Chapitre 2 : Dynamique du point

I Interactions

A) Les quatre interactions fondamentales

1) Interaction nucléaire forte

Interaction permettant la cohésion du noyau atomique

Portée : 10^{-15} m

Énergie de l'ordre du MeV → Fission et fusion.

2) Interaction nucléaire faible

$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \underset{\text{neutrino}}{v}$ Désintégration β du neutron

Portée : 10^{-18} m

Énergie de l'ordre de l'eV

3) Interaction électromagnétique

Interaction entre particules chargées. Cette interaction est attractive lorsque les charges sont opposées, répulsive sinon.

L'intensité décroît en $\frac{1}{r^2}$; elle a donc une portée infinie

Énergie de l'ordre de l'eV

Explique la formation des atomes (noyau et cortège électronique), les liaisons chimiques, les différents états de la matière.

4) Interaction gravitationnelle

Interaction entre particules qui ont une masse. Toujours attractive.

Portée infinie (intensité proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$)

Pour un atome d'hydrogène :

$$\frac{F_{\text{grav}}}{F_{\text{élec}}} = \frac{G\frac{m_p m_{e^-}}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}} = \frac{G m_p m_{e^-}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}e^2} \sim \frac{10^{-10}10^{-30}10^{-30}}{10^{10}10^{-30}} = 10^{-39} \tag{2.1}$$

La force gravitationnelle domine à grande échelle (la matière est globalement neutre, donc l'interaction électromagnétique est faible). Cette interaction explique la pesanteur, la cohésion des (grosses) planètes, les mouvements dans le système solaire, la dynamique des galaxies et de l'univers.

B) Les théories

		Théories classiques	Relativité et mécanique quantique	
Gluons	Interaction nucléaire forte		Chromodynamique quantique (quarks, « reliés » par des gluons)	Modèle standard de la physique des particules
Bosons	Interaction nucléaire faible		Interaction électrofaible → électrodynamique quantique	
Photons	Interaction électromagnétique	Maxwell XIX$^{\text{e}}$		
Gravitons	Interaction gravitationnelle	Newton XVII$^{\text{e}}$	Pas de théorie quantique de la gravitation	Relativité générale

- Tentative de « réunification » de l'interaction nucléaire forte et de l'interaction électrofaible sous la « théorie de grande unification ».
- Toutes les théories : « théorie des (grandes) cordes », ou « supersymétrie »

Échec pour les deux tentatives : conjectures à vérifier.

C) Les forces

Les interactions sont décrites par des forces de caractéristiques :

- point d'application
- direction
- sens
- intensité $= \|\vec{F}\|$

$\left[\vec{F}\right] = \mathrm{N}$ (Newton), $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
Les forces sont indépendantes du référentiel.

1) Forces de champ

$\vec{F}$ ne dépend que de la position M du point matériel sur lequel elle s'applique.

Exemples

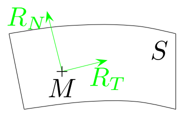
- pesanteur $\vec{P} = m \cdot \vec{g}(M)$ (terre sphérique, donc la direction de $\vec{g}$ n'est pas constante). À petite échelle, $\vec{g}$ est quasi-uniforme.
- Force électrique : dans une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}(M)$, une charge q ponctuelle subit une force $\vec{F}_{\text{él}} = q\vec{E}(M)$

2) Forces dépendant de la vitesse

Force de Lorenz dans un champ électromagnétique $\left\{\vec{E},\vec{B}\right\}$, une particule q en M à t subit la force de Lorenz : $\vec{F}_{\text{Lorenz}} = q\left(\vec{E}_{/R}(M,t) + \vec{v}_{M/(R)} \wedge \vec{B}_{/R}(M,t)\right)$

Forces de frottement fluide un système matériel en mouvement dans un fluide visqueux au repos subit la force de frottement $\vec{F} = -\lambda \cdot \vec{v}_{M/\text{fluide}}$ (λ cte > 0) ou $\vec{F} = -k \cdot \frac{\vec{v}_{M/\text{fluide}}}{\|\vec{v}_{M/\text{fluide}}\|}$ ($k > 0$)

3) Forces de contact. Sur une surface rigide immobile



M est sur la surface (S), soumis à une force appelée réaction du support sur M : $R = \vec{R}_N + \vec{R}_T$, où $\vec{R}_N$ est perpendiculaire à la surface, et $\vec{R}_T$ est parallèle (correspond aux frottements)

Lois empiriques du frottement solide : le contact entre M et (S) est caractérisé par un coefficient f positif, appelé coefficient de frottement.

