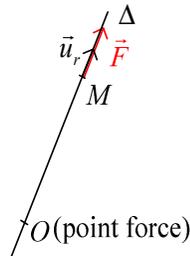


# Chapitre 7 : Mouvements à force centrale

## I Définition – interaction newtonienne

### A) Force centrale

On dit que  $M$  est soumis à une force centrale  $\vec{F}$  lorsqu'il existe un point  $O$  fixe dans  $(R)$  galiléen tel que, à chaque instant,  $\vec{F} // \overrightarrow{OM}$  et  $\|\vec{F}\|$  ne dépend que de  $r = OM$ .

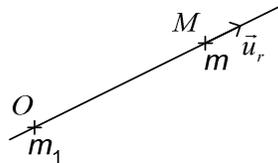


$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \text{ (1}^{\text{er}} \text{ vecteur des coordonnées cylindriques)}$$

$$\vec{F} = F(r,t) \cdot \vec{u}_r$$

### B) Interaction newtonienne

#### 1) Interaction gravitationnelle



$$\text{Loi de Newton : } \vec{F}_{O \rightarrow M} = -G \frac{m_1 m}{OM^2} \vec{u}_r$$

$$G : \text{constante de la gravitation } [G] = [\vec{F}] \frac{[OM]^2}{[m_1 m]} = \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$$

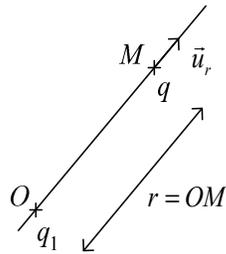
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$$

Si  $O$  est fixe dans un référentiel galiléen :

$$F(M) = -G \frac{m_1 m}{OM^2} = \frac{-G m_1 m}{r^2}$$

La force gravitationnelle est une force centrale (exemple : soleil – planète, planète – satellite)

## 2) Interaction coulombienne



Force de Coulomb :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{dans le vide})$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité électrique du vide

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} = 9 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \text{A}^2 \text{s}^{-4}$$

$\vec{F}_{\text{coulomb}}$  est une force centrale si  $O$  est fixe dans  $(R)$  galiléen (exemple : proton – électron)

## 3) Interaction newtonienne

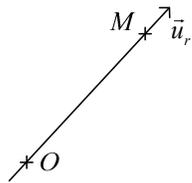
C'est une force s'exprimant sous la forme  $\vec{F}_{O \rightarrow M} = \frac{-k}{r^2} \vec{u}_r$  ( $r = OM$ )

La force est attractive si  $k > 0$ , répulsive si  $k < 0$ .

L'interaction newtonienne est un exemple de force centrale

## C) Energie potentielle

On considère une force centrale  $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$



Pour un déplacement infinitésimal :

$$* \overrightarrow{dOM} = d(r \cdot \vec{u}_r) = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\vec{u}_r$$

$$\vec{u}_r \text{ unitaire} \Rightarrow \vec{u}_r^2 = 1$$

$$\Rightarrow d(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) = 0$$

$$\Rightarrow 2\vec{u}_r \cdot d(\vec{u}_r) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r \perp d(\vec{u}_r)$$

$$* \delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM} = F(r)\vec{u}_r \cdot (dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\vec{u}_r) = F(r)dr$$

On définit  $U$  par  $\frac{dU}{dr} = -F(r)$  (à une constante additive près)

$\delta W(\vec{F}) = F(r)dr = -dU$ . Donc  $U$  est l'énergie potentielle dont dérive  $\vec{F}$ .

La force  $\vec{F}$  est donc conservative.

Exemple : interaction newtonienne

$$\vec{F} = \frac{-k}{r^2} \vec{u}_r$$

$U$  est définie par  $\frac{dU}{dr} = -\left(-\frac{k}{r^2}\right) = \frac{k}{r^2}$  donc  $U(r) = \frac{-k}{r} + \text{cte} = \frac{-k}{r}$

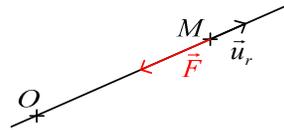
Dans le cas gravitationnel,  $U(r) = \frac{-Gm_1m}{r}$

Dans le cas coulombien,  $U(r) = \frac{q_1q}{4\pi\epsilon_0 r}$

## II Lois générales des mouvements à force centrale

### A) Conservation du moment cinétique

#### 1) Intégrale première du moment cinétique



On suppose  $O$  fixe :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)}$$

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à  $M$  en  $O$  fixe dans  $(R)$  galiléen, on a :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{(R)} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

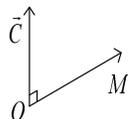
Donc  $\vec{\sigma}_O$  est indépendant du temps

$$\vec{\sigma}_O = m\vec{C} \text{ avec } \vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/(R)}, \left(\frac{C}{2} \text{ est la vitesse aréolaire}\right)$$

