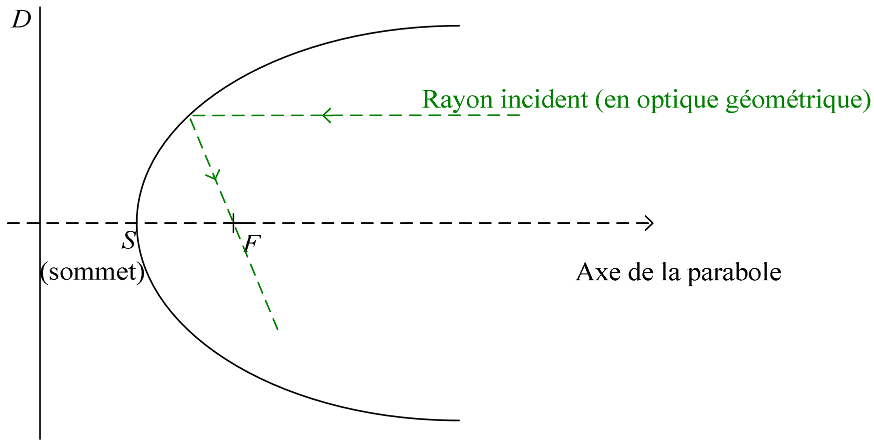
Chapitre 8 : Mouvement dans un champ newtonien

I Notions sur les coniques

A) Définition géométrique

1) Parabole

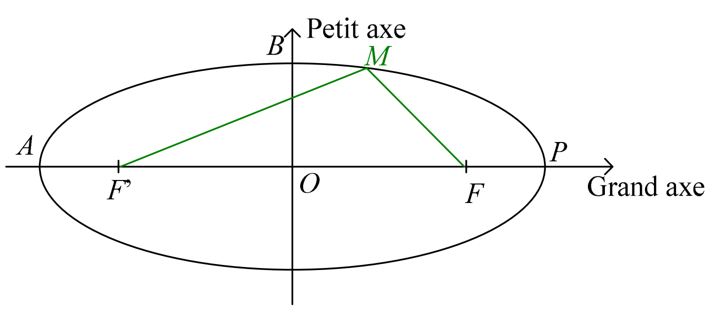
Parabole de directrice D et de foyer $F = \{M$ équidistant de D et F$\}$



F est l'image, rigoureusement stigmatique, d'un faisceau de lumière incident parallèle à l'axe de la parabole.

2) Ellipse

Ellipse de foyers F et F', de ½ grand axe $a = \{M \in \text{Plan}, FM + F'M = 2a\}$



On note : O le milieu de $[FF']$.

P est le péricentre, point (du grand axe) le plus proche de F.

A est l'apocentre, point le plus éloigné de F.

P appartient à l'ellipse. On a donc :

$FP + F'P = 2a \Leftrightarrow (OP - OF) + (F'O + OP) = 2a \Leftrightarrow 2OP = 2a \Leftrightarrow OP = a$

De même, comme A appartient à l'ellipse, $OA = a$

Donc $AP = 2a$ (d'où le nom de ½ grand axe pour a).

On note c la ½ distance entre les foyers $c = OF = OF'$

Et b le ½ petit axe de l'ellipse $b = OB$

B appartient à l'ellipse. On a donc :

$FB + F'B = 2a \Leftrightarrow 2FB = 2a \Leftrightarrow \sqrt{OF^2 + OB^2} = a \Leftrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

On définit l'excentricité $e = c/a \in [0;1]$ (≤ 1 car $a^2 \geq c^2$)

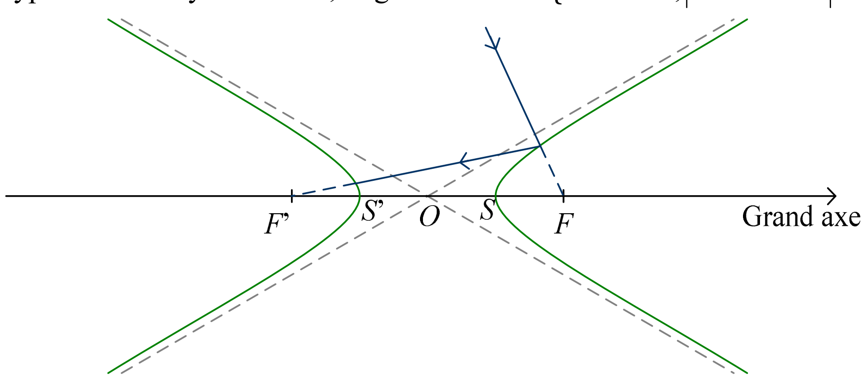
Dans le cas où $e = 0$, c'est un cercle (foyers confondus) de rayon a. Si $e = 1$, c'est un segment ou une parabole.

