

Chapitre 3 : Aspect énergétique de la mécanique du point

I Travail d'une force. Théorème de l'énergie cinétique

A) Puissance – travail élémentaire

On considère un référentiel (R) et un point matériel, soumis à une force \vec{F} , qui se déplace de M à M' infiniment voisins. Travail de \vec{F} sur ce déplacement :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MM'} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (3.1)$$

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{v}_{M/(R)} \times dt \quad (3.2)$$

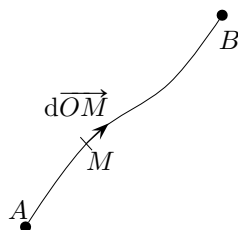
Donc $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/(R)} \times dt$

Puissance (instantanée) de \vec{F} :

$$P(\vec{F}) = \frac{\delta W(\vec{F})}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/(R)} \quad (3.3)$$

$$[\delta W] = J \qquad [P] = W \quad (3.4)$$

B) Travail d'une force



M se déplace de A vers B , soumis à une force \vec{F} dépendant éventuellement de la position et du temps.

$$W_{AB} = \sum_{\substack{M \text{ allant de} \\ A \text{ à } B}} \delta W(\vec{F}) = \int_{AB} \delta W(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (3.5)$$

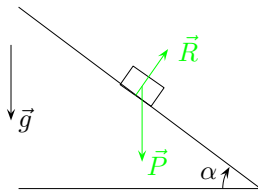
Travail de \vec{F} pour un déplacement de A à B

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/(R)} \times dt = P(\vec{F}) dt \quad (3.6)$$

Donc $W_{AB}(\vec{F}) = \int_{AB} P(\vec{F}) dt = \int_{t_A}^{t_B} P(\vec{F}) dt$

C) Exemples

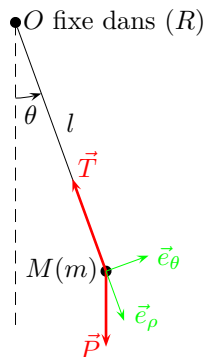
1) Forces perpendiculaires au déplacement



Travail élémentaire de \vec{R} :

$$\delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v}_{M/(R)} \times dt = 0 \quad \text{car } \vec{R} \perp \vec{v}_{M/(R)} \quad (3.7)$$

Donc $W_{\overline{AB}}(\vec{R}) = \int_{\overline{AB}} \delta W(\vec{R}) = 0$



$$\delta W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\overline{OM} = \vec{T} \cdot l \times d\theta \vec{e}_\theta = 0 \quad \text{car } \vec{e}_\theta \perp \vec{T} \quad (3.8)$$

D) Force constante

On considère une force \vec{F} indépendante de la position et du temps
(exemple : le poids à petite échelle)

$$W_{\overline{AB}}(\vec{F}) = \int_{\overline{AB}} \vec{F} \cdot d\overline{OM} = \vec{F} \cdot \int_{\overline{AB}} d\overline{OM} = \vec{F} \cdot [\overline{OM}]_A^B = \vec{F} \cdot \overline{AB} \quad (3.9)$$

E) Force de frottement fluide proportionnelle à ω

$$\vec{F} = -\lambda \vec{v}_{M/(R)} \quad (3.10)$$

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\overline{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/(R)} dt = -\lambda \|\vec{v}_{M/(R)}\|^2 dt = -\lambda v^2 dt \quad (3.11)$$

Supposons que M se déplace à module de vitesse constante :

$$\|\vec{v}_{M/(R)}\| = v_0 \quad (3.12)$$

$$L = \overline{AB} = \text{Longueur de } \overline{AB} \quad (3.13)$$

$$t_B - t_A = \frac{\overline{AB}}{v_0} = \frac{L}{v_0} \quad (3.14)$$

$$W_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} -\lambda v_0^2 dt = -\lambda v_0^2 (t_B - t_A) = -\lambda v_0 L \quad (3.15)$$

Donc le travail de \vec{F} dépend du chemin suivi et de la vitesse.