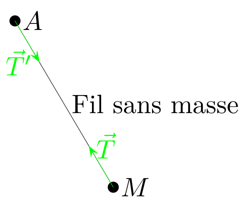
M est immobile lorsque $\|\vec{R}_T\| < f\|\vec{R}_N\|$

Lorsque M est en mouvement, $\vec{R}_T$ est parallèle et de sens opposé à $\vec{v}$, et de module $\|\vec{R}_T\| = f\|\vec{R}_N\|$. Ainsi, $\vec{R}_T = -f\|\vec{R}_N\|\frac{\vec{v}_{M/(R)}}{\|\vec{v}_{M/(R)}\|}$

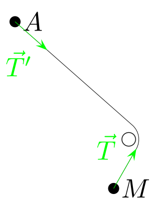
Méthode générale

1. On suppose M immobile, on vérifie que $\|\vec{R}_T\| \leqslant f\|\vec{R}_N\|$ (sinon, il est en mouvement).
2. On suppose M en mouvement dans une direction donnée, on vérifie que $\vec{R}_T$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

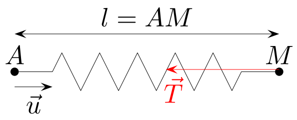
4) Forces de contact. Avec fil ou ressort



Le fil exerce sur M une force appelée tension du fil $\vec{T}$ parallèle au fil et dirigée vers le fil. La tension du fil est la même en tout point du fil : $T' \mathbin{//} T$, sens opposé et $\|\vec{T'}\| = \|\vec{T}\|$ ($\vec{T'} = -\vec{T}$)



On a toujours $\|\vec{T'}\| = \|\vec{T}\|$ (s'il n'y a pas de frottements)



Vecteur unitaire $\vec{u}$ dirigé dans le sens de l'extension du ressort, $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM}$

On a : $\vec{T} = -k(l - l_0) \cdot \vec{u}$, où k est la constante de raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide.

II Les trois lois de Newton de la dynamique

A) Principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels privilégiés dans lequel le mouvement de toute particule libre est rectiligne uniforme, on les appelle référentiels d'inertie ou galiléens.

Pour M isolé (soumis à aucune interaction) dans un référentiel (R) galiléen :

$$\vec{v}_{M/(R)} = \overrightarrow{\text{cte}} \iff \vec{a} = \vec{0} \tag{2.2}$$

(Cas particulier de la relation fondamentale de la dynamique lorsque $\vec{F} = \vec{0}$)

(R_T), référentiel terrestre, est un bon exemple de référentiel galiléen pour $T_\chi \ll 24\,\text{h}$, $D_\chi \ll 6400\,\text{km}$

B) Principe de l'action et de la réaction

Soient deux systèmes A et B en interaction :

$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{A\to B}$, force exercée par A sur B.

$\vec{F}_{BA} = \vec{F}_{B\to A}$, force exercée par B sur A.

Alors $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Si A et B peuvent être assimilés à des points matériels, $\vec{F}_{AB} \mathbin{//} \overrightarrow{AB}$

C) Loi fondamentale de la dynamique

1) Énoncé

Dans un référentiel (R) galiléen, un point matériel M de masse m soumis à une résultante $\vec{F}$ des forces a une accélération telle que $\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{M/(R)}$ (relation fausse en relativité restreinte)

Autre écriture On note $\vec{p}_{M/(R)} = m \cdot \vec{v}_{M/(R)}$ la quantité de mouvement de M dans (R)

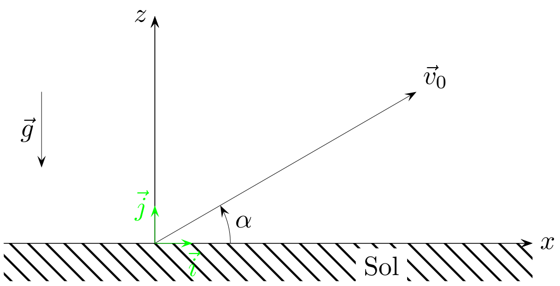
Ainsi, $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{M/(R)}}{\mathrm{d}t}$ (relation vraie en relativité restreinte)

2) Loi fondamentale de la statique (ou de l'équilibre)

M à l'équilibre dans (R) galiléen $\iff \vec{v}_{M/(R)} = \vec{0} \implies \vec{a}_{M/(R)} = \vec{0} \implies \vec{F} = \vec{0}$

III Application de la relation fondamentale de la dynamique (RFD)

A) Chute libre sans frottement



On tire un projectile M avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans le champ de pesanteur uniforme. M est en O à $t = 0$.