Surface : $S = \pi \times a \times b$

Optique géométrique : tout rayon partant de F atteindra F' après réflexion sur l'ellipse, et vice-versa.

3) Hyperbole

Hyperbole de foyers F et F', ½ grand axe a = $\{M \in \text{Plan}, |FM - F'M| = 2a\}$



S appartient à l'hyperbole. On a donc :

$F'S - FS = 2a \Leftrightarrow (F'O + OS) - (OF - OS) = 2a \Leftrightarrow 2OS = 2a \Leftrightarrow OS = a$

De même, $OS' = a$, et ainsi $SS' = 2a$

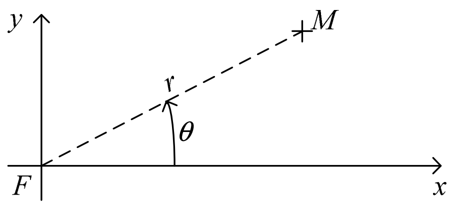
On note c la ½ distance entre les foyers $c = OF = OF'$

On définit le ½ petit axe b comme vérifiant $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

On définit encore l'excentricité $e = c/a > 1$

F' est l'image rigoureusement stigmatique de F par réflexion sur une branche de l'hyperbole (image et objet virtuels à cause respectivement de la branche gauche et droite)

B) Equation polaire

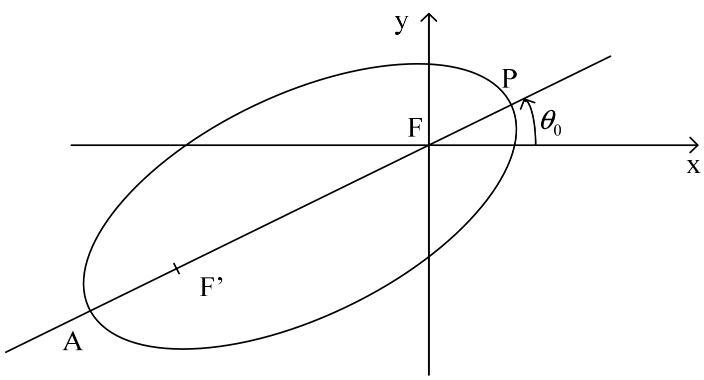


Centre du repère : un des foyers de la conique.

On admet que la conique a pour équation $\boxed{r = \dfrac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}}$ (θ_0 correspond à la direction du péricentre, p est un paramètre de la conique)

1) Ellipse

$1+e\cos(\theta-\theta_0) > 0.$ Donc $p > 0$, car $r > 0$



r minimum $\Leftrightarrow \cos(\theta-\theta_0) = 1 \Leftrightarrow \theta = \theta_0$, direction du péricentre.

En P :

$$r = FP = OP - OF = a - c$$

$$= \frac{p}{1+e}$$

Donc $p = (a-c)(1+e) = (a-c)(1+\dfrac{c}{a}) = \dfrac{1}{a}(a-c)(a+c) = \dfrac{b^2}{a}$

2) Hyperbole

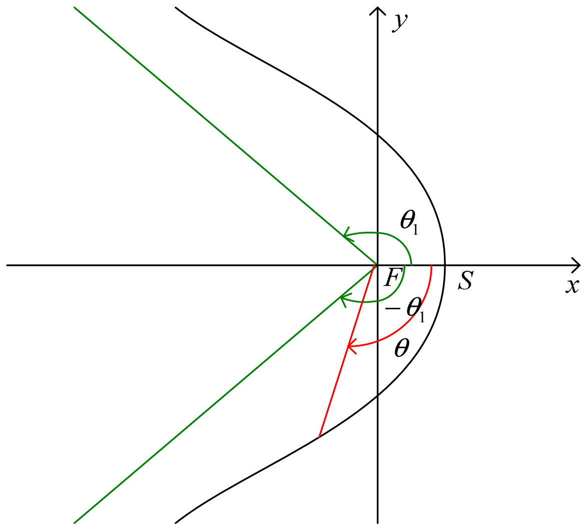
Pour simplifier, on suppose $\theta_0 = 0$ (sinon on peut changer de repère)