$\vec{\sigma}_O$  et  $\vec{C}$  sont donc indépendants du temps

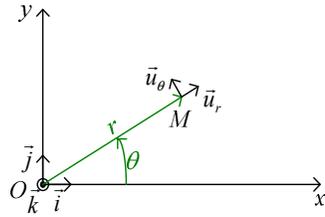
#### 2) Mouvement plan

$$\overrightarrow{OM}(t) \perp \vec{\sigma}_O \text{ ou } \vec{C}$$



Donc  $M$  décrit un mouvement plan : il appartient au plan contenant  $O$  de normale  $\vec{C}$  (à tout instant)

Dans le plan de la trajectoire de  $M$  :



$$(\vec{k} \parallel \vec{\sigma}_0)$$

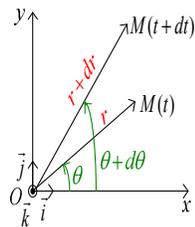
$(\vec{u}_k, \vec{u}_\theta, \vec{k})$  forme une base cylindrique

$$\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)} \begin{vmatrix} m \times \dot{r} \\ m \times r \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m \times r^2 \dot{\theta} \end{vmatrix}$$

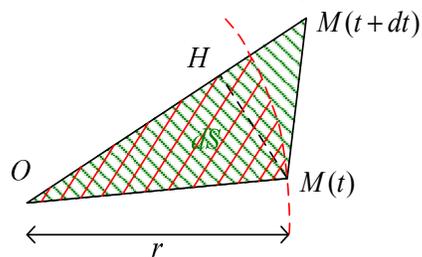
$$\text{Donc } \vec{\sigma}_0 = m \times r^2 \dot{\theta} \cdot \vec{k} \text{ ou } \vec{C} = r^2 \dot{\theta} \cdot \vec{k}$$

$$\text{Donc } r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$$

### 3) Loi des aires



On note  $dS$  l'aire balayée par le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  entre  $t$  et  $t + dt$



$$dS = dS + o(r.d\theta) \approx dS$$

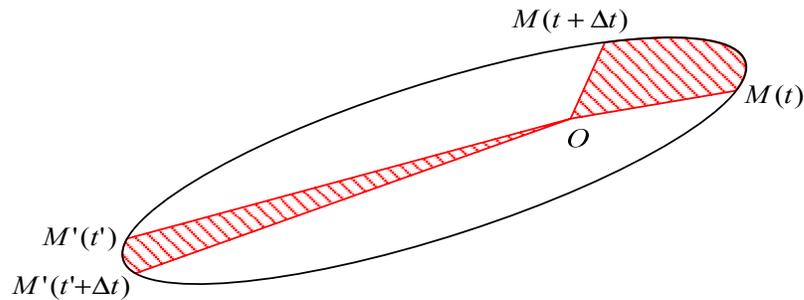
$$dS = \pi \times r^2 \times \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\text{ou } dS \approx \frac{1}{2} OM \times MH = \frac{1}{2} r \times \underbrace{\text{arc}}_{=rd\theta}$$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} C dt$$

Donc  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C$  (rappel :  $\frac{C}{2}$ , soit  $\frac{dS}{dt}$  est la vitesse aréolaire)

Le rayon vecteur balaye des aires égales pendant des temps égaux.

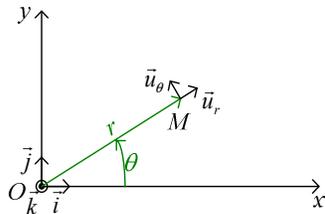


$$\Delta S_{t \rightarrow t+\Delta t} = \Delta S_{t' \rightarrow t'+\Delta t}$$

$$S = \int dS = \frac{1}{2} C \times T \quad (T \text{ est la période})$$

## B) Formules de Binet

On considère un mouvement à force centrale. Dans le plan de la trajectoire :



$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{v}_{M/(R)} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

$$\text{On pose } u = \frac{1}{r}. \text{ Donc } \frac{du}{d\theta} = \frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta} \times \frac{dt}{d\theta} = \frac{-\dot{r}}{r^2} \times \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \times \frac{dr}{d\theta}$$

$$\text{Donc } \dot{r} = -r^2 \frac{du}{d\theta} \times \frac{C}{r^2} = -C \frac{du}{d\theta} \quad \text{Et } r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = Cu$$

$$\text{Donc } \vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \cdot \vec{u}_r + Cu \cdot \vec{u}_\theta \quad \text{Ou } v^2 = C^2 \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + C^2 u^2 = C^2 \left( \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + u^2 \right)$$

1<sup>ère</sup> formule de Binet, ou formule de Binet relative au module de la vitesse. On peut ainsi accéder à  $v^2$  directement en connaissant la trajectoire.

