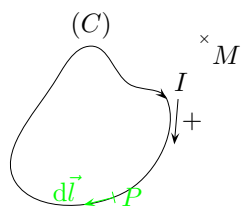


Chapitre 2 : Calcul de champs magnétiques

I Loi de Biot et Savart

A) Énoncé



(C) : circuit filiforme orienté, définissant le courant I .

M est un point de l'espace.

Un élément $d\vec{l}$ en P du fil crée en M un champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad (2.1)$$

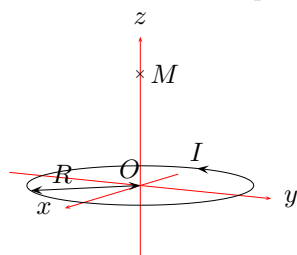
μ_0 : perméabilité du vide = $4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$

Principe de superposition (C) crée en M un champ magnétique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad (2.2)$$

B) Champ magnétique créé par une spire circulaire sur son axe

On considère une spire de centre O , rayon R parcourue par un courant I (définissant le sens positif)



On cherche le champ \vec{B} en un point M de côté z sur l'axe (Oz).

Le plan yOz est un plan d'antisymétrie pour $\{I\}$, donc un plan de symétrie pour $\{\vec{B}\}$. Comme $M \in yOz$, on a $B_x = 0$.

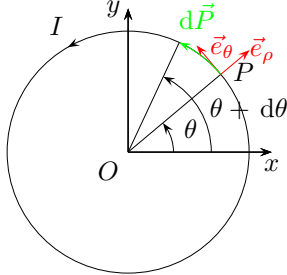
De même avec xOz , on aura $B_y = 0$.

Donc $\vec{B}(M) = B_z(0, 0, z)\vec{k} = B_z(z)\vec{k}$

De plus, B_z est une fonction paire : le plan xOy est un plan de symétrie pour $\{I\}$, donc un plan d'antisymétrie pour $\{\vec{B}\}$. Donc, en M' de côte $-z$, on aura :

$$B_z(-z)\vec{k} = \vec{B}(M') = -\vec{s}_{xOy}(\vec{B}(M)) = -\vec{s}_{xOy}(B_z(z)\vec{k}) = -B_z(z)\vec{s}_{xOy}(\vec{k}) = B_z(z)\vec{k} \quad (2.3)$$

Loi de Biot et Savart :



$$\vec{OP} = \rho\vec{e}_\rho \quad (2.4)$$

$$d\vec{P} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta = R d\theta\vec{e}_\theta \quad (2.5)$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{e}_\rho + z\vec{k} \quad (2.6)$$

Donc $PM^2 = R^2 + z^2$

Ainsi, $\vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM} = \frac{-R\vec{e}_\rho + z\vec{k}}{\sqrt{R^2 + z^2}}$.

L'élément infinitésimal crée en M un champ :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \times \begin{vmatrix} 0 & -R \\ R d\theta & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} zR d\theta \\ 0 \\ R^2 d\theta \end{vmatrix}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (2.7)$$

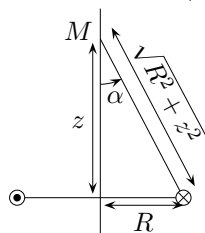
Ainsi, $\vec{B}(M) = B_z(z)\vec{k} = \left(\oint_{(C)} d\vec{B}(M) \cdot \vec{k}\right) \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$

Soit $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}$

et, pour $z = 0$:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{k} \quad (2.8)$$

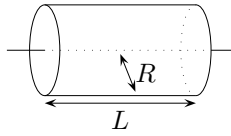
Donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(0) \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)^3$



Donc $\vec{B}(M) = \sin^3(\alpha)\vec{B}(0)$

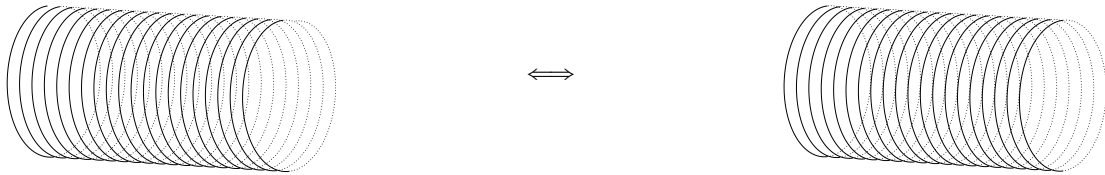
$\|\vec{B}(M)\| \propto_{z \rightarrow +\infty} 1/z^3$ (caractéristique de la nature dipolaire du champ \vec{B})

