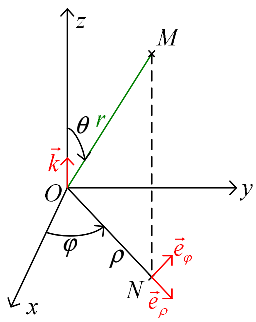
Chapitre 3 : Théorème de Gauss

I Les coordonnées sphériques



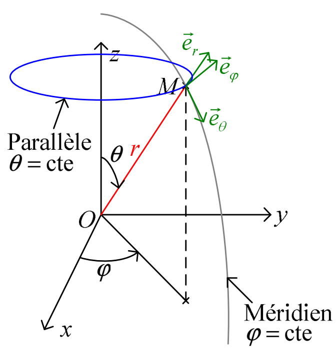
On considère un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) :

$r = OM$

$\theta = (\vec{k},\overrightarrow{OM})$: colatitude.

$\varphi = (\vec{i},\overrightarrow{ON})$: longitude.

(N est la projection de M sur xOy)



Base locale : $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ ($\vec{e}_\varphi$ est le même vecteur que dans la base cylindrique)

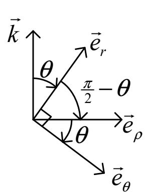
$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

$\vec{e}_\theta$ tangent au méridien (vers le sud)

$\vec{e}_\varphi$ dirigé suivant un parallèle, vers l'est.

Remarque :

Les vecteurs $\vec{k},\vec{e}_r,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta$ sont coplanaires :



$$\vec{e}_r = \cos\theta.\vec{k} + \sin\theta.\vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta.\vec{e}_\rho - \sin\theta.\vec{k}$$

On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

Pour un déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + r.d\vec{e}_r$$

$$d\vec{e}_r = \vec{k}(-\sin\theta.d\theta) + \vec{e}_\rho(\cos\theta.d\theta) + \sin\theta.d\vec{e}_\rho$$

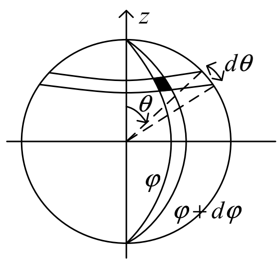
$$= (-\vec{k}.\sin\theta + \vec{e}_\rho\cos\theta)d\theta + \sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$

$$= d\theta.\vec{e}_\theta + \sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$

Donc $d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$

Gradient d'un champ scalaire en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M F = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$



- Périmètre d'un méridien (½ cercle) : $\pi \times R$

Longueur de la portion de chacun des méridiens : $Rd\theta$ (longueur de la corde)

- Périmètre d'un parallèle : $2\pi \times R\sin\theta$

Longueur du parallèle interceptée par le méridien : $R\sin\theta.d\varphi$

(pour le parallèle du bas : $R\sin(\theta + d\theta).d\varphi = R\sin\theta.d\varphi$)

Donc $dS = R\sin\theta.d\varphi.Rd\theta$

$$= R^2\sin\theta.d\varphi.d\theta$$

Volume élémentaire en coordonnées sphériques :

$$dV = dr \times dS = R^2\sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$$

Exemple :

Aire de la sphère de centre O et de rayon R :

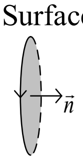
$$S = \oiint_S dS = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2\sin\theta.d\theta.d\varphi = \int_{\theta=0}^{\pi} 2\pi R^2\sin\theta.d\theta = 4\pi R^2$$

II Flux d'un champ de vecteurs

A) Définition

1) Flux élémentaire

Surface infinitésimale d'aire dS :



On oriente arbitrairement le contenu sur lequel s'appuie dS.

On définit le vecteur normal $\vec{n}$ de cet élément de surface : $\vec{n}$ est unitaire, perpendiculaire à la surface, de sens vérifiant la « règle de la main droite ».

Vecteur élément de surface :

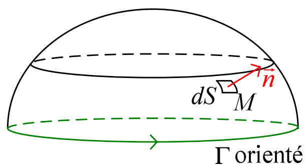
$d\vec{S}$ ou $d\vec{S}_{(M)} = dS.\vec{n}$

Flux élémentaire du champ $\vec{E}$ à travers $d\vec{S}$:

$d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n}.dS$

2) Flux à travers une surface

Pour une surface ouverte (qui s'appuie sur un contour fermé) :



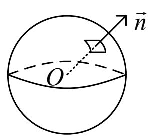
Découpage de S en surfaces infinitésimales $dS.\vec{n}$.