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/(R)} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \\ &= \frac{\vec{F}}{m} \end{aligned}$$

Comme  $\vec{F}$  est une force centrale, sa composante selon  $\vec{u}_\theta$  est nulle

$$\text{Donc } 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

$$\text{Donc } \vec{a}_{M/(R)} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \dot{\theta} \times \frac{d}{d\theta} \left( -C \frac{du}{d\theta} \right) = -C \dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{r^4 \dot{\theta}^2}{r^3} = C^2 u^3$$

$$\text{Donc } \vec{a}_{M/(R)} = \left( -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - C^2 u^3 \right) \cdot \vec{u}_r$$

$$\text{Ou } \vec{a}_{M/(R)} = -C^2 u^2 \left( u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) \cdot \vec{u}_r$$

2<sup>ème</sup> formule de Binet (ou formule de Binet relative à l'accélération)

### C) Conservation de l'énergie mécanique

$$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r \text{ dérive d'une énergie potentielle } U \text{ définie par } \frac{dU}{dr} = -F(r)$$

$$\text{Donc } E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \text{ est une constante du mouvement}$$

$$(E_{\text{méca}} = E_{\text{méca}_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(r_0))$$

## III Energie potentielle effective (ou efficace)

### A) Définition

$$E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

$$\vec{v}_{M/(R)} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \left( \frac{C}{r^2} \right)^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

$$\text{Donc } E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left( \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} + U(r) \right)}_{U_{\text{eff}}(r)} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \rightarrow \text{un seul paramètre } r.$$

## B) Mouvements liés et mouvements de diffusion

Une fois connues les conditions initiales, on a :

$$C = r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta}_0$$

$$E_{\text{méca}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E_{\text{méca}}(0)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E_{\text{méca}} - U_{\text{eff}}(r) \geq 0$$

$$\text{Donc } U_{\text{eff}}(r) \leq E_{\text{méca}}$$

Il y a donc des contraintes sur le mouvement de  $M$

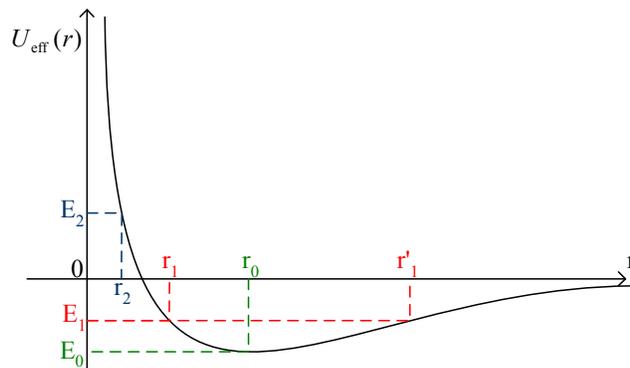
Cas particulier :

On suppose la force centrale newtonienne  $F(r) = -\frac{k}{r^2}$ . Donc  $U(r) = -\frac{k}{r}$

$$\text{Donc } U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r} - \frac{k}{r}$$

- si  $k > 0$  (attractif)

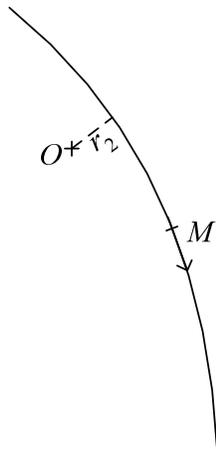
$$\lim_{r \rightarrow 0} U_{\text{eff}}(r) = +\infty ; \lim_{r \rightarrow +\infty} U_{\text{eff}}(r) = 0^-$$



1<sup>er</sup> cas :  $E_{\text{méca}} = E_2 > 0$

$$U_{\text{eff}}(r) \leq E_2 \Leftrightarrow r \geq r_2$$

On a donc un mouvement de diffusion :  $M$  peut s'éloigner à l'infini du point force.

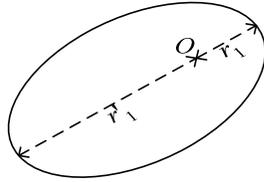


Exemple : certaines comètes ou sondes Voyager

2<sup>ème</sup> cas :  $E_{\text{méca}} = E_1 \in ]E_0; 0[$

$U_{\text{eff}}(r) \leq E_1 \Leftrightarrow r_1 \leq r \leq r'_1$

On a donc un mouvement borné (ou lié)



Exemple : planètes autour du soleil,  
mouvement de l'électron autour du proton

3<sup>ème</sup> cas :  $E_{\text{méca}} = E_0$

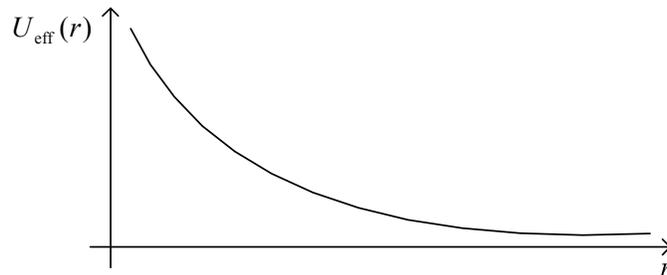
$U_{\text{eff}}(r) \leq E_0 \Leftrightarrow r = r_0$

On a donc un mouvement circulaire et  $C = r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte} = \dot{\theta}_0$

Le mouvement est donc circulaire uniforme.

- Si  $k < 0$  (répulsif)

$U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r} - \frac{k}{r} > 0$



Donc  $E_{\text{méca}} > 0$  et on a un mouvement de diffusion quelle que soit cette énergie mécanique.