- Si $p > 0$

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} > 0 \Leftrightarrow 1+e\cos\theta > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta > -\frac{1}{e} = \cos\theta_1 \text{ où } \theta_1 \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\quad \left(\frac{-1}{e} \in \left]-1;0\right[\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta \in \left]-\theta_1;\theta_1\right[$$



On obtient donc une seule branche de l'hyperbole.
Pour $\theta = 0$, $r = FS = FO - OS = c - a$

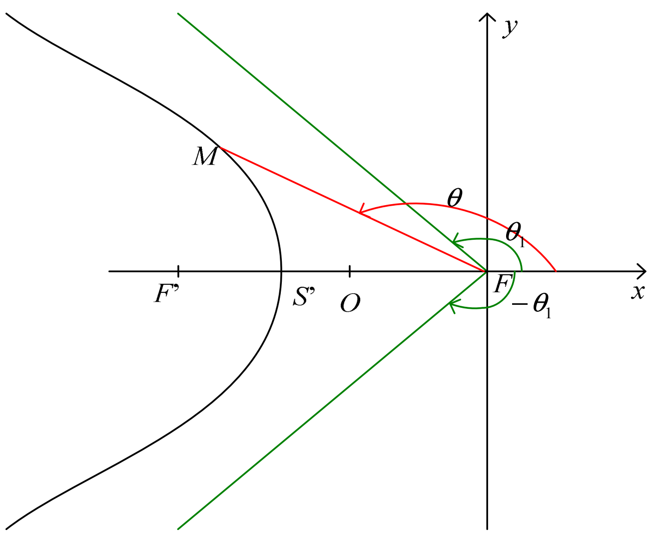
Donc $p = (c-a)(1+e) = \frac{1}{a}(c-a)(a+c) = \frac{b^2}{a}$

- Si $p < 0$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} > 0 \Leftrightarrow 1 + e\cos\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta < -\frac{1}{e} = \cos\theta_1 \text{ où } \theta_1 \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\quad \left(\frac{-1}{e} \in \left]-1;0\right[\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta \in \left]-\pi;-\theta_1\right[\cup \left]\theta_1;\pi\right]$$



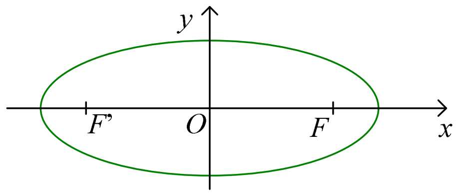
On obtient la branche d'hyperbole qui exclut F
Pour $\theta = \pi$, $r = FS' = FO + OS' = c + a$

Donc $p = (c+a)(1-e) = \frac{1}{a}(a-c)(a+c) = \frac{-b^2}{a}$

C) Equation cartésienne

On prend l'origine au centre de la conique.

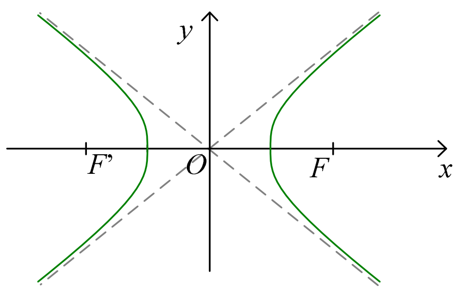
1) Ellipse



Equation de l'ellipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(Peut être montrée à partir de l'équation polaire)

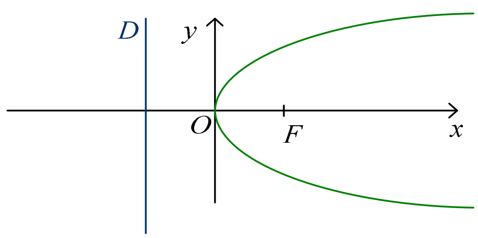
2) Hyperbole



Equation de l'hyperbole : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(Remarque : on obtient ici les deux branches de l'hyperbole)

3) Parabole



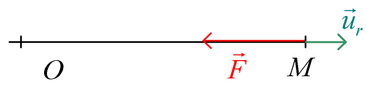
Equation de la parabole : $y^2=2p\times x$

(p : paramètre de la parabole)

II Mouvement dans un champ de force centrale, newtonienne

A) Hypothèses

O fixe dans (R) galiléen.



