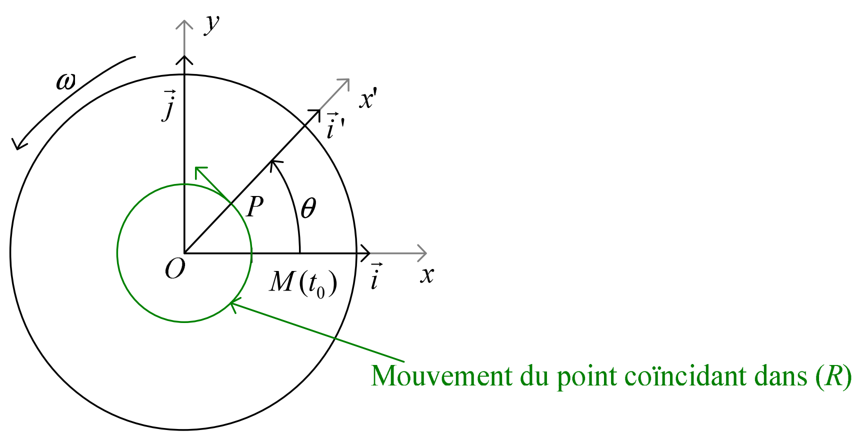


M se déplace sur $(Ox'$ à vitesse constante.

$\overrightarrow{OM} = x'\vec{i}\,' = a \times t \cdot \vec{i}\,'$, où $a = \text{cte}$

$P = M \text{ à } t_0 \in R'$

Donc $\overrightarrow{OP} = a \times t_0 \cdot \vec{i}\,'$; $\quad \vec{v}_{P/(R)} = a \times t_0 \cdot \underbrace{\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)}}_{=\dot{\theta}\cdot\vec{j}=\omega\cdot\vec{j}}$



$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/(R')} = a \cdot \vec{i}\,'$ (Vitesse constante car mouvement rectiligne uniforme)

Donc $\vec{v}_{M/(R)}(t_0) = a \cdot \vec{i}\,' + a \cdot t_0 \omega \cdot \vec{j}\,'$

Vérification :

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, M a pour coordonnées polaires $(\rho = OM ; \theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \omega.t(+\text{cte}))$

Donc $\vec{v}_{M/(R)} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta = a \cdot \underbrace{\vec{u}_\rho}_{\vec{i}\,'} + a \times t.\omega \cdot \underbrace{\vec{u}_\theta}_{\vec{j}\,'}$

C) Transformation de l'accélération

$$\vec{a}_{M/(R)} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/(R)}}{dt}\right|_{(R)}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)} + \dot{x}'\cdot\vec{i}' + \dot{y}'\cdot\vec{j}' + \dot{z}'\cdot\vec{k}' + x'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}\right)$$

$$= \vec{a}_{O'/(R)} + \ddot{x}'\cdot\vec{i}' + \ddot{y}'\cdot\vec{j}' + \ddot{z}'\cdot\vec{k}' + \left(\dot{x}'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} + \dot{y}'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} + \dot{z}'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}\right)$$

$$+\left(\dot{x}'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} + \dot{y}'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} + \dot{z}'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}\right) + \left(x'\left.\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right|_{(R)}\right)$$

$$= \vec{a}_{M/(R')} + 2\left(\dot{x}'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} + \dot{y}'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} + \dot{z}'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}\right) + \vec{a}_{O'/(R)}$$

$$+\left(x'\left.\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right|_{(R)}\right)$$

Rappel : $P = M$ à $t_0 \in R'$

$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OO'} + x'(t_0)\cdot\vec{i} + y'(t_0)\cdot\vec{j} + z'(t_0)\cdot\vec{k}$

Donc $\vec{a}_{P/(R)}(t) = \vec{a}_{O'/(R)}(t) + x'(t_0)\left.\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}\right|_{(R)}(t) + y'(t_0)\left.\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}\right|_{(R)}(t) + z'(t_0)\left.\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right|_{(R)}(t)$

Ainsi, à $t = t_0$:

$$\vec{a}_{P/(R)}(t_0) = \vec{a}_{O'/(R)}(t_0) + x'(t_0)\left.\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}\right|_{(R)}(t_0) + y'(t_0)\left.\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}\right|_{(R)}(t_0) + z'(t_0)\left.\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right|_{(R)}(t_0)$$

$$= \vec{a}_e \text{ (de R'/R en M à } t_0)$$

(Accélération d'entraînement de R'/R en M à t_0)

$$\text{Donc } \underset{\vec{a}_{M/(R)}}{\underset{\|}{\vec{a}_a}} = \underset{\vec{a}_{M/(R')}}{\underset{\|}{\vec{a}_r}} + \underset{\vec{a}_{P/(R)}}{\underset{\|}{\vec{a}_e}} + \vec{a}_c$$

Avec $\vec{a}_c = 2\dot{x}'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} + 2\dot{y}'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} + 2\dot{z}'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}$: accélération complémentaire ou de Coriolis.

III Mouvements de translation et de rotation uniforme par rapport à un axe fixe

A) Mouvement de translation

1) Transformation des vitesses

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'/(R)} + \underbrace{x'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{i}',\vec{j}',\vec{k}' \text{ fixes dans (R)}}$$

Donc $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'/(R)}(t)$ (indépendant de M)

Donc $\boxed{\vec{v}_{M/(R)} = \vec{v}_{M/(R')} + \vec{v}_{O'/(R)}}$

Cas particulier : si M est fixe dans (R'), $\vec{v}_{M/(R')} = \vec{0}$ et $\vec{v}_{M/(R)} = \vec{v}_{O'/(R)}$

Ainsi, dans un mouvement de translation, tous les points fixes de (R') ont la même vitesse dans (R).