Remarque \vec{F} n'est constante que si M se déplace à vecteur vitesse constant, et ainsi $W_{\overline{AB}}(\vec{F})$ vérifie aussi $W_{\overline{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{AB}$

1) Énergie cinétique

a) Définition

Dans un référentiel (R) , on considère un point matériel M de masse m , de vitesse $\vec{v}_{M/(R)}$. Alors $E_C = \frac{1}{2}mv_{M/(R)}^2 = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/(R)}\|^2$

b) Théorème de l'énergie cinétique

On considère un référentiel (R) galiléen, un point matériel M de masse m soumis à une résultante des forces \vec{F} .

On a :

$$\frac{dE_{C/(R)}}{dt} = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\vec{v}_{M/(R)}}{dt} \cdot \vec{v}_{M/(R)} + \vec{v}_{M/(R)} \cdot \frac{d\vec{v}_{M/(R)}}{dt} \right) = m\vec{a}_{M/(R)} \cdot \vec{v}_{M/(R)} \quad (3.16)$$

(R) est galiléen.

Donc, d'après la relation fondamentale de la dynamique, $\vec{F} = m\vec{a}_{M/(R)}$

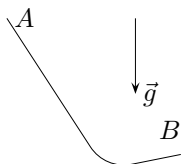
$$\text{Donc } \frac{dE_{C/(R)}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/(R)} \iff \frac{dE_{C/(R)}}{dt} = P(\vec{F})$$

$$\text{Ou } dE_{C/(R)} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/(R)} dt = \vec{F} \cdot d\overline{OM} \text{ soit } dE_{C/(R)} = \delta W(\vec{F})$$

$$\text{Forme intégrale } E_C(B) - E_C(A) = \delta W_{\overline{AB}}(\vec{F}), \text{ ou } \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \delta W_{\overline{AB}}(\vec{F})$$

2) Application du théorème de l'énergie cinétique

a) Saut à ski



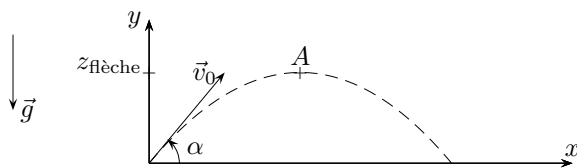
Un skieur part de A avec une vitesse nulle. Avec quelle vitesse décolle-t-il en B ? (On néglige les frottements)

$$E_{C_B} - E_{C_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{\overline{AB}}(\vec{R} + \vec{P}) = W_{\overline{AB}}(\vec{P}) \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \quad (\text{avec } h = z_A - z_B) \quad (3.18)$$

Donc $v_B = \sqrt{2gh}$

b) Tir balistique



$\dot{x} = v_0 \cos \alpha$ indépendante du temps.

D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à M entre O et A :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_O^2 = W_{\overline{OA}}(\vec{P}) = -mg(z_A - z_0) = -mgz_{\text{flèche}} \quad (3.19)$$

Et $v_A = v_0 \cos \alpha$ car $\vec{v}_A // Ox$

Donc $\frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2 \alpha - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgz_{\text{flèche}}$

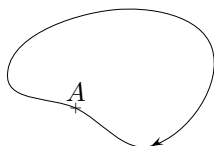
Soit $z_{\text{flèche}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

II Énergie potentielle

A) Force conservative

\vec{F} est dite conservative lorsque, pour tous points A et B de l'espace, $W_{\overline{AB}}(\vec{F})$ ne dépend que de A et B et non pas de \overline{AB} , soit $W_{\overline{AB}}(\vec{F}) = f(A, B)$

Cas particulier



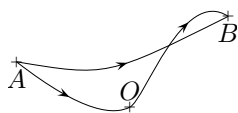
Pour une boucle fermée, $W_{\overline{AA}}(\vec{F}) = 0$

Exemple le poids, une force constante.

Contre-exemple frottement (pour une boucle, $\vec{v} \neq \text{cte}$, et sinon dépend du chemin)

B) Énergie potentielle

On considère une force \vec{F} conservative, et O fixe dans (R) .



\vec{F} est conservative.

