Chapitre 2 : Potentiel électrique

I Définition

A) Circulation du champ électrique $\vec{E}$

On considère un champ $\{\vec{E}\}$ créé par une distribution de charges.

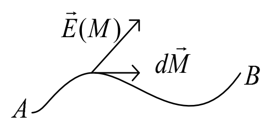
déplacement infinitésimal $d\vec{M} = \overrightarrow{MM'}$

Définition :

Circulation élémentaire de $\vec{E}$ associée à $d\vec{M}$:

$\delta C = \vec{E}(M)\cdot d\vec{M}$.

Pour un contour $\overset{\frown}{AB}$:



Circulation de $\vec{E}$ sur $\overset{\frown}{AB}$: $C_{\overset{\frown}{AB}}(\vec{E}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \delta C = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{E}(M)\cdot d\vec{M}$.

Analogie mécanique :

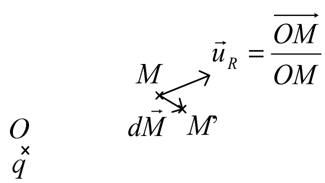
$\delta W = \vec{F}(M)\cdot d\vec{M}$, $W_{\overset{\frown}{AB}}(\vec{F}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(M)\cdot d\vec{M}$.

Remarque :

On parle de circulation pour des *champs de vecteurs* ; ainsi, un travail est une circulation, mais pas le contraire, puisqu'on n'utilise le terme de travail que pour une *force*.

B) Circulation du champ créé par une charge ponctuelle

1) Circulation élémentaire



On note $r = OM$.

Ainsi, $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

$$d\vec{M} = \overrightarrow{MM'} = d(r\vec{u}_r) = dr.\vec{u}_r + r\underbrace{d\vec{u}_r}_{\perp \vec{u}_r}$$

$$\delta C = \vec{E}(M)\cdot d\vec{M} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{u}_r\cdot d\vec{M}) = \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2) Potentiel électrostatique

$$\delta C = \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = d\left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -d\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte}\right) = -dV(M)$$

$V(M)$: potentiel électrostatique créé en M par la charge q située en O.

Remarque :

On choisit généralement la constante de sorte que $\lim\limits_{M\to+\infty} V(M) = 0$.

Ainsi, $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

3) Propriétés

$\delta C = -dV$.

Donc, pour un contour $\overset{\frown}{AB}$:

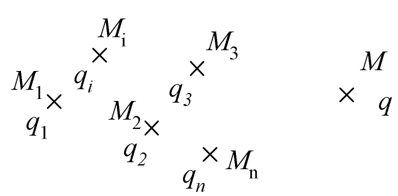
$C_{\overset{\frown}{AB}}(\vec{E}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \delta C = \int_{\overset{\frown}{AB}} -dV = -(V(B) - V(A)) = V(A) - V(B)$.

Pour un contour fermé :

$C_{\overset{\frown}{AA}}(\vec{E}) = \oint_C \vec{E}(M)\cdot d\vec{M} = V(A) - V(A) = 0$

C) Théorème de superposition

1) Distribution discrète de charges



$\{q_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ crée en tout point M de l'espace un champ :

$\vec{E}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{E}_i(M)$.

Donc :

$$\delta C = \vec{E}(M)\cdot d\vec{M} = \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i(M)\right)\cdot d\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\vec{E}_i(M)\cdot d\vec{M}\right)}_{=\delta C_i = -dV_i}$$

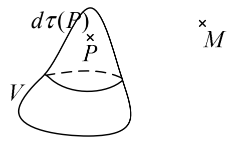
Avec $V_i(M) = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 M_i M}$

Donc $\delta C = \sum\limits_{i=1}^{n} -dV_i = -d\left(\sum\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$

Le champ électrique $\vec{E}_{\{q_i\}}$ dérive donc d'un potentiel, à savoir :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 M_i M}$$

2) Distribution de charges continue



(On utilise $d\tau$ pour un volume élémentaire afin d'éviter les conflits de notation avec les potentiels)

On considère le champ $\{\vec{E}\}$ créé par V.

$$\delta C = \vec{E}(M)\cdot d\vec{M} = \iiint_V d\vec{E}\cdot d\vec{M} = \iiint_V -dV_{dq}$$

Avec $V_{dq} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM} = \dfrac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}$.

D'où $\delta C = -d\underbrace{\iiint_V \dfrac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}}_{V(M)}$.

On applique le même principe pour σ, λ.

Conclusion :

Le champ $\{\vec{E}\}$ dérive d'un potentiel pour toute distribution de charge (qu'elle soit continue ou discrète)

II Lien entre $\vec{E}$ et V.

A) Gradient d'un champ scalaire

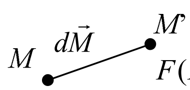
1) Définition

On considère $F: \begin{array}{c}\varepsilon \to \mathbb{R}\\ M \mapsto F(M)\end{array}$ un champ scalaire.