$d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{(M)}$

$\phi_S(\vec{E}) = \iint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{(M)} = \iint_S \vec{E}(M) \cdot dS_{(M)}\vec{n}_{(M)}$

Pour une surface fermée :

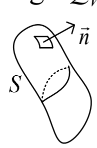
Cette surface définit un volume intérieur et un volume extérieur. Le vecteur normale est choisit sortant.



$\phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{(M)}$

B) Théorème de Gauss

On considère une surface S fermée, délimitant un volume V intérieur qui contient une charge Q_V ou Q_{int} :

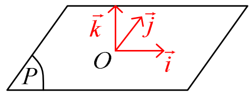


Alors $\phi_S(\vec{E}) = \dfrac{Q_V}{\varepsilon_0}$ (S est appelée une surface de Gauss)

Dans les situations de symétrie, le théorème de Gauss permet ainsi un calcul plus simple de $\vec{E}$.

III Plan infini uniformément chargé

A) Présentation



On considère un plan P infini ayant une densité surfacique de charge uniforme σ_0.

$P = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y, z dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

B) Calcul de $\vec{E}(M)$

1) Symétries

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

Les plans $(M, \vec{i}, \vec{k})$ et $(M, \vec{j}, \vec{k})$ sont des plans de symétrie.

Donc $\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{k}$.

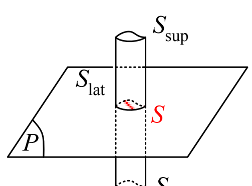
Donc $\vec{E}(M) = E_z(x, y, z)\vec{k}$

Invariance par translation de direction $\vec{i}$. Donc $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$

De même, $\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$

Donc $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{k}$, et $E_z(z)$ est impair.

2) Surface de Gauss



S_{sup} : surface supérieure horizontale d'aire S dans le plan de constante $z > 0$

S_{lat} : surface latérale du cylindre parallèle à $\vec{k}$

S_{inf} : surface horizontale d'aire S dans le plan de côte $-z$.

$S_{\text{tot}} = S_{\text{inf}} + S_{\text{lat}} + S_{\text{sup}}$ est une surface fermée.

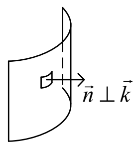
$\phi_S(\vec{E}) = \iint_S d\phi = \iint_{S_{\text{inf}}} d\phi + \iint_{S_{\text{lat}}} d\phi + \iint_{S_{\text{sup}}} d\phi$

En un point P de S_{inf} :

$\vec{n}_{(P)} = -\vec{k}$

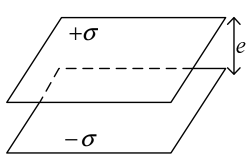
$d\phi = \vec{E}(P) \cdot dS.(-\vec{k}) = E_z(z_P)\vec{k} \cdot dS(-\vec{k})$

Or, $E_z(z_P)=E_z(-z)=-E_z(z)$
Donc $d\phi=-E_z(z)dS$
Donc $\phi_{S_{\text{inf}}}(\vec{E})=E_z(z)\iint_{S_{\text{inf}}}dS=E_z(z)S$
De même, $\phi_{S_{\text{sup}}}(\vec{E})=E_z(z)S$
Pour S_{lat} :



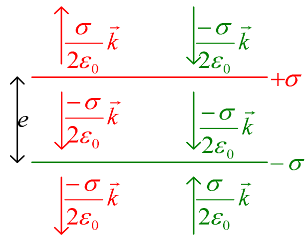
$d\phi=\vec{E}(P)\cdot dS.\vec{n}=E_z(z_P)\vec{k}\cdot dS.\vec{n}=0$
Donc $\phi_{S_{\text{lat}}}(\vec{E})=0$
Donc $\phi_S(\vec{E})=2E_z(z)S$
$Q_{\text{int}}=Q_{V\cap P}=\sigma_0 S$
Donc, d'après le théorème de Gauss :
$2E_z(z)S=\dfrac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0}$
Donc $E_z(z)=\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$.
Ainsi, $\vec{E}(M)=\begin{cases}\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{k} \text{ si } z>0\\ \dfrac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{k} \text{ si } z<0\end{cases}$
On a une discontinuité du champ en 0, $\Delta E=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