Donc $W_{\overline{AB}}(\vec{F}) = W_{\overline{AO}}(\vec{F}) + W_{\overline{OB}}(\vec{F}) = W_{\overline{AO}}(\vec{F}) - W_{\overline{BO}}(\vec{F}) = f(A, O) - f(B, O)$

On définit la fonction $E_P: M \mapsto E_P(M) = f(M, O)$

Ainsi, $W_{\overline{AB}}(\vec{F}) = f(A, O) - f(B, O) = E_P(A) - E_P(B)$

E_P est l'énergie potentielle de M dans le champ de force \vec{F} .

(On dit que \vec{F} dérive de l'énergie potentielle E_P)

Soit E'_P une autre fonction énergie potentielle. Soit A un point de l'espace.

Pour tout M de l'espace, on a : $W_{\overline{AM}}(\vec{F}) = E_P(A) - E_P(M) = E'_P(A) - E'_P(M)$

Donc $E'_P(M) = E_P(M) + (\underbrace{E'_P(A) - E_P(A)}_{\text{cte indépendante de } M})$

Donc $E'_P = E_P + \text{cte}$

Définition différentielle Pour un déplacement infinitésimal de M à M' , on a :

$$\begin{aligned} \delta W_{\overline{MM'}}(\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \overline{MM'} = \vec{F} \cdot d\overline{OM} \\ &= E_P(M) - E_P(M') = -dE_P(M) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donc l'énergie potentielle est la fonction telle que $\delta W(\vec{F}) = -dE_P(M)$

Méthode On calcule δW . Si on peut écrire δW sous la forme $\delta W = -dE_P$, alors \vec{F} est conservative et $E_P(+\text{cte})$ est une énergie potentielle.

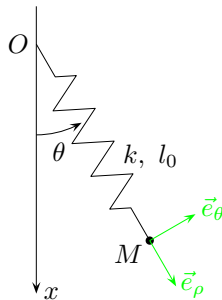
C) Exemples

1) Énergie potentielle de pesanteur E_{pp}

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\overline{OM} = -mg\vec{k} \cdot (dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}) = -mg dz = -d(mgz) \quad (3.21)$$

Donc $E_{pp} = mgz + \text{cte}$

2) Énergie potentielle élastique



On note $r = OM$

M se déplace dans le plan.

\vec{T} : tension du ressort

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{e}_\rho = -k(r - l_0)\vec{e}_\rho \quad (3.22)$$

$$\delta W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\overline{OM} = \vec{T} \cdot (dr\vec{e}_\rho + r d\theta\vec{e}_\theta) = -k(r - l_0) dr = -d\left(\frac{1}{2}k(r - l_0)^2\right) \quad (3.23)$$

Donc $E_{pe} = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 + \text{cte} = \frac{1}{2}kX^2 + \text{cte}$

III Énergie mécanique

A) Définition

M est soumis dans (R) galiléen à \vec{F}_i forces conservatives d'énergies potentielles E_{pi} et \vec{F}_j forces non conservatives.

On pose $E_m = E_C + \sum_i E_{pi}$

B) Théorème de l'énergie mécanique

D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à M dans (R) galiléen, on a :

$$\begin{aligned} dE_C &= \sum_i \underbrace{\delta W(\vec{F}_i)}_{= -dE_{pi}} + \sum_j \delta W(\vec{F}_j) \\ \iff dE_C + \sum_i dE_{pi} &= \sum_j \delta W(\vec{F}_j) \\ \iff d(E_C + \sum_i E_{pi}) &= \sum_j \delta W(\vec{F}_j) \\ \iff dE_m &= \sum_j \delta W(\vec{F}_j) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ou $\frac{dE_m}{dt} = \sum_j P(\vec{F}_j)$

En intégrant la première relation, on obtient :

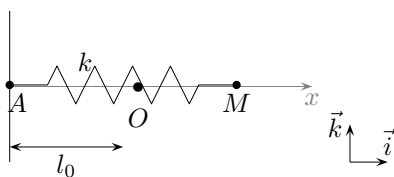
$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum_j W_{AB}(\vec{F}_j) \tag{3.25}$$

Cas particulier un système est dit conservatif lorsque $E_m = \text{cte}$

C) Intégrale première du mouvement

L'intégrale première du mouvement, c'est l'équation différentielle du premier ordre obtenue par application du théorème de l'énergie mécanique pour un système conservatif.

