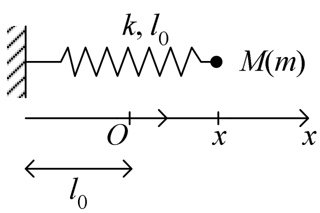
Chapitre 5 : Oscillateur mécanique en régime forcé

I Equation différentielle du mouvement de l’oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

A) Mise en équation



x est l’élongation du ressort $= l - l_0$

Bilan des forces sur M :

- Tension du ressort $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{i} = -kx\vec{i}$
- Frottement visqueux $\vec{F}_v = -\mu \times \vec{v}_{/(R_{\text{lab}})} = -\mu \times \dot{x}\vec{i}$ (O fixe dans (R_{lab}))
- Force excitatrice sinusoïdale $\vec{F}_e = F_e \cos(\Omega t) \times \vec{i}$

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans (R_{lab}) galiléen :

$m\vec{a}_{M/\text{R lab}} = \vec{T} + \vec{F}_v + \vec{F}_e$

$\Leftrightarrow m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_e \cos(\Omega t)$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \dfrac{\mu}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{F_e}{m}\cos(\Omega t)$

On pose $\begin{cases} 2\lambda = \dfrac{\mu}{m} \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \dfrac{\omega_0}{\text{Q}} = 2\lambda = \dfrac{\mu}{m} \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases}$

Ainsi, $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_e}{m}\cos(\Omega t)$

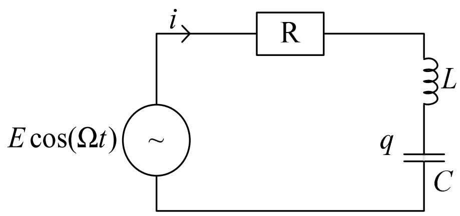
Rappel :

λ est le coefficient d’amortissement $[\lambda] = \text{s}^{-1}$

ω_0 est la pulsation propre $[\omega_0] = \text{rad.s}^{-1}$

Q est le facteur de qualité $[Q] = 1$

B) Analogie électrocinétique



Équation de maille :

$$E\cos(\Omega t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{donc } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}\cos(\Omega t)$$

Electrocinétique	q	i	L	$1/C$	R	E
Mécanique	x	v	m	k	μ	F_e

C) Solution de l'OHA excité par une force sinusoïdale

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_e}{m}\cos(\Omega t)$$

Solution générale $x(t)$ = SGH + SP

Equation homogène = équation différentielle d'un OHA

- Solution générale homogène :

$$\begin{cases} Q > \frac{1}{2} : \text{régime pseudo-périodique} \\ Q = \frac{1}{2} : \text{régime critique} \\ Q < \frac{1}{2} : \text{régime apériodique} \end{cases}$$

→ Solution exponentiellement décroissante, $T_\chi = 1/\lambda$ (régime transitoire)

- Solution particulière : on choisit l'unique solution particulière périodique à la pulsation Ω, appelée régime sinusoïdal forcé ou régime permanent sinusoïdal.

$x_{\text{RSF}} = X\cos(\Omega t + \varphi)$

$\rightarrow x(t) = x_{SGH} + x_{RSF}$

II Résonance d'élongation

A) Solution du RSF(Ω)

On cherche une solution $x(t) = X\cos(\Omega t + \varphi)$

Donc $\underline{x}(t) = Xe^{j(\Omega t+\varphi)} = Xe^{j\varphi} \times e^{j\Omega t} = \underline{X}e^{j\Omega t}$

$$x \text{ solution de l'ED} \Leftrightarrow -\Omega^2 \underline{x} + \frac{\omega_0}{Q} j\Omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_e}{m} e^{j\Omega t}$$

$$\Leftrightarrow -\Omega^2 \underline{X} + \frac{\omega_0}{Q} j\Omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F_e}{m}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{F_e}{m} \times \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j\frac{\omega_0 \Omega}{Q}} = \frac{F_e/(m\omega_0^2)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\Omega/\omega_0}{Q}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{F_e/(m\omega_0^2)}{1 - y^2 + j\frac{y}{Q}} \quad \text{avec } y = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Ainsi $x(t) = |\underline{X}| \cos(\Omega t + \operatorname{Arg}\underline{X})$

$$|\underline{X}| = X = \frac{F_e/(m\omega_0^2)}{\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}}$$

$$\operatorname{Arg}\underline{X} = -\operatorname{Arg}(1 - y^2 + j\frac{y}{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Arctan}\frac{y/Q}{1-y^2} & \text{si } y < 1 \ (y \geq 0) \\ \pi - \operatorname{Arctan}\frac{y/Q}{1-y^2} & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