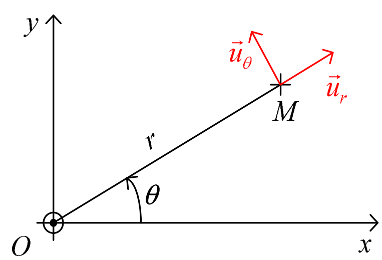
$\vec{F} = F(r)\cdot\vec{u}_r$ (car la force est centrale)

$= -\frac{k}{r^2}\cdot\vec{u}_r$ (car la force est newtonienne)

Avec $k > 0$ si la force est attractive, $k < 0$ si elle est répulsive.

B) Equation de la trajectoire

La force est centrale. On a donc un mouvement plan. On choisit un axe $(Ox$, et l'axe $(Oy$ perpendiculaire.



$C = r\dot{\theta} = \text{cte}$

2nde formule de Binet :

$$\vec{a}_{M/(R)} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\cdot\vec{u}_r \text{ avec } u = \frac{1}{r}$$

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans (R) galiléen :

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}_{M/(R)}$$

$$\Leftrightarrow -k\cdot u^2\cdot\vec{u}_r = -mC^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\cdot\vec{u}_r$$

$$\Leftrightarrow k = mC^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mC^2}$$

Donc $u = SP + SGH = \frac{k}{mC^2} + A\cos(\theta + \varphi)$

$$u(\theta) = \frac{k}{mC^2} + \frac{k}{mC^2}e\cos(\theta - \theta_0) \text{ avec } A = \pm\frac{k}{mC^2}e,\ e > 0$$

$$u(\theta) = \frac{k}{mC^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$$

Donc $\frac{1}{r}(\theta) = \frac{k}{mC^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \text{ avec } \boxed{p = \frac{mC^2}{k}}$$

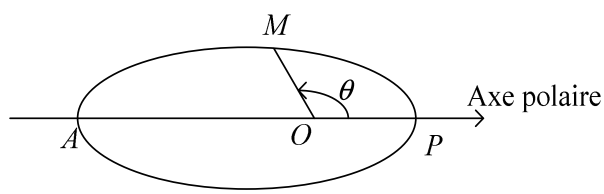
Donc M décrit une conique de foyer O, de paramètre $p = \frac{mC^2}{k}$, d'excentricité $e > 0$, et de grand axe $\theta = \theta_0 [\pi]$. p, e, θ_0 dépendent des conditions initiales.

On pose $\theta' = \theta - \theta_0$ pour simplifier, et on utilisera θ pour θ'.

C) Signe de k et nature de la trajectoire

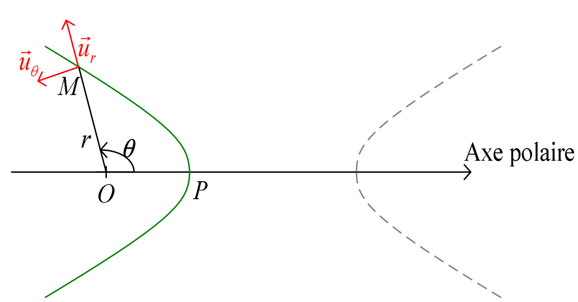
Si $k > 0$: force attractive. $p = \frac{mC^2}{k} > 0$

1) Ellipse : $e \leq 1$



Pour $\theta' = \theta_0 = 0$: péricentre

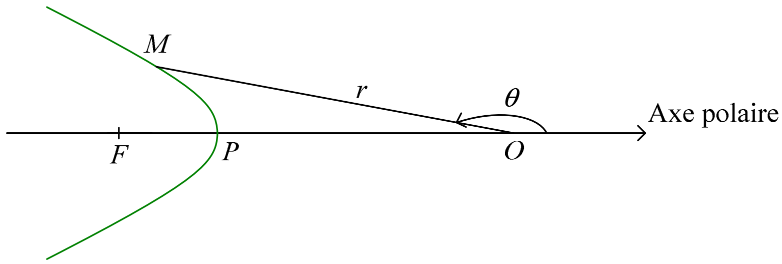
2) Hyperbole : $e > 1$



3) Parabole : $e = 1$

Si $k < 0$: force répulsive. $p = \dfrac{mC^2}{k} < 0$

On a donc une hyperbole, d'excentricité $e > 1$



D) Energie

1) Energie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

1ère formule de Binet :

$$v^2 = C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right)$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$$