C) Condensateur plan

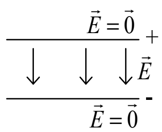


Deux plaques parallèles d'aire *S* et distantes de *e*.
Plaque supérieure : densité surfacique $\sigma>0$, charge $q=\sigma.S$
Plaque inférieure : densité surfacique $-\sigma<0$, charge $-q$

Modélisation :
On néglige les effets de bord ; les plaques sont modélisées par des plans infinis.



Ainsi, à l'extérieur des deux plaques, $\vec{E}(M)=\vec{0}$, et entre les deux $\vec{E}(M)=\frac{-\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$.



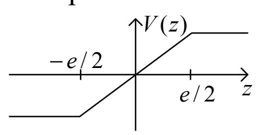
Le champ $\vec{E}$ à l'intérieur est uniforme et dirigé de la charge positive vers la charge négative.

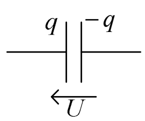
$\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\text{grad}}_M V$

Donc $\frac{-\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}=\begin{vmatrix}-\frac{\partial V}{\partial x}\\ -\frac{\partial V}{\partial y}\\ -\frac{\partial V}{\partial z}\end{vmatrix}$

Donc V ne dépend que de z et $V(z)=\frac{\sigma.z}{\varepsilon}+\text{cte}$ à l'intérieur.

Et de plus $V=\text{cte}$ à l'extérieur (la même, par continuité)





On a : $U=q/C$

Et $U=V_q-V_{-q}=V(\frac{e}{2})-V(\frac{-e}{2})=\frac{\sigma.e}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma.S.e}{\varepsilon_0 S}=\frac{q}{(\varepsilon_0 S/e)}$

Donc $C=\varepsilon_0 S/e$

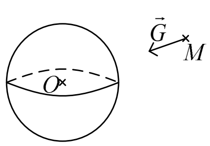
IV Analogie électrostatique – gravitation

<table>
<tr><td colspan="2">Electrique</td><td colspan="2">Gravitationnelle</td></tr>
<tr><td colspan="4">Force</td></tr>
<tr><td>$\vec{F}_{1\to 2} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2^2}\vec{u}_{12}$</td><td colspan="2">$q \leftrightarrow m$
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \leftrightarrow -G$</td><td>$\vec{F}_{1\to 2} = \dfrac{-Gm_1 m_2}{M_1 M_2^2}\vec{u}_{12}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$</td><td colspan="2">$\vec{F}_{12} = m_2\left(\dfrac{-Gm_1}{M_1 M_2^2}\vec{u}_{12}\right) = m_2 \vec{G}_1(M_2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{E}_{q\text{ en }O}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM^2}\vec{u}_r$</td><td colspan="2">$\vec{G}_{m\text{ en }O}(M) = \dfrac{-Gm}{OM^2}\vec{u}_r$ (on peut ainsi définir les distributions de masse…)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Potentiel</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$</td><td colspan="2">$\vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$. φ : potentiel gravitationnel.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (charge ponctuelle q en O)</td><td colspan="2">$\varphi(M) = \dfrac{-Gm}{r}$ (masse ponctuelle m en O)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Energie potentielle</td></tr>
<tr><td colspan="2">$E_p = qV(M)$</td><td colspan="2">$E_p = m\varphi(M)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Théorème de Gauss</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\phi_S(\vec{E}) = \dfrac{Q_v}{\varepsilon_0}$</td><td colspan="2">$\phi_S(\vec{G}) = M_v \times (-4\pi G)$</td></tr>
</table>

Application :

Champ gravitationnel $\vec{G}(M)$ créé par la Terre, considérée comme une boule de centre O et de rayon $R_T = 6400\text{km}$. On suppose la masse volumique μ_0 uniforme.