1) Ressort horizontal



$$x = \overline{OM} = l - l_0 \qquad \overline{OM} = xi \tag{3.26}$$

Bilan des forces

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k} \quad (3.27)$$

$$\vec{R} = R_z\vec{k} \quad (\text{pas de frottements}) \quad (3.28)$$

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{i} = -kx\vec{i} \quad (3.29)$$

On a :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgz + \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.30)$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique,

$$dE_m = \delta W(\vec{R}) = 0 \quad (3.31)$$

Donc $E_m = \text{cte} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgz + \frac{1}{2}kx^2$

L'altitude z ne change pas.

Donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$ (intégrale première du mouvement)

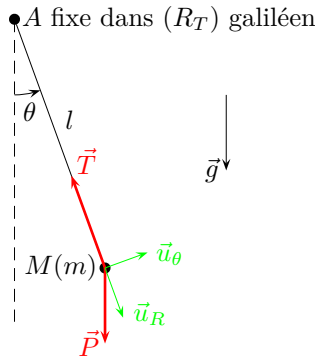
On a donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \iff \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2\dot{x}x) = 0 \iff m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0 \quad (3.32)$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{cas } \dot{x} = 0 \text{ sans intérêt})$$

2) Pendule simple



$$\overline{AM} = l\vec{u}_R \quad \vec{P} = m\vec{g} \quad \vec{v}_{M/(R_T)} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \vec{T} // \overline{AM} \quad \vec{T} = T_R\vec{u}_R \quad (3.33)$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{M/(R_T)}^2 + E_{pp} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgz \quad (3.34)$$

On a $z = \overline{AH} = -l \cos \theta$

Donc $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$

D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{T}) = 0 \quad (\text{car } \vec{T} \perp \vec{v}) \quad (3.35)$$

Donc $ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta = 0 \iff l^2\ddot{\theta} + gl \sin \theta = 0$ (cas $\dot{\theta} = 0$ sans intérêt)

IV Utilisation de l'énergie potentielle pour l'étude du mouvement

Dans cette partie, on ne considère que des systèmes conservatifs

A) Applications

- M a un mouvement rectiligne uniforme sur un axe (Ox , résultante des forces $\vec{F} = F(x)\vec{i}$)

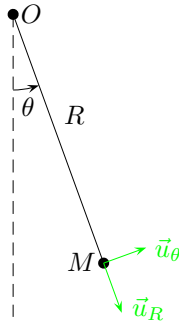
On a :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = (F(x)\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = F(x) dx \quad (3.36)$$

et $\delta W(\vec{F}) = -dE_P$

Donc $F(x) = -\frac{dE_P}{dx}$

- M décrit un mouvement circulaire de centre O , de rayon R , repéré par un angle θ .



$$\vec{F} = F_R(\theta)\vec{u}_R + F_\theta(\theta)\vec{u}_\theta \quad (3.37)$$

$$\vec{OM} = R\vec{u}_R \quad (3.38)$$

$$d\vec{OM} = R d\theta \vec{u}_\theta \quad (3.39)$$

On a :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = F_\theta(\theta)R d\theta \quad (3.40)$$

et

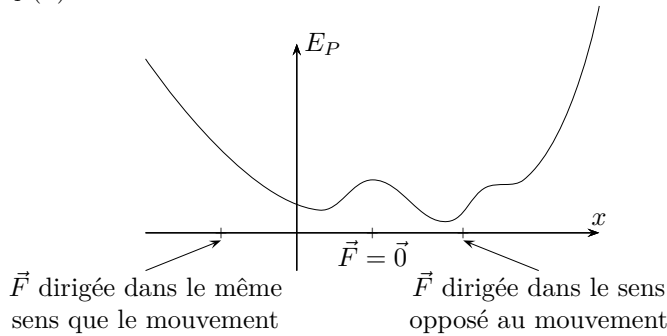
$$\delta W(\vec{F}) = -dE_P \quad (3.41)$$