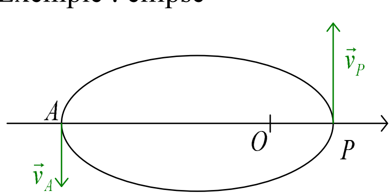
$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-e\sin\theta}{p}$$

Donc $v^2 = C^2 \left(\dfrac{1 + e^2\cos^2\theta + 2e\cos\theta}{p^2} + \dfrac{e^2\sin^2\theta}{p^2} \right)$

$$= C^2 \left(\frac{1 + e^2 + 2e\cos\theta}{p^2} \right) = \frac{k \cdot p / m}{p^2} (1 + e^2 + 2e\cos\theta)$$

Donc $E_c = \dfrac{k}{2p}(1 + e^2 + 2e\cos\theta)$

Exemple : ellipse



$$v_P^2 = \frac{k(1+e)^2}{m \cdot p} \ ; \quad v_A^2 = \frac{k(1-e)^2}{m \cdot p}$$

2) Energie potentielle

$$E_P = \frac{-k}{r} = \frac{-k}{p}(1+e\cos\theta)$$

3) Energie mécanique

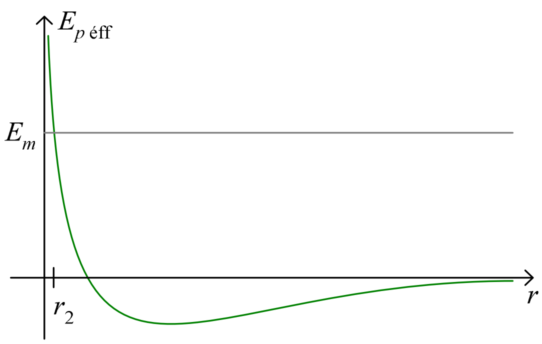
Système conservatif :

$$\begin{aligned} E_m &= E_C + E_P \\ &= \frac{k}{2p}(1+e^2+2e\cos\theta) - \frac{k}{p}(1+e\cos\theta) \\ &= \frac{k}{2p}(e^2-1) \\ &= \frac{mC^2}{2p^2}(e^2-1) \end{aligned}$$

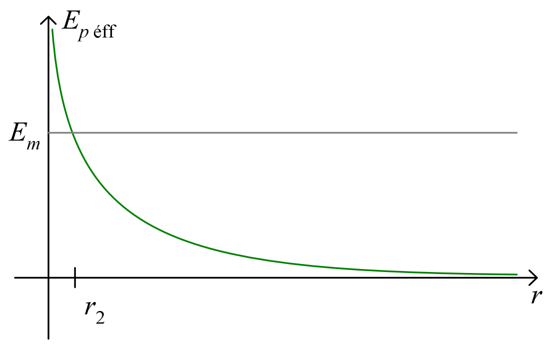
(C'est donc une intégrale première du mouvement : indépendante de *t*)

Le signe de E_m ne dépend que de e^2-1 (donc $e-1$), donc de la nature de la trajectoire.

Si $e>1$, $E_m>0$ (hyperbole, état de diffusion)



$r \geq r_2$



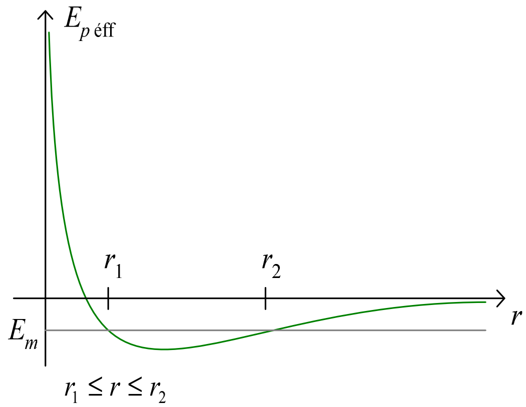
$r \geq r_2$

Si $e=1$, $E_m=0$ (parabole, état de diffusion)

$$E_m = \frac{1}{2}m\cdot v^2 - \frac{k}{r}$$

$E_P \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ Donc $E_C \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ (car $v\to 0$)

