Chapitre 4 : Le dipôle électrostatique

I Champ et potentiel d’un dipôle

A) Définitions

Doublet :

Système de deux charges opposées $-q$ en N, $+q$ en P ($q>0$)

$\overset{-q}{+}_{N}$ $\qquad\qquad$ $\overset{+q}{+}_{P}$

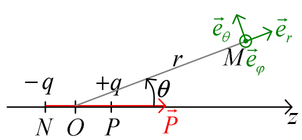
On définit le moment dipolaire électrique du doublet : $\vec{P}=q\overrightarrow{NP}$.

Un dipôle est un doublet pour lequel $a=NP \ll$ distances caractéristiques.

Approximation dipolaire : on confond le doublet et le dipôle. (ainsi, la distance au doublet est $\gg a$)

$\overset{+}{M}$ $\qquad\qquad$ $\overset{-q}{+}_{N}\overset{+q}{+}_{P}$

B) Potentiel électrique du dipôle



On note O le milieu de $[NP]$, $a=NP$

On définit l’axe $(Oz$ par la droite (NP) orientée par $\overrightarrow{NP}$.

Un point M de l’espace est repéré par ses coordonnées sphériques r,θ,φ.

On prend comme ½ plan $\varphi=\text{cte}$ le plan de la feuille.

Potentiel créé en M :

$$V(M)=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 NM}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

$$PM^2=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})^2=PO^2+OM^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PO}=\frac{a^2}{4}+r^2-2\frac{a}{2}r\cos\theta$$

Pour un dipôle, on a $r\gg a$.

$$\frac{1}{PM}=(PM^2)^{-1/2}=\left(r^2\left(1-\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{4r^2}\right)\right)^{-1/2}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{a}{r}\cos\theta+O(\frac{a^2}{r^2})\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{2r}\cos\theta+O(\frac{a^2}{r^2})\right)$$

De même, $NM^2=\frac{a^2}{4}+r^2+2\frac{a}{2}r\cos\theta$ et $\frac{1}{PM}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{a}{2r}\cos\theta+O(\frac{a^2}{r^2})\right)$.

Ainsi, $V(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(-\left(1-\dfrac{a}{2r}\cos\theta+O(\dfrac{a^2}{r^2})\right)+1+\dfrac{a}{2r}\cos\theta+O(\dfrac{a^2}{r^2})\right)$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{a}{r}\cos\theta+O(\frac{a^2}{r^2})\right)$$

Donc, à des termes en $1/r^3$ près :

$$\boxed{V(M)=\frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{P}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

On l'appelle le potentiel du dipôle $\vec{P}$ en O.

On a une décroissante en $1/r^2$, caractéristique du dipôle.

C) Champ électrique du dipôle

$$\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\text{grad}}_M V=-\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta-\underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}}_{=\vec{0}}\vec{e}_\varphi=E_r(r)\vec{e}_r+E_\theta(r)\vec{e}_\theta.$$

$$V(M)=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Donc $\left.\dfrac{\partial V}{\partial r}\right|_\theta=\dfrac{-2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ et $\left.\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right|_r=\dfrac{-P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Donc $\vec{E}(M)=\left|\begin{array}{l}\dfrac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\\ 0\end{array}\right.$; E_r, E_θ décroissent en $1/r^3$

Avec $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$:

$$3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{P}=3pr\cos\theta.r.\vec{e}_r-r^2(p\cos\theta.\vec{e}_r-p\sin\theta.\vec{e}_\theta)$$

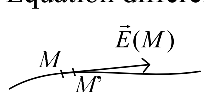
$$=2pr^2\cos\theta.\vec{e}_r+pr^2\sin\theta.\vec{e}_\theta$$

Donc $\boxed{\vec{E}(M)=\dfrac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}}$; cette formule peut ainsi être utilisée dans n'importe quel système de coordonnées : $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ et $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

D) Lignes de champ et équipotentielles

1) Lignes de champ

Equation différentielle d'une ligne de champ : $d\vec{M}\wedge\vec{E}(M)=\vec{0}$.



$$\begin{vmatrix} dr \\ d\theta \\ r\sin\theta d\varphi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -E_\theta r\sin\theta d\varphi = 0 \\ E_r r\cos\theta d\varphi = 0 \\ E_\theta dr - E_r r d\theta = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Les deux premières équations impliquent que $d\varphi = 0$, soit que $\varphi = \text{cte}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dr - \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} r d\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta.dr = 2r\cos\theta.d\theta$$