Donc

$$F_\theta(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{dE_P}{d\theta} \quad (3.42)$$

B) Diagramme d'énergie potentielle

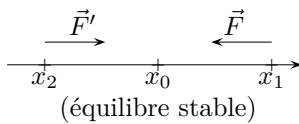
Graphes de $E_P(x)$



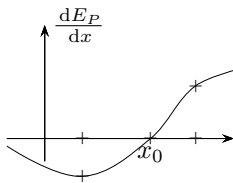
C) Position d'équilibre et stabilité

M est à l'équilibre dans (R) galiléen $\iff F(x) = 0 \iff \frac{dE_P}{dx} = 0 \iff$ la courbe de E_P présente une tangente horizontale en cette position d'équilibre.

Stabilité d'une position d'équilibre x_0



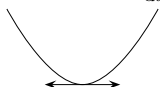
- Si $x_1 > x_0$, $F(x) > 0$, c'est à dire $\frac{dE_P}{dx} > 0$
- Si $x_2 < x_0$, $F(x) < 0$, c'est à dire $\frac{dE_P}{dx} < 0$



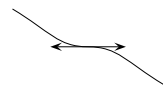
$\frac{dE_P}{dx}$ est croissante si, et seulement si $\frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$

Donc :

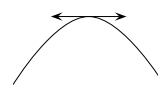
- Lorsque $\frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$, l'équilibre est stable.
- Lorsque $\frac{d^2E_P}{dx^2} < 0$, l'équilibre est instable.
- Lorsque $\frac{d^2E_P}{dx^2} = 0$, on ne peut pas conclure.



Stable



Instable



Instable

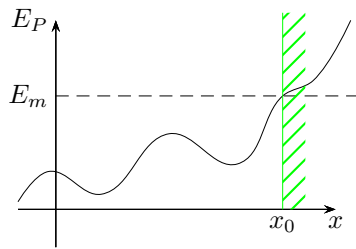


Indifférent

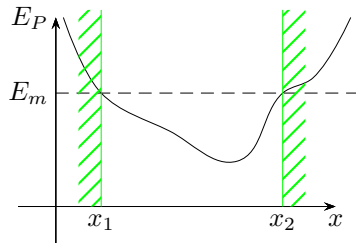
D) Étude qualitative du mouvement

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(x) \iff \frac{1}{2}mv^2 = E_m - E_P(x) \geq 0 \quad (3.43)$$

Donc $E_m \geq E_P(x)$



Donc $x \leq x_0$; x_0 correspond à une barrière de potentiel que x ne peut pas dépasser



$$E_P(x) \leq E_m \iff x \in [x_1, x_2].$$

On a donc un mouvement borné : cuvette ou point de potentiel.

E) Étude de petits mouvements autour d'un équilibre stable

1) Développement de Taylor d'une fonction n fois dérivable

Soit $F: x \mapsto F(x)$ n fois dérivable, de dérivée n -ième continue en x_0 .

Développement limité de F en x_0 à l'ordre n , formule de Taylor

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + hF'(x_0) + \frac{h^2}{2}F''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \quad (3.44)$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Cas particuliers

- $n = 0$: $F(x) = F(x_0) + \varepsilon(x - x_0)$
- $n = 1$: $F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$
- $n = 2$: $F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}F''(x_0) + (x - x_0)^2\varepsilon(x - x_0)$

Exemple

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \quad (3.45)$$

2) Développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de x_0 , position d'équilibre stable

Formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de x_0

$$E_P(x) = E_P(x_0) + (x - x_0) \underbrace{\frac{dE_P}{dx}(x_0)}_{=0 \text{ car position d'équilibre}} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \underbrace{\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_0)}_{>0} + o(x) \quad (3.46)$$

Ainsi, au voisinage de x_0 :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_P(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) \quad (3.47)$$

On pose $h = x - x_0$. on a alors $\dot{h} = \dot{x}$, $\ddot{h} = \ddot{x}$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \quad (\text{système conservatif}) \\ \iff m\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) \times 2(x - x_0)\dot{x} &= 0 \\ \iff m\dot{h}\ddot{h} + \frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) \times h\dot{h} &= 0 \\ \iff \dot{h} \left(m\ddot{h} + \frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) \times h \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Donc $\ddot{h} + \underbrace{\frac{1}{m} \frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0)}_{\substack{>0 \\ =\omega^2}} \times h = 0$, $\ddot{h} + \omega^2 \times h = 0$

Donc $h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ on a donc un mouvement borné.