B) Résonance d'élongation

Etude de $X(\Omega)$ ou $X(y)$ (analogue de l'étude de $U_C(\Omega)$, tension aux bornes du condensateur)

$$X(y) = \frac{F_e/(m\omega_0^2)}{\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}}, \quad y \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{y \to 0} X(y) = \frac{F_e}{m\omega_0^2} \qquad \lim_{y \to \infty} X(y) = 0$$

Les y tels que $X(y)$ soit un extremum sont exactement les y tels que $\underbrace{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}_{f(y)}$ soit un extremum.

On a :

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2(1-y^2)(-2y) + \frac{2y}{Q^2} \Leftrightarrow y(\frac{1}{Q^2} - 2(1-y^2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (y \geq 0)$$

- Cas $1-\dfrac{1}{2Q^2}>0 \Leftrightarrow Q>1/\sqrt{2}$

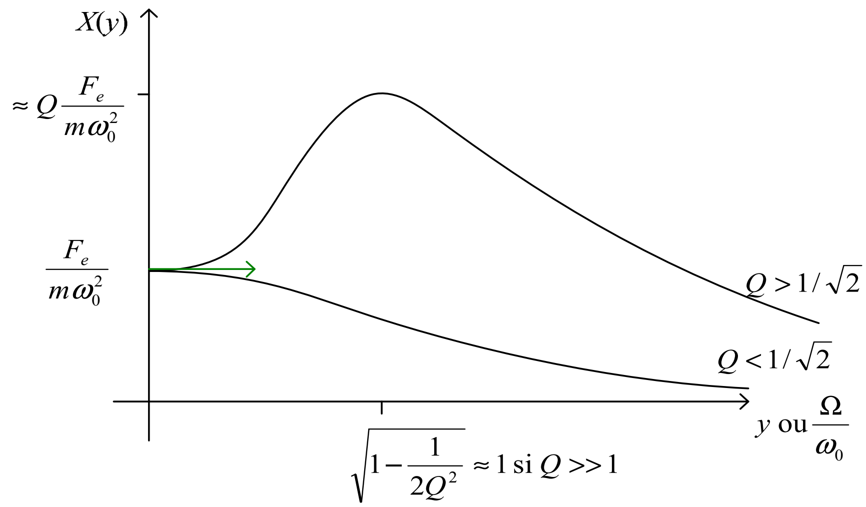
$y=0$: Minimum relatif (tracer la courbe)

$y=\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$: Maximum de $X(y)$

si $Q>>1$, $X_{\max} \approx Q\dfrac{F_e}{m\omega_0^2}$

- Cas $1-\dfrac{1}{2Q^2}<0 \Leftrightarrow Q<1/\sqrt{2}$

$y=0$: Maximum de $X(y)$



Pulsations de coupure définies par $X(\Omega)=\dfrac{X_{\max}}{\sqrt{2}}$

Si Q est assez grand : deux solutions $\Omega_- < \Omega_{\text{résonance}} = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}} < \Omega_+$

Largeur de bande passante = $\Omega_+ - \Omega_-$ et $\dfrac{\Omega_+ - \Omega_-}{\Omega_{\text{résonance}}} \approx \dfrac{1}{Q}$ si $Q>>1$

III Résonance de vitesse

A) Solution pour $v=\dot{x}$.