On lui associe le champ vectoriel :

$\overrightarrow{\text{grad}}\,F$, ou $\vec{\nabla}F$ ("nabla") : $M \mapsto \overrightarrow{\text{grad}}_M F$ défini par $dF = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot d\vec{M}$.

On admet que $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ est défini de manière unique (vu en math).



$$F(M') - F(M) = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot \overrightarrow{MM'}$$

2) Expression dans les différents systèmes de coordonnées

- Cartésien :

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$; $d\vec{M} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot d\vec{M} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_x dx + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_y dy + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_z dz$$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}_M F \left| \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{array} \right.$

- Cylindriques : $M(\rho, \theta, z)$

$\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{k}$; $d\vec{M} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\theta.\vec{e}_\theta + dz.\vec{k}$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

Et $dF = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot d\vec{M} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_\rho dx + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_\theta \rho.d\theta + \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M F\right)_z dz$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}_M F \left| \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \rho} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{array} \right.$

Exemple :

$F : M(x, y, z) \mapsto y$

$\overrightarrow{\text{grad}}_M F \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 = \vec{j} \\ 0 \end{array} \right.$

et $\overrightarrow{\text{grad}}_M F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$

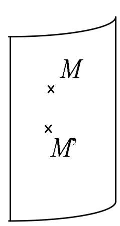
$F(M) = y = \rho \sin \theta$

D’où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}_M F &= \sin \theta.\vec{e}_\rho + \frac{\cos \theta}{\rho} \rho.\vec{e}_\theta \\ &= \sin \theta(\cos \theta.\vec{i} + \sin \theta.\vec{j}) + \cos \theta(-\sin \theta.\vec{i} + \cos \theta.\vec{j}) \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)\vec{j} = \vec{j} \end{aligned}$$

3) Interprétation géométrique

On considère une surface $F = \text{cte} = \lambda$ (c'est-à-dire telle que pour tout point M de cette surface, $F(M) =$ cette constante ; on l’appelle une surface de niveau de F).



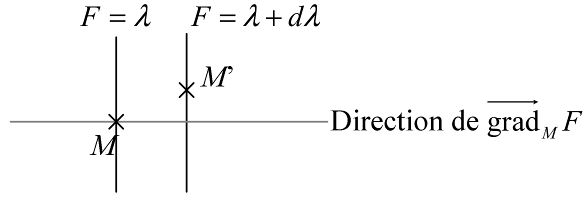
Soit M un point de cette surface, M' infiniment voisin de M sur cette surface.

Alors $dF = F(M') - F(M) = \lambda - \lambda = 0 = \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot \overrightarrow{MM'}$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}_M F \perp \overrightarrow{MM'}$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ est perpendiculaire en *M* à la surface de niveau.

On prend maintenant deux surfaces de niveau infiniment voisines, $F = \lambda$ et $F = \lambda + d\lambda$, avec $d\lambda > 0$ (représentation en coupe) :



Soient *M* un point de la surface $F = \lambda$, M' infiniment voisin de *M* sur la surface $F = \lambda + d\lambda$.

Alors :

$$dF = F(M') - F(M) = d\lambda > 0$$
$$= \overrightarrow{\text{grad}}_M F \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ est dirigé vers les croissantes de *F*.

Enfin, avec l'expression différentielle, on remarque que $\overrightarrow{\text{grad}}_M F$ a une intensité (c'est-à-dire une norme) d'autant plus importante que *F* est « fortement croissante ».

B) Lien entre $\vec{E}$ et *V*.

$$\delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$
$$= -dV = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V \cdot d\vec{M}$$

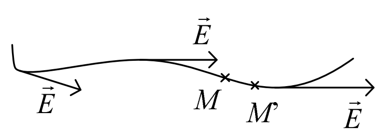
Donc, par unité de la définition du gradient :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V}$$

Ou, pour tout point de l'espace : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V$.

C) Topographie du champ électrique

1) Lignes de champ



C'est une courbe tangente en tout point à $\vec{E}$.

Soient *M* un point de l'espace et M' infiniment voisin de *M* appartenant à la ligne de champ passant par *M*.

Alors $\vec{E}(M) // \overrightarrow{MM'}$. Donc $\vec{E}(M) \wedge d\vec{M} = \vec{0}$. On obtient ainsi une équation différentielle dont la (les) solution(s) sont les lignes de champ.