A et B sont déterminés par les conditions initiales :

$$h(0) = x(0) - x_0 \qquad \dot{h}(0) = \dot{x}(0) \quad (3.49)$$

Les caractéristiques du mouvement sont donc déterminées par les propriétés locales de l'énergie potentielle.

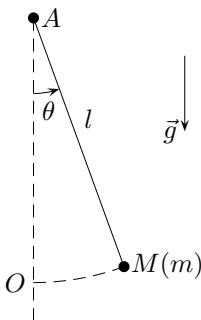
Remarque Si $\frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) < 0$ (et $\frac{dE_P}{dx}(x_0) = 0$, c'est à dire que l'équilibre est instable)

On aura $\frac{1}{m} \frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) < 0$
 $\qquad\qquad\qquad = -\lambda^2$

Donc h vérifie $\ddot{h} - \lambda^2 h = 0$

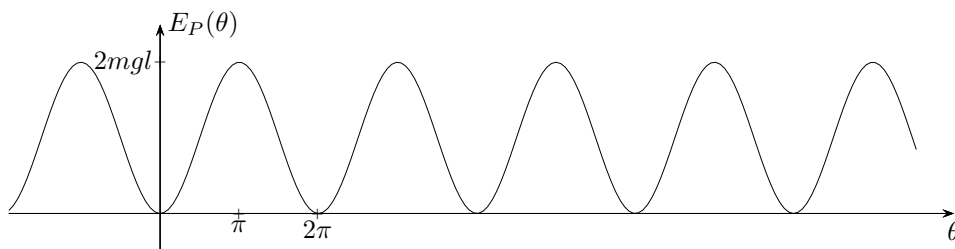
Donc $h(t) = Ae^{-\lambda t} + Be^{\lambda t}$. On a ainsi un mouvement non borné (du moins tant que l'approximation du développement limité reste valable)

F) Application : le pendule simple



$$E_P = mgz = mgl(1 - \cos \theta) = -mgl \cos \theta + mgl \quad (3.50)$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (3.51)$$



Positions d'équilibre et stabilité

$$\frac{dE_P}{d\theta} = mgl \sin \theta \tag{3.52}$$

à l'équilibre, $\frac{dE_P}{d\theta} = 0$, soit $\theta = 0 \pmod{\pi}$

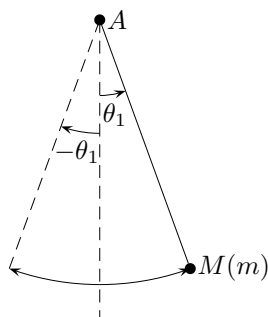
$$\frac{d^2E_P}{d\theta^2} = mgl \cos \theta \tag{3.53}$$

- Pour $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, $\frac{d^2E_P}{d\theta^2} = mgl > 0$ l'équilibre est donc stable
- Pour $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, $\frac{d^2E_P}{d\theta^2} = -mgl < 0$ l'équilibre est donc instable

Étude qualitative du mouvement Pour des conditions initiales données $\theta(0) = \theta_0 \in [-\pi; \pi]$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$,

$$E_m(t) = mgl(1 - \cos \theta_0) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 \tag{3.54}$$

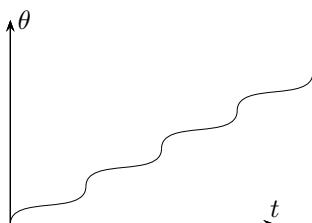
1^{er} cas $E_m \leq 2mgl$. Deux barrières de potentiel en θ_1 et $-\theta_1$. Le pendule oscille entre ces deux valeurs (mouvement oscillatoire borné)



2^{ème} cas $E_m > 2mgl$. Pas de barrière de potentiel. $\frac{1}{2}mv^2 = E_m - \underbrace{E_P(\theta)}_{\substack{\leq 2mgl \\ > 2mgl - 2mgl}}$

Donc $v > 0, \forall t$. Donc $\dot{\theta}$ garde un signe constant à tout instant.