Si $e < 1$, $E_m < 0$ (ellipse, mouvement lié)



r_1 = distance péricentrique = $\dfrac{p}{1+e}$

r_2 = distance apocentrique = $\dfrac{p}{1-e}$

<u>Autre expression de l'énergie mécanique :</u>

$E_m = \dfrac{k}{2p}(e^2 - 1)$

- Si $k > 0$ et $e < 1$: on a une ellipse

$p = \dfrac{b}{a^2}$ et $e^2 - 1 = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2} = \dfrac{-b^2}{a^2}$

Donc $E_m = \dfrac{k}{2b^2/a} \times \left(\dfrac{-b^2}{a^2}\right) = \dfrac{-k}{2a} < 0$

- Si $k > 0$ et $e > 1$: on a une hyperbole

$p = \dfrac{b}{a^2}$ et $e^2 - 1 = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

Donc $E_m = \dfrac{k}{2a} > 0$

- Si $k < 0$ (et ainsi $e < 1$) : on a aussi une hyperbole

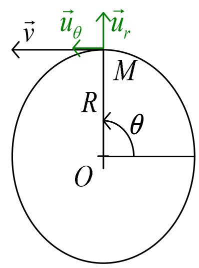
$p = \dfrac{-b}{a^2}$ et $e^2 - 1 = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

Donc $E_m = \dfrac{-k}{2a} > 0$ (car $k < 0$)

Donc, dans chaque cas, $\boxed{E_m = \pm \dfrac{|k|}{2a}}$ (le signe dépend de la nature de la trajectoire). Ainsi, E_m permet de trouver a et vice-versa. De même, avec la relation $p = \dfrac{mC^2}{k} = \dfrac{\pm b^2}{a}$, on peut connaître $\dfrac{\pm b^2}{a}$ grâce à C et vice versa.

E) Cas particulier : mouvement circulaire

Le mouvement circulaire est un cas particulier du mouvement elliptique. On a alors $k > 0$.



On a : $a = R, b = R, c = 0, e = 0$

$\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{u}_r$

$\vec{v}_{M/(R)} = R\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$

On a $C = R^2\dot{\theta} = \text{cte}$. Donc le mouvement est circulaire uniforme.

On pose $\omega = \dot{\theta}$ (vitesse angulaire, constante ici)

$p = R = \dfrac{mC^2}{k} = \dfrac{mR^4\omega^2}{k} \Leftrightarrow |\omega| = \left(\dfrac{k}{mR^3}\right)^{1/2}$. Donc $v = R|\omega| = \left(\dfrac{k}{mR}\right)^{1/2}$

ou : $E_C = \dfrac{k}{2p}(1 + e^2 + 2e\cos\theta) = \dfrac{k}{2p}$. Donc $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{k}{2R}$ soit $v = \left(\dfrac{k}{mR}\right)^{1/2}$

$E_P = \dfrac{-k}{r} = \dfrac{-k}{R}$

Donc $E_m = E_C + E_P = -\dfrac{k}{R^2}$

Remarque : $E_C = -E_m$; $E_P = 2E_m$

C'est un cas particulier du théorème du Viriel :

Pour un mouvement lié, $-2\langle E_C \rangle = \langle E_P \rangle$

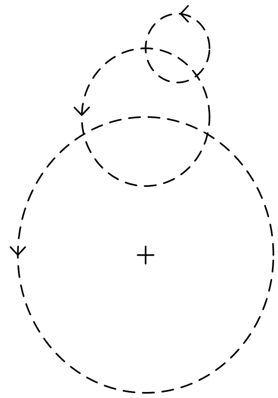
Ainsi, si E_m diminue (frottement par exemple), $E_C = -E_m$ augmente, donc v augmente (ce qui peut paraître paradoxal), mais en supposant le mouvement toujours circulaire. Exemple : satellite autour de la Terre. Mais $E_C = \dfrac{k}{2R}$ donc R diminue.