- Référentiel (R_T) galiléen
- Système : projectile M de masse m
- Bilan des forces : $\vec{P}$
- Repère $(O, \vec{i}, (\vec{j}), \vec{k})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \\ \vec{v}_{M/(R)} &= \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} \\ \vec{a}_{M/(R)} &= \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m \cdot \vec{g} = -mg \cdot \vec{k} \\ \vec{v}_0 &= v_0 \cos\alpha \cdot \vec{i} + v_0 \cos\alpha \cdot \vec{k}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Relation fondamentale de la dynamique $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_{M/(R)}$

On projette sur les trois axes :

$$\begin{cases} 0 = m\ddot{x} \\ 0 = m\ddot{y} \\ -mg = m\ddot{z} \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = a_1 \\ \dot{y} = a_2 \\ \dot{z} = -gt + a_3 \end{cases} \tag{2.5}$$

à $t = 0$, $\vec{v}_{M/(R)} = \dot{x}(0) \cdot \vec{i} + \dot{y}(0) \cdot \vec{j} + \dot{z}(0) \cdot \vec{k} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$

Donc $a_1 = v_0 \cos\alpha$, $a_2 = 0$, $a_3 = v_0 \sin\alpha$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t + 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Équation de la trajectoire

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha \tag{2.7}$$

On a donc l'équation d'une parabole dans le plan d'équation $y = 0$.

Flèche point tel que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}(t) = 0$. On a $t_{\text{flèche}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$
$z_{\text{flèche}} = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + v_0 \sin\alpha \times \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.
La flèche est maximale quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Portée point tel que $z = 0$ et $t \neq 0$

$$-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t = 0 \iff -\frac{1}{2} g t + v_0 \sin\alpha = 0 \iff t_p = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \tag{2.8}$$

$x(t_p) = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. La portée est maximale quand $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Parabole de sûreté À x fixé, z dépend de α : $z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha = z(\alpha)$
On cherche le maximum de z à x donné
On cherche donc $z'(\alpha) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha} = 0$

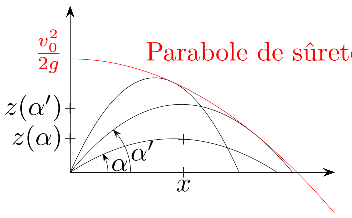
$$z'(\alpha) = \frac{-g x^2}{2 v_0^2} \left(\frac{-2 \times (-\sin\alpha)}{\cos^3\alpha} \right) + x \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{x}{\cos^2\alpha} \left(1 - \frac{g \tan\alpha}{v_0^2} x \right) \tag{2.9}$$

On retire les cas où $x = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$z'(\alpha) = 0 \iff 1 - \frac{g \tan\alpha}{v_0^2} x = 0 \iff x = \frac{v_0^2}{g \tan\alpha} \quad \text{ou} \quad \tan\alpha = \frac{v_0^2}{g \times x} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} z_{\max} &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 (1 + \tan^2\alpha) + x \tan\alpha \\ &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2} \right) + x \frac{v_0^2}{g \times x} = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 - \frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned} \tag{2.11}$$

En faisant varier x, on obtient ainsi une parabole, appelée « parabole de sûreté » (Les points à l'extérieur ne pourront pas être atteints par M).