Masse : $M_T = \mu_0 \frac{4}{3}\pi R_T^3 = 6{,}0.10^{24}\,\text{kg}$



1) Symétries

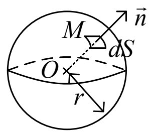
Symétrie sphérique :

φ ne dépend que de r (dans les coordonnées sphériques)

$$\vec{G}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \frac{-d\varphi}{dr}\vec{e}_r = G_r(r)\vec{e}_r$$

2) Théorème de Gauss

On considère comme surface de Gauss une sphère de centre *O* et de rayon *r*.



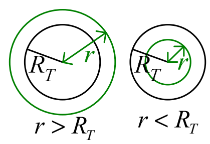
Elément infinitésimal de surface *dS* autour de $M \in S(O,r)$:

$d\vec{S} = dS_{(M)}\vec{n}_{(M)} = dS.\vec{e}_r(M)$

$d\phi = \vec{G}(M)\cdot d\vec{S} = G_r(r).\vec{e}_r \cdot dS.\vec{e}_r = G_r(r)dS$

Donc $\phi = \oiint_{S(O,r)} G_r(r)dS = G_r(r)\oiint_{S(O,r)} dS = G_r(r)4\pi.r^2$

Masse intérieure à $S(O,r)$:



Si $r > R_T$:

$M_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\pi R_T^3\mu_0 = M_T$

Si $r < R_T$:

$M_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\pi.r^3\mu_0 = M_T\dfrac{r^3}{R_T^3}$

Théorème de Gauss :

$\phi_S(\vec{G}) = -4\pi G M_{\text{int}}$

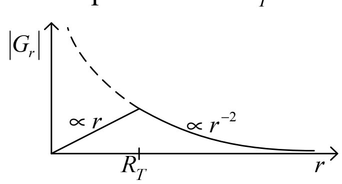
1er cas : $r \le R_T$; $4\pi.r^2 G_r(r) = -4\pi G M_T\dfrac{r^3}{R_T^3}$

D'où $G_r(r) = -\dfrac{GM_T r}{R_T^3}$, soit $\vec{G}(r) = -\dfrac{GM_T}{R_T^3}\overrightarrow{OM}$.

2ème cas : $r \ge R_T$; $4\pi.r^2 G_r(r) = -4\pi G M_T$

Donc $G_r(r) = -\dfrac{GM_T}{r^2}$, soit $\vec{G}(r) = -\dfrac{GM_T}{r^2}\vec{e}_r$

Ainsi, la Terre crée à l'extérieur un champ gravitationnel identique à celui d'une masse ponctuelle M_T en *O*.



($\propto$ signifie « proportionnel à »)

3) Potentiel gravitationnel

$$\vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \Leftrightarrow G_r = -\frac{d\varphi}{dr}$$

Donc $\begin{cases} \varphi(r) = \dfrac{GM_T r^2}{2R_T^3} + k_1 \text{ si } 0 \leq r \leq R_T \\ \varphi(r) = \dfrac{-GM_T}{r} + k_2 \text{ si } r \geq R_T \end{cases}$

Donc, par continuité :

$$\frac{GM_T R_T^2}{2R_T^3} + k_1 = \frac{-GM_T}{R_T} + k_2$$

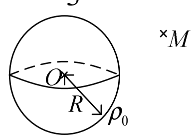
On choisit de plus $\lim\limits_{r \to +\infty} \varphi = 0$, donc $k_2 = 0$. Ainsi, $k_1 = \dfrac{-3}{2}\dfrac{GM_T}{R_T}$.

Donc $\begin{cases} \varphi(r) = \dfrac{-3}{2}\dfrac{GM_T}{R_T} + \dfrac{1}{2}\dfrac{GM_T r^2}{R_T^3} \text{ si } 0 \leq r \leq R_T \\ \varphi(r) = \dfrac{-GM_T}{r} \text{ si } r \geq R_T \end{cases}$

4) Analogie électrique

Boule de rayon R et de densité volumique de charge ρ_0 uniforme.

$Q = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$.



$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \dfrac{Q.r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{e}_r = \dfrac{\rho_0 \overrightarrow{OM}}{3\varepsilon_0} \text{ si } 0 \leq r \leq R \\ \vec{E}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \text{ si } r \geq R \end{cases}$$

Et $\begin{cases} V(r) = \dfrac{-3}{2}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \dfrac{1}{2}\dfrac{Q.r^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \text{ si } 0 \leq r \leq R \\ V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ si } r \geq R \end{cases}$