III Mouvement des planètes et satellites

A) Lois de Kepler

Les observations (très précises) de Tycho Brahé ont donnée les lois de Kepler, qui ont permis la loi de la gravitation universelle de Newton (notamment le calcul de G)

Théorie épicyclique utilisée à ce moment (mais fausse) :



Les planètes ont un mouvement de type circulaire, (tournent autour d'autres planètes…)

$1^{\text{ère}}$ loi de Kepler : Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

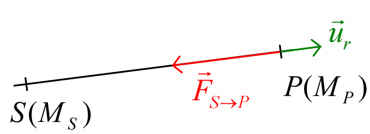
$2^{\text{ème}}$ loi de Kepler : le rayon-vecteur $\overrightarrow{SP}$ (Soleil Planète) balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

$3^{\text{ème}}$ loi de Kepler : $\dfrac{a^3}{T^2}$ est une constante, identique pour toutes les planètes du système solaire (où a est le ½ grand axe de l'ellipse de la trajectoire, T la période de révolution de la planète)

B) Démonstration

Hypothèses :

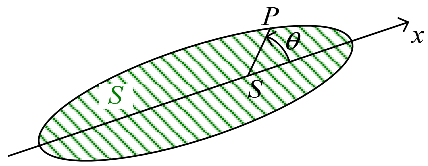
- Le soleil et les planètes ont une distribution de masse à symétrie sphérique (assimilés à des masses ponctuelles situées au centre de l'astre, de masses la masse totale de l'astre).
- Il existe un référentiel galiléen dans lequel le soleil est fixe (référentiel héliocentrique : centre du soleil, 3 étoiles éloignées comme direction des axes)
- On suppose la mécanique classique valide ($v << c$)



$\vec{F}_{S\to P} = -\dfrac{GM_S M_P}{r^2}\vec{u}_r$. On a donc une force centrale newtonienne, $k = GM_S M_P$.

Donc :

- Les objets décrivent des coniques de foyer S dans le système solaire → ellipses car elles restent dans le système. ($1^{\text{ère}}$ loi)

- La force est centrale, donc $\frac{dS}{dt}=\frac{C}{2}$, $C=r^2\dot{\theta}=\text{cte}$ (2ème loi)
- 

S : aire de l'ellipse
T : période de révolution
$\frac{dS}{dt}=\frac{C}{2}=\frac{S}{T}$; $p=\frac{M_P C^2}{k}=\frac{b^2}{a}$ Donc $C^2=\frac{b^2 k}{aM_P}$
On a, pour une ellipse, $S=\pi\times a\times b$
On a donc :
$\frac{C^2}{4}=\frac{S^2}{T^2}\Leftrightarrow\frac{kb^2}{4M_P a}=\frac{\pi^2 a^2}{T^2}\Leftrightarrow\frac{a^3}{T^2}=\frac{k}{4\pi^2 M_P}=\frac{GM_S}{4\pi^2}$
Identique pour toutes les planètes (ne dépend que de M_S) (3ème loi)

Remarque :
$\omega=\sqrt{\frac{k}{mR^3}}$ (pour un mouvement uniforme)
Donc $\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{GM_S}{R^3}}$
Soit $\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{GM_S}{R^3}$ (3ème loi de Kepler pour un mouvement circulaire)

Application : calcul de M_S
Terre : $a=1\text{u.a.}=149{,}610^6\,\text{km}$; $T=365{,}25\,\text{jours}$
Alors, $M_S=1{,}99.10^{30}\,\text{kg}$ (pour la terre, $M_T=3{,}0.10^{24}\,\text{kg}$)

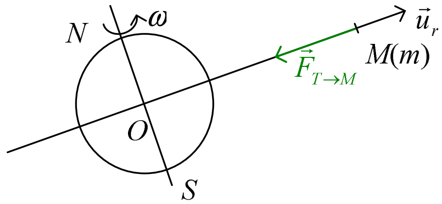
$T_{\text{jupiter}}=11{,}8\text{ans}$. Donc $a_{\text{Jupiter}}=a_{Terre}\times\left(\frac{T_{\text{Jupiter}}}{T_{\text{Terre}}}\right)^{2/3}=5{,}2\text{u.a.}$

C) Satellites terrestres

(Sauf cas de la lune)