2) Surfaces équipotentielles

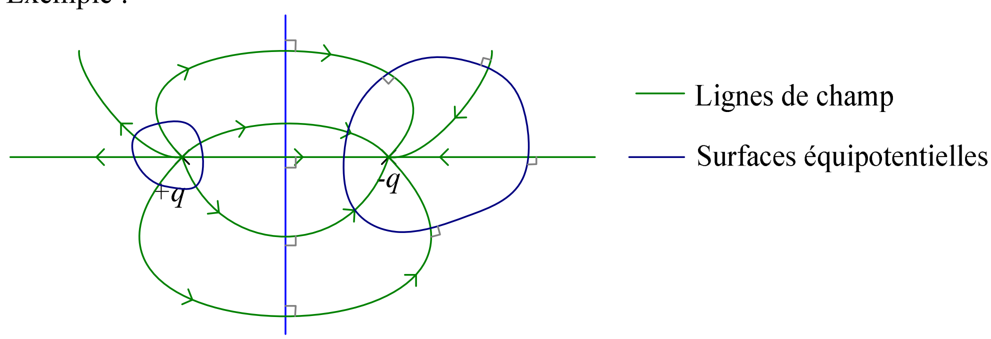
Définition : Ce sont les surfaces de niveau de V.
(Les surfaces $V(M) = \text{cte}$)
Exemple :

Pour une charge ponctuelle, $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM}$

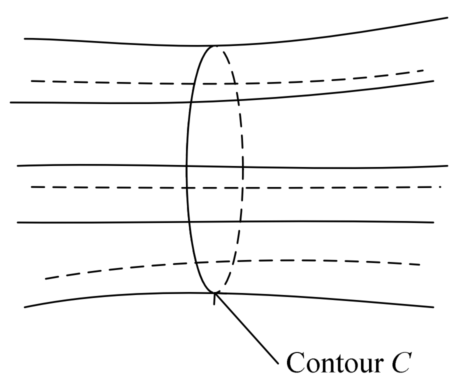
$V(M) = \text{cte} \Leftrightarrow OM = \text{cte} \Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de centre O.

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$. Donc $\vec{E}$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, et dirigé vers les potentiels décroissants.

Exemple :



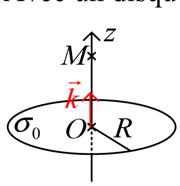
3) Tube de champ



L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur le contour C forme une surface, appelée tube de champ.

D) Exemple de calcul de V.

Avec un disque uniformément chargé :



Sur l'axe, $\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0 z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k}$ (vu au chapitre précédent)

Calcul de $V(M)$ pour un point M de l'axe $(Oz$:

$C_{O\frown M} = \int_{O\frown M} \vec{E}(M)\cdot d\vec{M} = V(O) - V(M)$

On choisit pour $O\frown M$ le segment rectiligne de O à M.

$V(O) - V(M) = \int_{OM} E_z(z)\vec{k}\cdot(dz.\vec{k}) = \int_0^{z_M} \frac{\sigma_0 z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)dz$.

Pour $z > 0$:

$V(O) - V(M) = \int_0^{z_M} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)dz = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(z_M - 0 - \sqrt{R^2+z_M^2} + R\right)$

(Une primitive de $z \mapsto \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$ est $z \mapsto \sqrt{R^2+z^2}$)

Donc $V(M) = V(O) + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z_M^2} - R - z_M\right)$

$\lim_{M\to+\infty} V(M) = 0$. Donc $V(O) = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}$ (et $V(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z_M^2} - z_M\right)$)

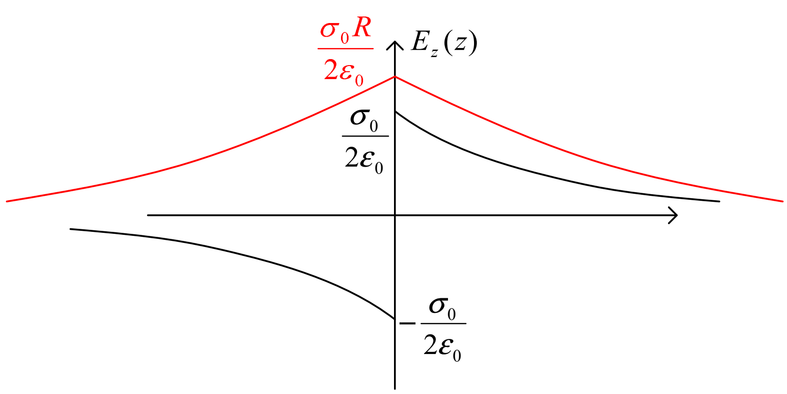
Et de même, pour z quelconque sur $(Oz$:

$V(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z_M^2} - |z_M|\right)$

Si $OM = z_M >> R$:

$\sqrt{R^2+z_M^2} = z\sqrt{1+\frac{R^2}{z_M^2}} = z_M\left(1 + \frac{R^2}{2z_M^2}\right)$

Donc $V(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{2z_M} = \frac{\sigma_0 \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z_M}$



On observe une discontinuité du champ en $z = 0$.