$x(t)=X\cos(\Omega t+\varphi)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\Omega X\sin(\Omega t+\varphi) = \Omega X\cos(\Omega t+\varphi+\pi/2)$

ou $\underline{\dot{x}} = \underline{V}e^{j\Omega t}$ où $\underline{V} = j\Omega\underline{X}$

Donc $V=\Omega X$ et $\operatorname{Arg}\underline{V} = \operatorname{Arg}\underline{X}+\pi/2$

$$V=\Omega X=\frac{F_e}{m\omega_0}\frac{y}{\sqrt{\left(1-y^2\right)^2+\frac{y^2}{Q^2}}}$$

B) Etude de $V(y)$. Résonance de vitesse

Analogue de l'étude de la résonance d'intensité du RLC série

$\lim_{y\to 0} V(y) = 0 \qquad \lim_{y\to\infty} V(y) = 0$

Si V admet un extremum en y, alors V^2 en admet un aussi en y

On pose $f(y) = V(y)^2 \dfrac{1}{\left(F_e/(m\omega_0)\right)^2} = \dfrac{y^2}{\left(1-y^2\right)^2 + \dfrac{y^2}{Q^2}}$

On a alors :

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y\left((1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}\right) - y^2\left(2(1-y^2)(-2y) + 2y/Q^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y\left((1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2} + 2(1-y^2)y^2 - \frac{y^2}{Q^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y(1-y^2)(1-y^2+2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 1$$

On a donc un maximum de $V(\Omega)$ pour $\Omega = \omega_0$ ($y = 0$ est un minimum)

Donc $V_{\max} = V(y=1) = Q\dfrac{F_e}{m\omega_0}$

Pulsations de coupure $V(\Omega) = \dfrac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{V(\Omega)^2}{\left(F_e/(m\omega_0)\right)^2} = \frac{V_{\max}^2}{2\left(F_e/(m\omega_0)\right)^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{\left(1-y^2\right)^2 + \dfrac{y^2}{Q^2}} = \frac{Q^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \ldots = Q^2(1-y^2)^2 \Leftrightarrow y = Q\left|1-y^2\right| = \varepsilon Q(1-y^2) \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

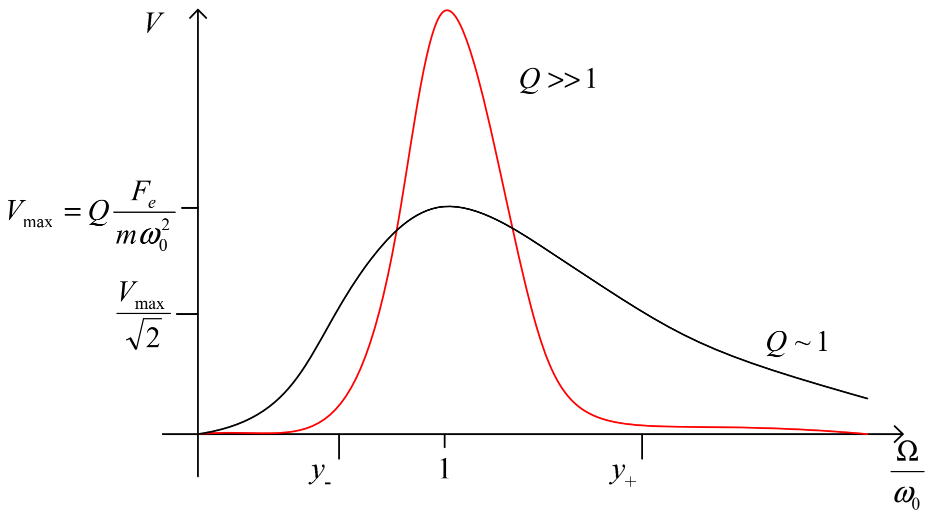
$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{\varepsilon \times y}{Q} - 1 = 0 \quad (1/\varepsilon = \varepsilon)$$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$$

Donc $y = \dfrac{\Omega}{\omega_0} = \dfrac{\dfrac{-\varepsilon}{Q} \pm \sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}}{2}$

$y \geq 0$ donc $y_- = \dfrac{\Omega_-}{\omega_0} = \dfrac{\dfrac{-1}{Q} + \sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}}{2}$ et $y_+ = \dfrac{\Omega_+}{\omega_0} = \dfrac{\dfrac{1}{Q} + \sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}}{2}$

$$\frac{\Omega_+ - \Omega_-}{\omega_0} = y_+ - y_- = \frac{1}{Q} \quad (\forall Q)$$



IV Aspect énergétique

A) Résonance de puissance

Puissance p de la force de frottement :

$$p = \vec{F}_v \cdot \vec{v} = -\mu \times \vec{v} \cdot \vec{v} = -\mu \times v^2 = -\mu \times V \times \cos^2(\Omega t + \varphi + \pi/2)$$