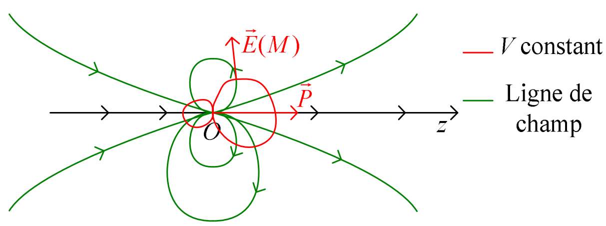
$$\Leftrightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln r = 2\ln|\sin\theta| + \text{cte}$$

$$\Leftrightarrow \text{r} = \text{K}\sin^2\theta$$

2) Equipotentielles

$$V(M) = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \text{cte} \Leftrightarrow r^2 = K'\cos\theta$$



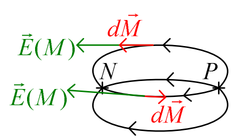
Remarque :

Pour une ligne de champ fermée Γ, parcourue « en suivant la flèche » :

$$\oint_\Gamma \underbrace{\vec{E}(M) \cdot d\vec{M}}_{\delta C > 0} > 0$$

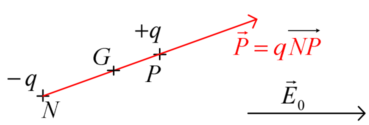
Mais $\vec{E}$ est à circulation conservative, donc $C_r(\vec{E}) = 0$ (!?!)

En réalité, l'approximation dipolaire n'est pas valable au voisinage de O ; plus précisément, on a pas, entre N et P, $\delta C > 0$:



II Action d'un champ électrique uniforme sur un dipôle

On considère un doublet :



On suppose de plus le doublet rigide, c'est-à-dire que $a = NP = \text{cte}$.

On considère un champ électrique extérieur $\vec{E}_0$ uniforme.

A) Mouvement du centre de masse

D'après le théorème de la résultante cinétique dans (R_{lab}) galiléen appliqué au doublet $\{-q \text{ en } N, +q \text{ en } P\}$:

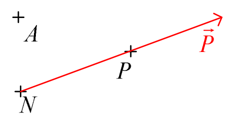
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{\to -q} + \vec{F}_{\to +q} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P) = \vec{0}$$

Donc G décrit un mouvement rectiligne uniforme.

Remarque : si $\vec{E}$ n'est pas uniforme, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N))$

B) Théorème du moment cinétique

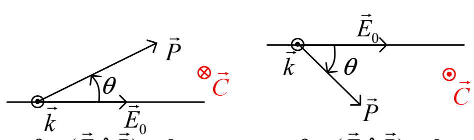
Théorème du moment cinétique appliqué à ce doublet dans (R_{lab}), en un point A fixe dans (R_{lab}) :



$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\sigma}}{dt} &= \vec{M}_A(\vec{F}_{\to -q}) + \vec{M}_A(\vec{F}_{\to +q}) \\ &= \overrightarrow{AN} \wedge (-q\vec{E}_0) + \overrightarrow{AP} \wedge (q\vec{E}_0) \\ &= q(-\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}) \wedge \vec{E}_0 \\ &= q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}_0 \\ &= \vec{P} \wedge \vec{E}_0\end{aligned}$$

Soit $\vec{M}_{\text{ext}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0$

On dit que le champ $\vec{E}_0$ exerce sur le doublet un couple $\begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{P} \wedge \vec{E}_0 \end{cases}$.



$\theta = (\vec{E}_0, \widehat{\ } \vec{P}) > 0$ $\qquad$ $\theta = (\vec{E}_0, \widehat{\ } \vec{P}) < 0$

$$\vec{C} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0 = -PE_0 \sin\theta . \vec{k}$$

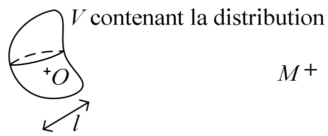
Le couple a ainsi tendance à ramener le dipôle de façon à ce que $\vec{P}$ et $\vec{E}_0$ soient alignés.

Positions d'équilibre :

$\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \sin\theta = 0$; Si $\theta = 0$, l'équilibre est stable, si $\theta = \pi$, il est instable.