C) Champ créé par un solénoïde de longueur L , sur son axe

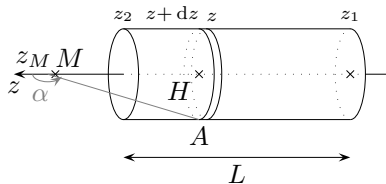


Cylindre de longueur L , rayon R sur lequel on réalise un enroulement serré de N tours de fil parcouru par un courant I .

Cet enroulement équivaut à N spires de même rayon R , parcourues par un même courant I , équidistantes et équiréparties sur la longueur L du solénoïde.



Condition : $\frac{L}{N} \ll R$, ou $N \gg \frac{L}{R}$.



Les $dN_{\text{spires}} = N \frac{dz}{L} = n dz$ spires (n : nombre de spires par unité de longueur) situées entre les côtes z et $z + dz$ créent en M un champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 dN_{\text{spires}} I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + (z - z_M)^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (2.9)$$

Ainsi,

$$\vec{B}(M) = \int_{z_1}^{z_2} d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 R^2 n I}{2} \times \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(R^2 + (z - z_M)^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (2.10)$$

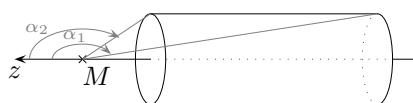
Soit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 R^2 n I}{2R^2} \times \left[\frac{z - z_M}{\sqrt{R^2 + (z - z_M)^2}} \right]_{z_1}^{z_2} \vec{k} \quad (2.11)$$

On a :

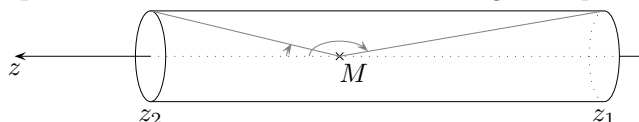
$$z - z_M = \overline{HM}, \quad \sqrt{R^2 + (z - z_M)^2} = AM \quad (2.12)$$

Donc $\frac{z - z_M}{\sqrt{R^2 + (z - z_M)^2}} = \cos \alpha$, où $\alpha = (\vec{k}, \overline{MA})$.



Ainsi,
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \times (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{k}$$

Cas particulier Pour un solénoïde très long et un point M à l'intérieur, très éloigné des deux faces :



$$\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \approx 1 - (-1) = 2 \quad (2.13)$$

Donc $\vec{B}(M) \approx \mu_0 n I \vec{k}$

II Flux du champ magnétique

A) Propriété fondamentale du champ magnétique

Pour une surface fermée S

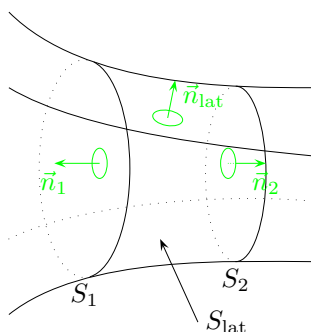
$$\oint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.14)$$

Rappel du théorème de Gauss

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (2.15)$$

Remarque En électrostatique, on peut dissocier les charges + des charges - alors qu'en magnétostatique, on ne peut pas séparer un pôle sud d'un pôle nord. Donc, par analogie avec l'électrostatique pour la charge, on pourrait avoir à la place les pôles, ce qui explique le fait que $\phi_S(\vec{B}) = 0$ (autant de pôles nord que de pôles sud)

B) Tube de champ



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{lat}}$ est une surface fermée.

$$\phi_S(\vec{B}) = 0 \iff \phi_{S_2}(\vec{B}) + \phi_{S_{\text{lat}}}(\vec{B}) + \phi_{S_1}(\vec{B}) = 0 \quad (2.16)$$

En tout point de S_{lat} , \vec{n}_{lat} est perpendiculaire au champ magnétique.