(< 0)

$$\underbrace{\langle P_d \rangle}_{\text{puissance dissipée}} = \langle -p \rangle = \mu \times V^2 \times \frac{1}{2} \quad \left(\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}\right)$$

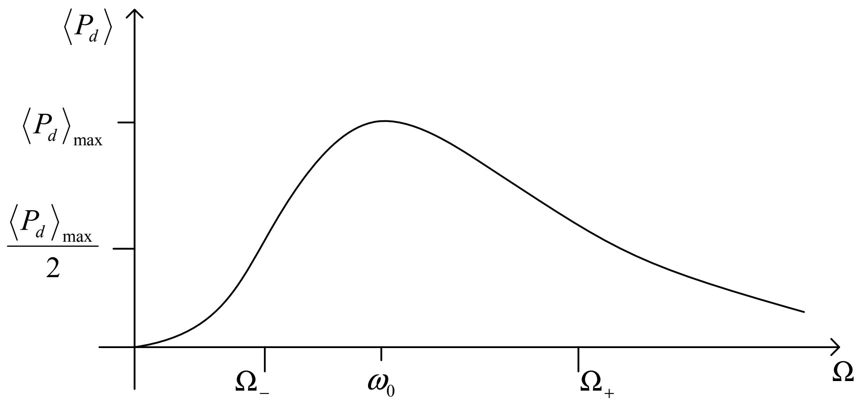
$$= \frac{1}{2}\mu \times \left(\frac{F_e}{m\omega_0}\right)^2 \frac{y^2}{(1-y^2)^2 + \frac{y^2}{Q^2}} \quad \text{avec } y = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$\langle P_d \rangle$ est maximale si V est maximale, soit $\Omega = \omega_0$ et $\langle P_d \rangle_{\max} = \frac{1}{2}\mu \times \left(\frac{F_e}{m\omega_0}\right)^2 Q^2$

$$\langle P_d \rangle = \frac{\langle P_d \rangle_{\max}}{1 + Q^2 \frac{(1-y^2)^2}{y^2}} = \frac{\langle P_d \rangle_{\max}}{1 + Q^2 (\frac{1}{y} - y)^2}$$

$$\langle P_d \rangle(\Omega = 0) = \langle P_d \rangle(\Omega = +\infty) = 0$$

$$\langle P_d \rangle(\Omega_- \text{ ou } \Omega_+) = \frac{1}{2}\langle P_d \rangle_{\max}$$



B) Bilan énergétique

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_c + \varepsilon_{\text{p,élastique}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}mX^2\Omega^2\sin^2(\Omega t+\varphi) + \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\Omega t+\varphi)$$

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \frac{1}{4}mX^2\Omega^2 + \frac{1}{4}kX^2 = \frac{1}{4}mX^2\left(\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) = \frac{1}{4}mX^2\left(\Omega^2+\omega_0^2\right)$$

Théorème de l'énergie mécanique dans (R_{lab}) galiléen appliqué à M :

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} = P_{\vec{F}_v} + P_{\vec{F}_e}$$

$$\frac{d\langle \varepsilon_m \rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\varepsilon_m}{dt} \right\rangle = \left\langle P_{\vec{F}_v} \right\rangle + \left\langle P_{\vec{F}_e} \right\rangle$$

$$\langle \varepsilon_m \rangle = cte\left(= \frac{1}{4}mX^2\left(\Omega^2+\omega_0^2\right)\right) \Rightarrow \left\langle P_{\vec{F}_e} \right\rangle = -\left\langle P_{\vec{F}_v} \right\rangle = \left\langle P_d \right\rangle$$

En régime permanent sinusoïdal la force excitatrice fournit à l'oscillateur une puissance moyenne égale à la puissance moyenne dissipée par frottement.

V Cas d'une force périodique non sinusoïdale

On considère $Fe(t)$ périodique, de période $\dfrac{2\pi}{\Omega}$

Théorème de Fourier : $F_e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{e,n} \times \cos(n\Omega t + \Psi_n)$

Equation différentielle : $\ddot{x} + \dfrac{\mu}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{F_e(t)}{m}$

Linéarité de l'équation différentielle : $F_{e,n} = RSF(n\Omega) \Rightarrow x_n(t) = X_n\cos(n\Omega t + \varphi_n + \Psi_n)$

Donc, pour $Fe(t)$, $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(t)$