III Développement multipolaire

A) Champ créé à grande distance par une distribution de charge donnée



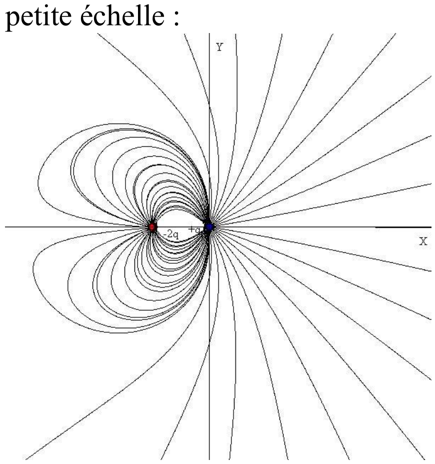
$l << OM$

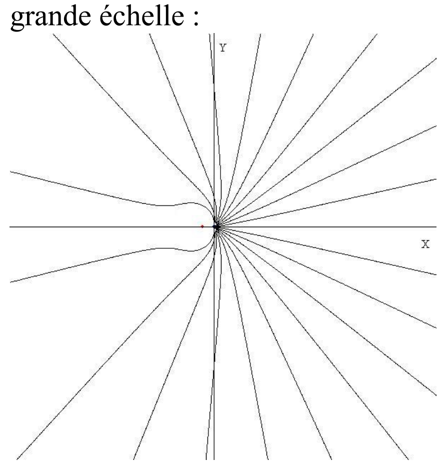
$Q_V = \sum_{q_i \in V} q_i$ ou $\iiint_V \rho(P) dV_{(P)}$

1$^{\text{er}}$ cas : $Q_V \neq 0$

Il crée à grand distance un champ identique à celui d'une charge ponctuelle Q_v située au barycentre G des charges ; $\sum_i q_i \overrightarrow{OM}_i = \underbrace{\left(\sum_i q_i\right)}_{Q_v} \overrightarrow{OG}$.

On parle alors de champ monopolaire.
Exemple de distribution de charge monopolaire :
petite échelle : grande échelle :





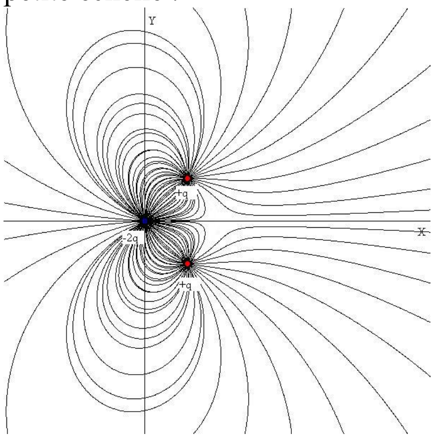
2$^{\text{ème}}$ cas : $Q_V = 0$, et P, barycentre des charges positives, n'est pas confondu avec N, barycentre des charges négatives :

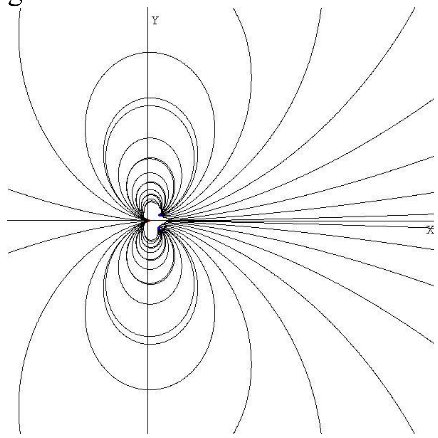
$$\sum_{i \text{ tq } q_i > 0} q_i \overrightarrow{OM}_i = \underbrace{\left(\sum_{i \text{ tq } q_i > 0} q_i\right)}_{+Q>0} \overrightarrow{OP} \quad \text{et} \quad \sum_{i \text{ tq } q_i < 0} q_i \overrightarrow{OM}_i = \underbrace{\left(\sum_{i \text{ tq } q_i < 0} q_i\right)}_{+Q<0} \overrightarrow{ON}$$

La distribution se comporte comme le dipôle $-Q$ en N, $+Q$ en P lorsqu'on en est situé à grande distance.

Exemple de distribution de charge dipolaire : H_2O

petite échelle : grande échelle :



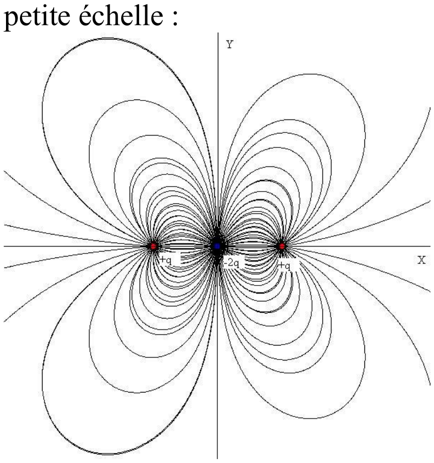


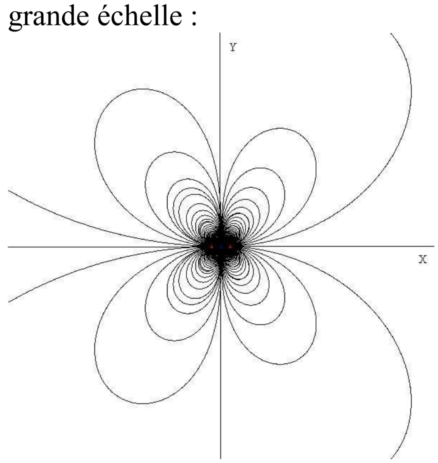
3$^{\text{ème}}$ cas : $Q_V = 0$ et les barycentres sont confondus.