On a alors un mouvement de type fronde :



Ici, $\dot{\theta} > 0, \theta_0 = 0$

Petits mouvements autour des positions d'équilibre stable

Le seul équilibre stable est pour $\theta_0 = 0$ (il y a une position d'équilibre en $\theta_0 = \pi$ mais instable)

Développement de $E_P(\theta)$ au voisinage de θ_0 :

$$E_P(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) \quad \frac{dE_P}{d\theta} = mgl \sin \theta \quad \frac{d^2E_P}{d\theta^2} = mgl \cos \theta \quad (3.55)$$

Donc

$$E_P(\theta) = E_P(0) + \theta \frac{dE_P}{d\theta}(0) + \frac{\theta^2}{2} \frac{d^2E_P}{d\theta^2}(0) + o(\theta^2) \quad (3.56)$$

$$E_P(0) = mgl(1 - \cos 0) = 0 \quad \frac{dE_P}{d\theta}(0) = mgl \sin 0 = 0 \quad \frac{d^2E_P}{d\theta^2}(0) = mgl \quad (3.57)$$

Donc $E_P(\theta) \approx \frac{\theta^2}{2} mgl$ (pour θ proche de 0)

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \frac{\theta^2}{2} \quad (3.58)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \iff ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \theta \dot{\theta} = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (\dot{\theta} \neq 0) \quad (3.59)$$

On a donc une solution sinusoïdale de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

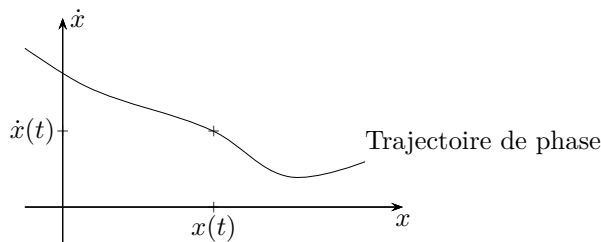
V Portrait de phase

A) Définition

On suppose M en mouvement rectiligne, d'équation horaire $x(t)$ (conditions initiales données). La trajectoire de phase est la courbe d'équation paramétrique :

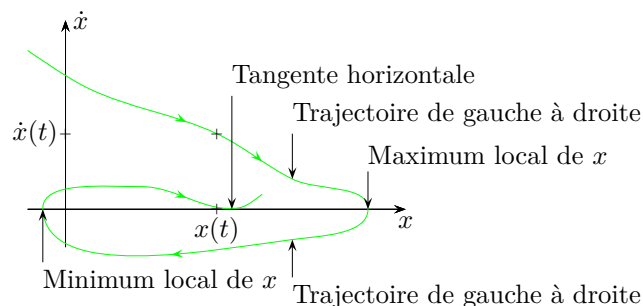
$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = \dot{x}(t) \end{cases} \quad (3.60)$$

Plan de phase :



Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires de phases pour des conditions initiales différentes.

B) Propriétés



À un instant t , si $\dot{x}(t) > 0$, x est croissante au voisinage de t

Pour $t' > t$ (si \dot{x} reste positive), $x(t') > x(t)$. Ainsi, dans le plan d'ordonnées positives, les trajectoires vont de gauche à droite. Inversement, dans le plan d'ordonnées négatives, les trajectoires vont de droite à gauche.

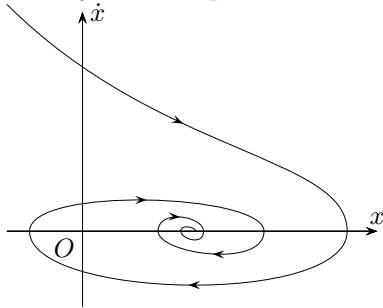
Si $\dot{x} = 0$, x admet un extremum (c'est-à-dire une tangente verticale pour la trajectoire de phase), ou une tangente horizontale.