Donc $\phi_{S_{\text{lat}}}(\vec{B}) = 0$

Donc $-\phi_{S_1}(\vec{B}) = \phi_{S_2}(\vec{B})$

$-\phi_{S_1}(\vec{B})$: flux entrant (gauche vers droite)

$\phi_{S_2}(\vec{B})$: flux sortant (gauche vers droite)

On a donc conservation du flux électromagnétique dans un tube de champ.

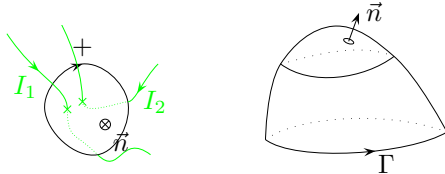
$[\phi] = \text{Wb}$: le Weber.

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2 \quad (2.17)$$

III Circulation de \vec{B} , théorème d'Ampère

A) Théorème d'Ampère

On considère un contour Γ orienté.



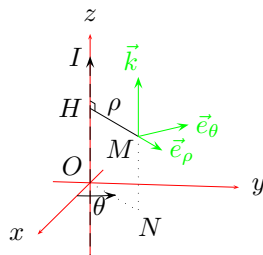
Théorème d'Ampère $C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_S$ (\vec{B} ne dérive donc pas d'un potentiel, car sinon $C_\Gamma(\vec{B}) = 0$)

$C_\Gamma(\vec{B}) = \oint_\Gamma \vec{B}(M) \cdot d\vec{M}$, où $d\vec{M}$ est dans le même sens que le sens positif de Γ .

Et I_S est la somme algébrique des courants qui traversent S dans le sens positif associé à Γ .

Ici, $I_S = I_1 - I_2$

B) Champ créé par un fil rectiligne infini



1) Symétries

Le plan $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$ est un plan de symétrie pour $\{I\}$, donc un plan d'antisymétrie pour $\{\vec{B}\}$. Comme M est dans ce plan, $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$, donc $\vec{B}(M) = B_\theta(\rho, \theta, z)\vec{e}_\theta$.

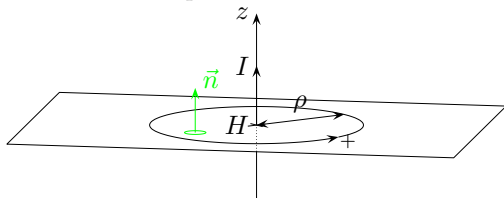
On a une symétrie cylindrique, donc $\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0$.

La distribution $\{I\}$ est invariante par translation d'axe (Oz) , donc $\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0$.

Donc $\vec{B}(M) = B_\theta(\rho)\vec{e}_\theta$

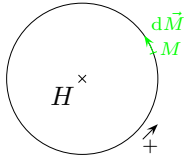
2) Théorème d'Ampère

Contour Γ d'Ampère : cercle de centre $H \in (Oz)$, horizontal et de rayon $\rho > 0$.



Orientation sens trigonométrique.

Surface disque S de centre H et de rayon ρ , orienté comme \vec{k} .



$$\delta C = \vec{B}(M) \cdot d\vec{M} = B_\theta(\rho_M) \vec{e}_\theta \cdot \rho_M d\theta \vec{e}_\theta = B_\theta(\rho) \times \rho d\theta \quad (2.18)$$

Donc $C_\Gamma(\vec{B}) = \oint B_\theta(\rho) \rho d\theta = \int_0^{2\pi} B_\theta(\rho) \rho d\theta = 2\pi B_\theta(\rho) \rho$

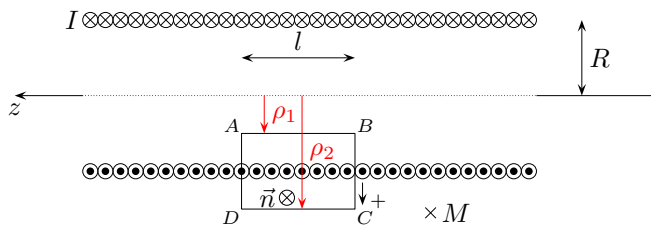
Ici, $I_S = +I$

Donc, d'après le théorème d'Ampère, $2\pi B_\theta(\rho) \rho = \mu_0 I$

D'où $B_\theta(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$, soit $\vec{B}(M) = B_\theta(\rho) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\theta$.