B) Chute libre avec frottements proportionnels à la vitesse

Bilan des forces $\vec{P}$, $\vec{F}_v = -\lambda \cdot \vec{v}_{M/(R_T)} = -\lambda(\dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k})$

Relation fondamentale de la dynamique $\vec{P} + \vec{F}_v = m \cdot \vec{a}_{M/(R_T)}$

$$\iff m \left. \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/(R_T)}}{\mathrm{d}t} \right|_{(R_T)} + \lambda \cdot \vec{v}_{M/(R_T)} = m\vec{g} \tag{2.12}$$

On a donc une équation linéaire du premier ordre avec second membre constant.
Donc $\vec{v}_{M/(R_T)} = \frac{m}{\lambda} \vec{g} + \vec{A} e^{-\frac{\lambda}{m} t}$. On pose $\tau = \frac{m}{\lambda}$
À $t = 0$, $\vec{v}_0 = \tau \cdot \vec{g} + \vec{A}$. Donc $\vec{A} = \vec{v}_0 - \tau \cdot \vec{g}$
Donc $\vec{v}_{M/(R_T)} = \tau \cdot \vec{g} + (\vec{v}_0 - \tau \cdot \vec{g}) e^{-\frac{\lambda}{m} t}$

$$\overrightarrow{OM} = \tau \cdot \vec{g} \cdot t + (\tau^2 \cdot \vec{g} - \tau \cdot \vec{v}_0) e^{-t/\tau} + \vec{B} \tag{2.13}$$

à $t=0$, $\overrightarrow{OM} = \vec{0} = \tau^2 \cdot \vec{g} - \tau \cdot \vec{v}_0 + \vec{B}$. Donc $\vec{B} = \tau \cdot \vec{v}_0 - \tau^2 \cdot \vec{g}$

$$\overrightarrow{OM} = \tau \cdot \vec{g} \cdot t + \tau(\vec{v}_0 - \tau \cdot \vec{g})(1 - e^{-t/\tau}) \tag{2.14}$$

$$\overrightarrow{OM}(t) : \begin{cases} x(t) = \tau \cdot v_0 \cos\alpha \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \\ z(t) = -\tau \times g \times t + \tau \cdot (v_0 \sin\alpha + g \cdot \tau) \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \end{cases} \tag{2.15}$$

Calcul de $z_{\text{flèche}}$ Le projectile atteint le point de hauteur maximale lorsque $v_z = 0$.

$$\begin{aligned} &\iff -\tau \times g + (v_0 \sin\alpha + g \cdot \tau) \cdot e^{-t/\tau} = 0 \\ &\iff e^{-t/\tau} = \frac{\tau \times g}{(v_0 \sin\alpha + g \cdot \tau)} \\ \iff t = -\tau \ln\left(\frac{\tau \times g}{v_0 \sin\alpha + g \cdot \tau}\right) &= \tau \ln\left(\frac{v_0 \sin\alpha + g \cdot \tau}{\tau \times g}\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Donc $t_{\text{flèche}} = \tau \ln\left(\frac{v_0 \sin\alpha + g \cdot \tau}{\tau \times g}\right)$

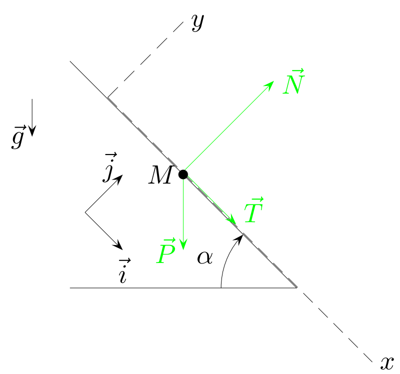
$$\begin{aligned} z(t) &= -\tau \times g \times t_{\text{flèche}} + \tau \cdot (v_0 \sin\alpha + g \cdot \tau) \cdot (1 - e^{-t_{\text{flèche}}/\tau}) \\ &= -\tau^2 g \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin\alpha}{\tau \times g}\right) + \tau \times v_0 \sin\alpha \end{aligned} \tag{2.17}$$

Si $t \to \infty$ (et pas de contrainte sur z) :

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \tau \times v_0 \cos\alpha \tag{2.18}$$

$$\lim_{t\to\infty} \vec{v}_{M/(R_T)} = \tau \cdot \vec{g} = -\tau \times g \cdot \vec{k} \tag{2.19}$$

C) Glissement d'un point matériel sur un plan incliné



On considère M en mouvement sur le plan.