Il n'y a pas en général d'intersections, au même instant t , entre les trajectoires de phase associées à des conditions initiales différentes : s'il y a une intersection en $M(x_1, \dot{x}_1)$, alors l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ aurait deux solutions si on prend (x_1, \dot{x}_1) comme conditions initiales, ce qui est impossible. (Mais on peut avoir une intersection si les deux trajectoires ne se coupent pas au même instant).

Si la trajectoire est fermée, cela signifie que le point matériel a un mouvement périodique.

Pour un mouvement avec frottements, (le système est alors non conservatif), l'énergie mécanique diminue.

La trajectoire de phase donne alors :



C) Application au portrait de phase d'un pendule simple

Petites oscillations autour de $\theta_0 = 0$:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

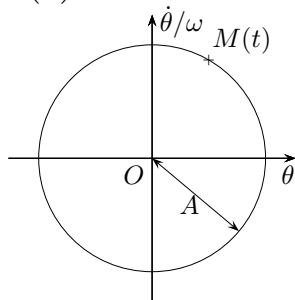
$$\text{Donc } \theta = A \cos(\omega t + \varphi), \dot{\theta} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \text{ (} A : \text{amplitude des oscillations)}$$

On a alors :

$$\theta = A \cos(-\omega t - \varphi) \tag{3.61}$$

$$\dot{\theta}/\omega = A \sin(-\omega t - \varphi) \tag{3.62}$$

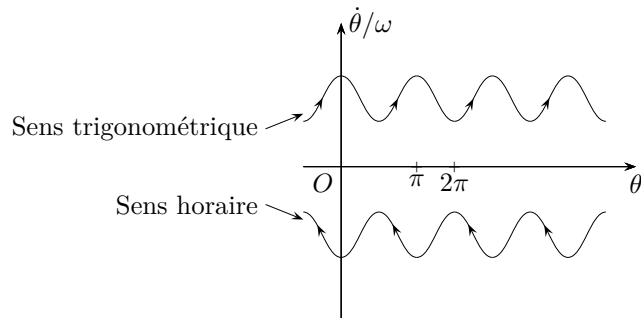
Donc $\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 + \theta^2 = A^2$; la trajectoire est un cercle de rayon A :



En faisant varier A , on obtient un autre cercle de centre O .

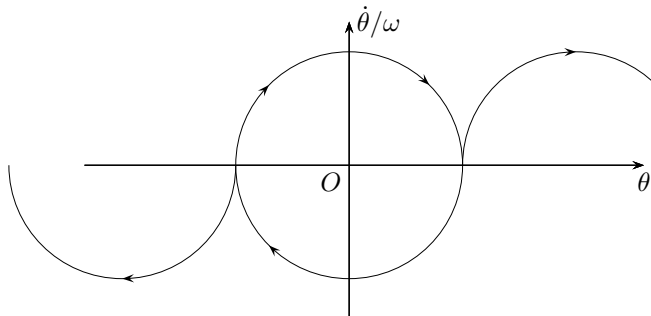
En faisant varier φ , on obtient le même cercle décalé dans le temps.

Si $E_m > 2mgl$: on a un mouvement de type fronde, $\dot{\theta}$ garde un signe constant :

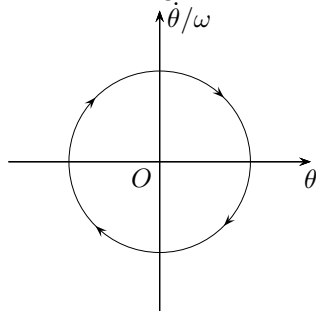


(Les courbes ne sont pas forcément exactement sinusoïdales)

Cas particulier $E_m = 2mgl$. E_c s'annule donc pour $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ (ensuite, soit le pendule continue, soit il fait demi-tour)



Cas $E_m < 2mgl$: on a un mouvement circulaire borné :



Les trois graphiques regroupés forment le portrait de phase :