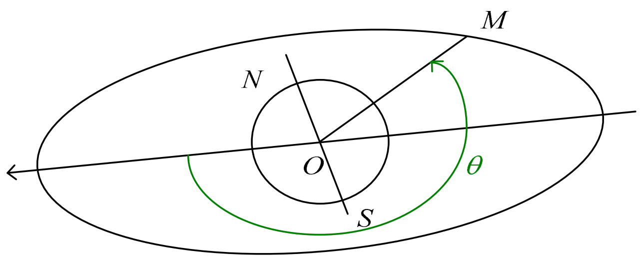
Hypothèses :
- On suppose que la Terre correspond à une masse ponctuelle en son centre O.
- Le référentiel géocentrique (mêmes étoiles que pour héliocentrique) est supposé galiléen

On considère un satellite M.

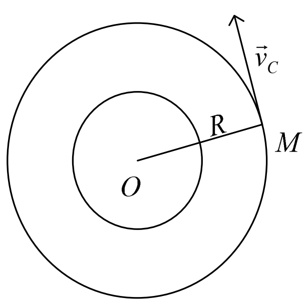


$$\vec{F}_{T\to M} = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u}_r$$ (Force centrale newtonienne)

Le mouvement dans le référentiel géocentrique est donc une conique, une ellipse pour les trajectoires liées.



Orbites circulaires :



($R > R_T$)

$\vec{v}_C$: vitesse du satellite sur l'orbite circulaire de rayon R

$$E_C = \frac{GM_T m}{2R} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \text{ Donc } v_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

v_C est maximale pour une orbite basse, $R \approx R_T$.

$$v_{C\max} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7{,}92 \text{km.s}^{-1}$$ (cas des satellites en orbite basse)

$$T = \frac{2\pi R}{v_C} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} \; ; \quad T_{\min} = 1\text{h}25\min$$

Pour un satellite géostationnaire : $T = T_{\text{Terre}} = 23\text{h}56\min 4\text{s}$

Donc $R_{\text{géostationnaire}} = 42{,}2.10^5\,\text{km}$; $R_{\text{géostationnaire}} - R_T = 358000\text{km}$

<u>Vitesse minimale de satellisation :</u> On envoie un satellite depuis la surface terrestre avec une vitesse $\vec{v}_0$ pour l'amener sur une trajectoire circulaire de rayon R. (On suppose qu'il n'y a que la force gravitationnelle).

$E_m = -E_C = -\frac{GM_T m}{2R}$ (sur la trajectoire circulaire)

$= E_C + E_P = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$ (au lancement)

Donc $\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{GM_T m}{R_T} - \frac{GM_T m}{2R}$. Donc $\boxed{v_0^2 = GM_T (\frac{2}{R_T} - \frac{1}{R})}$

v_0 est minimum si $R = R_T$. Alors $v_0^2 = \frac{GM_T}{R_T}$, soit $v_0 = v_C = 7{,}92 \text{km.s}^{-1}$

<u>Vitesse de libération :</u> Correspond à la vitesse minimale pour que le projectile quitte l'attraction terrestre. On a donc un mouvement de diffusion, $E_m \geq 0$

$E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$

$\Leftrightarrow v^2 = \frac{2E_m}{m} + \frac{2GM_T}{R_T} \geq \frac{2GM_T}{R_T}$

Donc $v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2} \times v_C = 11{,}2 \text{km.s}^{-1}$

Dans ce cas limite où $v = v_{\text{lib}}$, $E_m = 0$. La trajectoire est parabolique, et $v_\infty = 0$.

Si $v > v_{\text{lib}}$, $E_m = \frac{1}{2} m \cdot v_\infty^2 - \frac{GM_T m}{\infty} = \frac{1}{2} m \cdot v_\infty^2$

Application : Trou noir

Définition classique : un corps est un trou noir lorsque $v_{\text{lib}} \geq c$ (« même la lumière ne peut s'en échapper »). Ainsi, $\sqrt{2\frac{GM}{R}} \geq c$, soit $R \leq \frac{2GM}{c^2}$

Application numérique : Si $M = M_T = 6.10^{24}$ kg, Alors $R = 9\text{mm}$

(Pour le soleil : $M_{\text{soleil}} = 2.10^{30}$ kg, $R = 3\text{km}$ ($R_S = 700000\text{km}$))