On obtient un champ de type quadripolaire, ($\|\vec{E}\| \propto \dfrac{1}{r^4}$), octopolaire ($\|\vec{E}\| \propto \dfrac{1}{r^5}$)…

Exemple de distribution de charge quadripolaire : CO_2

petite échelle : grande échelle :





B) Application

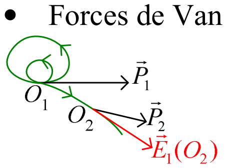
- Les molécules se comportent comme des dipôles, par exemple :

${}^{+\delta}H - Cl^{-\delta}$: Cl est plus électronégatif que H. Cette molécule équivaut à :

$\underset{N}{+}^{-\delta}$ $\qquad$ $\underset{P}{+}^{+\delta}$

$\vec{P} = \delta\overrightarrow{NP}$; la molécule est dite dipolaire
(c'est un dipôle indépendamment de l'environnement)

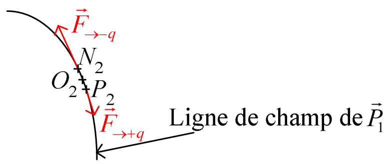
- Forces de Van der Waals :



Molécule en O_2, moment dipolaire $\vec{P}_2$ dans le champ créé par $\vec{P}_1$ en O_1.

1$^{\text{ère}}$ action : orientation ; $\vec{P}_2$ tend à s'aligner sur $\vec{E}_1(O_2)$

2$^{\text{ème}}$ action : le champ est inhomogène, la résultante des forces est donc non nulle.



$\vec{F}_{\to -q} = -q\vec{E}_1(N_2)$

$\vec{F}_{\to +q} = q\vec{E}_1(P_2)$

$\vec{F}_{\to \vec{P}_2} = q(\vec{E}_1(P_2) - \vec{E}_1(N_2))$, dirigée comme $-\vec{P}_2$

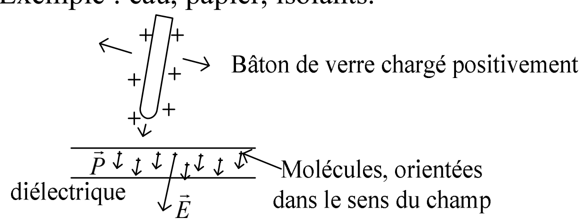
(E décroît en $1/r^3$, donc $\|\vec{E}_1(N_2)\| > \|\vec{E}_1(P_2)\|$)

Ainsi, $\vec{F}_{\to \vec{P}_2}$ est dirigée en moyenne vers O_1, on a donc une force attractive, décroissante en $1/r^7$. L'action a donc lieu à très courte distance.

- Action sur un diélectrique

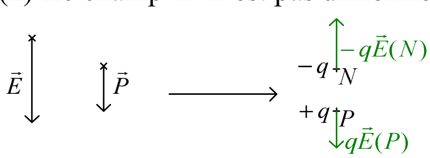
Diélectrique : matériau composé de molécules polaires.

Exemple : eau, papier, isolants.



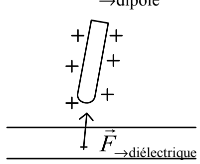
(1) Les dipôles (molécules) s'orientent dans le sens de $\vec{E}$

(2) Le champ $\vec{E}$ n'est pas uniforme.



N est plus proche que P du bâton. Donc $\|\vec{E}(N)\| > \|\vec{E}(P)\|$

Donc $\vec{F}_{\to \text{dipôle}}$ est de sens opposé à $\vec{E}$.



Donc $\vec{F}_{\to \text{diélectrique}}$ est dirigée vers le bâton. C'est vrai aussi pour une charge négative (bâton d'ambre…), puisque alors $\vec{E}$ sera dans l'autre sens, mais N et P seront aussi inversés, ce qui fait que la force exercée sur le dipôle sera dans le même sens que $\vec{E}$, c'est-à-dire vers le bâton.