- Référentiel terrestre (R_T) supposé galiléen
- Système : point matériel M de masse m
- Forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ ($\vec{T} + \vec{N}$: réaction du support sur M)
- M obéit aux lois du frottement solide.
- f : coefficient de frottement. $f = \tan\alpha_0$, où $\alpha_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$

- repère cartésien : O = position initiale de M.

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin\alpha \cdot \vec{i} - mg\cos\alpha \cdot \vec{j} \tag{2.20}$$

$$\vec{T} = T_x \cdot \vec{i} \tag{2.21}$$

$$\vec{N} = N_y \cdot \vec{j} \qquad (N_y, T_x \text{ algébriques}) \tag{2.22}$$

Le mouvement est rectiligne. Donc $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$; $\vec{v}_{M/(R_T)} = \dot{x} \cdot \vec{i}$; $\vec{a}_{M/(R_T)} = \ddot{x} \cdot \vec{i}$

D'après la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}_{M/(R_T)} &\iff mg\sin\alpha \cdot \vec{i} - mg\cos\alpha \cdot \vec{j} + T_x \cdot \vec{i} + N_y \cdot \vec{j} = m\ddot{x} \cdot \vec{i} \\ &\iff \begin{cases} mg\sin\alpha + T_x = m\ddot{x} \\ -mg\cos\alpha + N_y = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.23}$$

- Supposons M immobile :

$$x(t) = \text{cte} \implies \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + T_x = m\ddot{x} \\ -mg\cos\alpha + N_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} T_x = -mg\sin\alpha \\ N_y = mg\cos\alpha \end{cases} \tag{2.25}$$

  $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|T_x|}{|N_y|} = \frac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \tan\alpha \leqslant f$ (pour que l'immobilité soit possible)
  Donc $\alpha \leqslant \alpha_0$

  Donc l'immobilité n'est possible que si $\alpha \leqslant \alpha_0$.

  (si $\alpha > \alpha_0$, le solide ne peut pas être immobile)

- Supposons M en mouvement dans le sens de $+\vec{i}$:

$$\begin{aligned} \vec{T} = -f\|\vec{N}\|\frac{\vec{v}_{M/(R_T)}}{\|\vec{v}_{M/(R_T)}\|} &= -f\|\vec{N}\| \cdot \vec{i} \\ \iff T_x &= -f\|\vec{N}\| = -f \cdot N_y = -f \times mg\cos\alpha \\ \iff m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - f \times mg\cos\alpha \\ \iff \ddot{x} &= g\cos\alpha \times (\tan\alpha - \tan\alpha_0) \end{aligned} \tag{2.26}$$

  On a donc un mouvement rectiligne uniformément varié.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g\cos\alpha \times (\tan\alpha - \tan\alpha_0) \times t + \underbrace{\dot{x}_0}_{>0} \\ x &= \frac{1}{2} g\cos\alpha \times (\tan\alpha - \tan\alpha_0) \times t^2 + \dot{x}_0 t + \underbrace{x_0}_{=0} \end{aligned} \tag{2.27}$$

  - ◇ Si $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\dot{x}$ augmente (ou reste constant). On a alors un mouvement rectiligne uniformément accéléré. (Donc $\vec{v}$ est bien dans le sens de $\vec{i}$)
  - ◇ Si $\alpha < \alpha_0$, On a de même un mouvement rectiligne uniformément retardé.

    Il existe donc $t_1 > 0$ tel que $\dot{x}(t_1) = 0$: $t_1 = \frac{\dot{x}_0}{g\cos\alpha(\tan\alpha_0 - \tan\alpha)}$

    Pour $t \in [0; t_1[$, $\dot{x}(t_1) > 0$. Donc $\vec{v}$ et $\vec{i}$ ont même sens.

    Pour $t \geqslant t_1$, M est immobile en $x(t_1)$

- Supposons M en mouvement dans le sens de $-\vec{i}$:

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= -f\|\vec{N}\| \cdot (-\vec{i}) = f\|\vec{N}\| \cdot \vec{i} = f \times mg\cos\alpha \cdot \vec{i} \\
&\iff m\ddot{x} = mg\sin\alpha + f \times mg\cos\alpha \\
&\iff \ddot{x} = g\cos\alpha \times (\tan\alpha + \tan\alpha_0)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= g\cos\alpha \times (\tan\alpha + \tan\alpha_0) \times t + \underbrace{\dot{x}_0}_{<0} \\
x &= \frac{1}{2} g\cos\alpha \times (\tan\alpha + \tan\alpha_0) \times t^2 + \dot{x}_0 t + \underbrace{x_0}_{=0}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