C) Le solénoïde infini

$\frac{L}{R} \ll N$. On suppose L infini.



Plan de la feuille : un (ou le) plan contenant $(Oz$ et M .

Le plan passant par M et normal à \vec{k} est un plan de symétrie pour $\{I\}$, donc d'antisymétrie pour $\{\vec{B}\}$.

Comme M est dans le plan, $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan, donc $\vec{B}(M) = B_z(\rho, \theta, z) \vec{k}$.

On a invariance par rotation d'axe (Oz ou translation de direction \vec{k}).

Donc $\vec{B}(M) = B_z(\rho) \vec{k}$.

Les lignes de champ sont donc des droites parallèles à l'axe (Oz).

On considère le contour $\Gamma = ABCDA$, orienté dans le sens horaire.

$$\delta C = \vec{B}(M) \cdot d\vec{M}$$

- Sur AB :

$$\vec{B}(M) = B_z(\rho_M) \vec{k} = B_z(\rho_1) \vec{k} \quad (2.19)$$

$$d\vec{M} = \underbrace{d\rho \vec{e}_\rho}_{=0 \text{ car } \rho = \text{cte} = \rho_1} + \underbrace{\rho d\theta \vec{e}_\theta}_{=0 \text{ car plan } \theta = \text{cte}} + dz \vec{k} = dz \vec{k} \quad (2.20)$$

Donc $\delta C = B_z(\rho_1) dz$, soit $C_{\overline{AB}}(\vec{B}) = \int_{\overline{AB}} \delta C = \int_{z_A}^{z_B} B_z(\rho_1) dz = B_z(\rho_1) \times (-l)$

- Sur BC :

$$d\vec{M} = d\rho \vec{e}_\rho \perp \vec{B}(M) = B_z(\rho) dz \quad (2.21)$$

Donc $C_{\overline{BC}}(\vec{B}) = 0$

- Sur CD : $d\vec{M} = dz\vec{k}$, $\vec{B}(M) = B_z(\rho_2)\vec{k}$.

Donc $\delta C = B_z(\rho_2) dz$, soit $C_{\overline{CD}}(\vec{B}) = B_z(\rho_2) \times l$

- Sur DA , on aura, de même que sur BC , $C_{\overline{DA}}(\vec{B}) = 0$

Donc $C_\Gamma(\vec{B}) = [B_z(\rho_1) - B_z(\rho_2)] \times l$

$I_S = - \underbrace{n \times l}_{\text{nombre de spires}} \times I$ pour $\rho_1 < R < \rho_2$

pour $\rho_1, \rho_2 < R$ ou $\rho_1, \rho_2 > R$, $I_S = 0$.

Théorème d'Ampère :

$$C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_S \quad (2.22)$$

Donc :

$$[B_z(\rho_1) - B_z(\rho_2)] \times l = \mu_0 I_S \quad (2.23)$$

$$\text{Soit } \begin{cases} B_z(\rho_1) = B_z(\rho_2) & \text{si } \rho_1, \rho_2 < R \\ B_z(\rho_2) - B_z(\rho_1) = -\mu_0 n I & \text{si } \rho_1 < R < \rho_2 \\ B_z(\rho_1) = B_z(\rho_2) & \text{si } \rho_1, \rho_2 > R \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} B_z(\rho) = A & \text{si } \rho < R \\ B_z(\rho) = B & \text{si } \rho > R \end{cases}, \text{ et } B - A = -\mu_0 n I$$

Or, pour $\rho = 0$ (c'est-à-dire pour un point de l'axe (Oz) , à grande distance des extrémités du solénoïde, ici à l'infini), on a $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{k}$

Donc $A = \mu_0 n I$, et $B = 0$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \mu_0 n I \vec{k} \quad \text{à l'intérieur,} \\ &= \vec{0} \quad \text{à l'extérieur.} \end{aligned} \quad (2.24)$$