2) Transformation de l'accélération

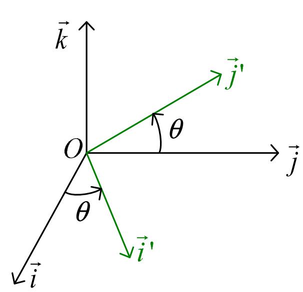
$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/(R)} + \underbrace{x'\left.\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right|_{(R)}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{i}',\vec{j}',\vec{k}' \text{ fixes dans (R)}} = \vec{a}_{O'/(R)}$$

$$\vec{a}_c = 2\dot{x}'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} + 2\dot{y}'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} + 2\dot{z}'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0}$$

Donc $\boxed{\vec{a}_{M/(R)} = \vec{a}_{M/(R')} + \vec{a}_{O'/(R)}}$

Si M est fixe dans (R'), $\vec{a}_{M/(R)} = \vec{a}_{O'/(R)}$. Ainsi, tout les points fixes de (R') on la même accélération dans (R).

B) Rotation uniforme autour d'un axe fixe



$\theta = \omega.t$; $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega} = \dot{\theta}.\vec{k}$

$(R) = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; $(R') = (0, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$

1) Transformation des vitesses

$$\vec{v}_e = \underbrace{\vec{v}_{O'/(R)}}_{=\vec{0}} + x'\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{\omega}\wedge\vec{i}\,' ; \quad \left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{\omega}\wedge\vec{j}\,' ; \quad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{\omega}\wedge\vec{k}$$

Donc $\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\left(x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\right) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$

Donc $\boxed{\vec{v}_{M/(R)} = \vec{v}_{M/(R')} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}}$

Rappel :

$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R')} + \vec{\omega}_{R'/R}\wedge\vec{A}$ avec $\vec{A} = \overrightarrow{OM}$ donnait directement la formule.

2) Transformation des accélérations

$$\vec{a}_e = \underbrace{\vec{a}_{O'/(R)}}_{=\vec{0}} + x'\left.\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}\right|_{(R)} + y'\left.\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}\right|_{(R)} + z'\left.\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right|_{(R)}$$

$$\left.\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}\right|_{(R)} = \left.\frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{i}\,')}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{(R)}\wedge\vec{i}\,'+\vec{\omega}\wedge\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0}+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{i}\,')$$

Ainsi, en procédant de même avec $\vec{j}\,'$ et $\vec{k}$:

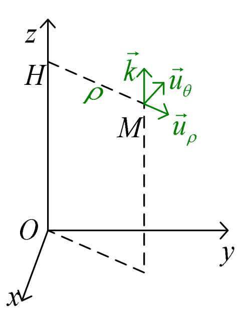
$$\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k})) = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$$

$$\vec{a}_c = 2\dot{x}'\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(R)} + 2\dot{y}'\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(R)} + 2\dot{z}'\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)} = 2\vec{\omega}\wedge(\dot{x}'\vec{i}\,'+\dot{y}'\vec{j}\,'+\dot{z}'\vec{k}) = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/(R')}$$

Donc $\boxed{\vec{a}_{M/(R)} = \vec{a}_{M/(R')} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/(R')}}$

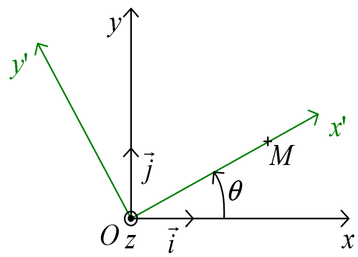
$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix} x & (\vec{i}) \\ y & (\vec{j}) \\ z & (\vec{k}) \end{matrix}\right. \Rightarrow \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} -\omega\times y \\ \omega\times x \\ 0 \end{matrix}\right.$$

Donc $\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}) = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} -\omega\times y \\ \omega\times x \\ 0 \end{matrix}\right. = -\omega^2 \left|\begin{matrix} x \\ y \\ 0 \end{matrix}\right.$



Ainsi, $\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM} = -\omega^2 \rho . \vec{u}_\rho$

Application : mouvement rectiligne uniforme sur un manège



$\theta = \omega . t$

(R_T) : référentiel terrestre $(0, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$

(R') : référentiel du manège $(0, \vec{\mathrm{i}}', \vec{\mathrm{j}}', \vec{\mathrm{k}})$

$$\begin{cases} x' = a.t \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

$\vec{a}_r = \vec{a}_{M/(R')} = \ddot{x}.\vec{i}' = \vec{0}$

$\vec{a}_e - \omega^2 \overrightarrow{OM} = -\omega^2 a \times t.\vec{i}'$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/(R')} = 2\omega.\vec{k} \wedge a\vec{i}' = 2a\omega.\vec{j}'$

Donc $\vec{a}_{M/(R)} = -\omega^2 a \times t.\vec{i}' + 2a\omega.\vec{j}'$

Vérification :

En coordonnées polaires : $\rho = OM = a.t$; $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \omega.t$; $z = 0$

$\vec{u}_\rho = \vec{i}'$; $\vec{u}_\theta = \vec{j}'$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/(R)} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \\ &= (0 - a.t\omega^2)\vec{u}_\rho + (2a\omega + 0)\vec{u}_\theta \\ &= -\omega^2 a \times t.\vec{u}_\rho + 2a\omega.\vec{u}_\theta \end{aligned}$$