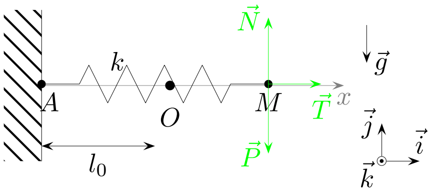
Pour que l'hypothèse soit vérifiée, il faut que $\dot{x} < 0$. Or, $\dot{x}_0 < 0$ et augmente. il existe donc $t_1 > 0$ tel que $\dot{x}(t_1) = 0$: $t_1 = \frac{-\dot{x}_0}{g\cos\alpha(\tan\alpha+\tan\alpha_0)}$

Pour $t \in [0; t_1[$, $\dot{x}(t_1) < 0$.

Pour $t \geqslant t_1$, si $\alpha > \alpha_0$, on a un mouvement dans le sens de $+\vec{i}$; si $\alpha \leqslant \alpha_0$, le mobile s'arrête en $\dot{x}(t_1)$

D) Masse accrochée à un ressort

1) Ressort horizontal



M, de masse m, est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0.

- référentiel terrestre (R_T) galiléen
- système : point matériel M
- Forces : Poids $\vec{P}$, réaction de la tige $\vec{R}$, tension ou force de rappel $\vec{T}$.
- Repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. O est tel que $AO = l_0$.

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= m\vec{g} = -mg \cdot \vec{j} \\
\vec{R} &= R_y \cdot \vec{j} + R_z \cdot \vec{k} \\
\vec{T} &= -k(l - l_0) \cdot \vec{i} = -k(|\overline{AO} + \overline{OM}| - l_0) \cdot \vec{i} = -k(|l_0 + x| - l_0) \cdot \vec{i} = -kx \cdot \vec{i}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} \quad ; \qquad \vec{v}_{M/(R_T)} = \dot{x} \cdot \vec{i} \quad ; \qquad \vec{a}_{M/(R_T)} = \ddot{x} \cdot \vec{i} \tag{2.31}$$

Loi fondamentale de la statique M est à l'équilibre dans (R_T) si, et seulement si $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0} \iff x = 0$

Loi fondamentale de la dynamique

$$m\vec{a}_{M/(R_T)} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$$
$$\iff \begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ 0 = -mg + R_y \\ 0 = R_z \end{cases} \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{et} \quad \vec{R} = -\vec{P} \tag{2.32}$$

On a donc un mouvement rectiligne sinusoïdal

$x(t) = A\cos(\omega \times t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

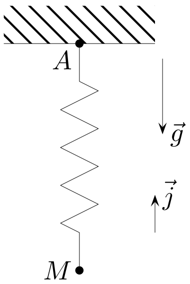
Exemple avec les conditions initiales $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0 > 0$

$$\forall t > 0, \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A\cos\varphi = 0 \\ -A\omega\sin\varphi = v_0 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ et } A = \frac{v_0}{\omega} \end{cases} \tag{2.34}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{2.35}$$

2) Ressort vertical



M est soumis à :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m\vec{g} = -mg \cdot \vec{j} \\ \vec{T} &= -k(l - l_0) \cdot (-\vec{j}) = k(l - l_0) \cdot \vec{j} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Équilibre de M dans (R)

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \tag{2.37}$$
$$-mg + k(l - l_0) = 0 \tag{2.38}$$
$$l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k} \tag{2.39}$$

On définit O par $\overline{AO} = l_{\text{éq}}$ (ou $\overline{AO} = -l_{\text{éq}}$). $\overline{OM} = y \cdot \vec{j}$

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{M/(R)} &= \vec{P} + \vec{T} \\ &\iff m\ddot{y} \cdot \vec{j} = -mg \cdot \vec{j} + k(l - l_0) \cdot \vec{j} \\ &\iff m\ddot{y} = k(l - l_0) - mg = k(l - l_{\text{éq}}) \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$l = |\overline{AM}| = |\overline{AO} + \overline{OM}| = | - l_q + y| = l_q - y \tag{2.41}$$

Donc $m\ddot{y} = -ky \iff \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$