$\Delta\vec{E} = \lim_{z_M\to 0^+} \vec{E}(M) - \lim_{z_M\to 0^-} \vec{E}(M) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{k}$

Propriété générale :

Distribution	$\vec{E}$	V
Volumique	Continu	Continu
Surfacique	Discontinuité	Continu
Linéique	Non définis sur la distribution de charge	
Discrète		

Exemple : $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ n'est pas défini pour $r=0$.

E) Symétries de $\{\rho\}$ et $\{V\}$.

Théorème (admis) :
$\{\rho\}$ et $\{V\}$ possèdent les mêmes symétries.

Exemples :

- Invariance par translation de direction $\vec{i}$:

Le potentiel est indépendant de x ; $V(\cancel{x},y,z)$

$$\begin{aligned}\vec{E}(M)&=-\overrightarrow{\text{grad}}_M V\\&=-\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{=0}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\\&=E_y(y,z)\vec{j}+E_z(y,z)\vec{k}\end{aligned}$$

- Invariance par rotation d'axe $(Oz$ et d'angle α quelconque :

Le potentiel est indépendant de θ : $V(\rho,\cancel{\theta},z)$

$$\vec{E}(M)=E_\rho(\rho,z)\vec{e}_\rho+E_z(\rho,z)\vec{k}$$

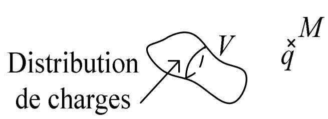
- Symétrie sphérique :

Le potentiel est indépendant de θ, φ : $V(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi})$

$$\vec{E}(M)=-\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r=E_r(r)\vec{e}_r$$

III Energie potentielle

A) Energie potentielle électrique d'une charge ponctuelle



Une distribution de charges crée un champ électrique $\{\vec{E}\}$ et un potentiel $\{V\}$ dans tout l'espace.

On considère une charge q en M soumise à la force de Coulomb :

$$\vec{F}_{V\to q}=q\vec{E}(M)$$

Pour un déplacement infinitésimal $d\vec{M}$:

$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{M} = q\underbrace{\vec{E}(M)\cdot d\vec{M}}_{\delta C} = q(-dV) = -d(qV)$

Donc la force de Coulomb est conservative, et dérive d'une énergie potentielle :

$E_p = qV(M) + \text{cte}$, appelée aussi énergie potentielle de q dans le champ de potentiel $\{V\}$.

Remarque :

Soit $\vec{F}$ une force conservative, et E_p l'énergie potentielle dont elle dérive.

$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{M} = -dE_P = -(\overrightarrow{\text{grad}}_M E_p \cdot dM)$

Donc $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M E_p$

Exemple :

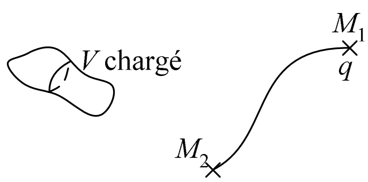
L'énergie potentielle de pesanteur :

$E_{pp} = mgz + \text{cte}$

Donc $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_{pp} = -\dfrac{\partial E_{pp}}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial E_{pp}}{\partial y}\vec{j} - \dfrac{\partial E_{pp}}{\partial z}\vec{k} = -\dfrac{dE_{pp}}{dz}\vec{k} = -mg\vec{k}$

(D'où le terme de "dérive d'une énergie potentielle" pour une force conservative)

B) Interprétation



Travail quasi-statique d'un opérateur pour amener la charge q de M_1 à M_2

(Quasi-statique : à tout instant, la vitesse et l'accélération sont quasiment nulles)

On a alors :

$\vec{F}_{\text{élec}} + \vec{F}_{\text{op}} = m\vec{a} \approx \vec{0}$.

Donc $\vec{F}_{\text{op}} \approx -\vec{F}_{\text{élec}}$.

$\delta W_{op} = \vec{F}_{op}\cdot d\vec{M} = -\vec{F}_{\text{él}}\cdot d\vec{M} = dE_p$

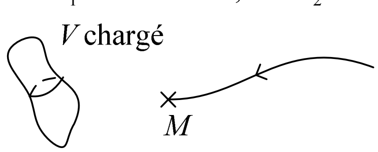
Donc $W_{op} = \int_{M_1 \frown M_2} dE_p = E_p(M_2) - E_p(M_1) = q(V(M_2) - V(M_1))$

Si $V(M_2) > V(M_1)$ et $q > 0$, $W_{\text{op}} > 0$

Si $V(M_2) < V(M_1)$ et $q > 0$, $W_{\text{op}} < 0$

Ainsi, une charge $q > 0$ descend spontanément vers les régions de plus faible potentiel.

Si M_1 est à l'infini, et M_2 en un point M :



$W_{op} = q(V(M) - V(\infty))$

Si on choisit $E_p = qV$, nulle à l'infini (possible uniquement pour des distributions de charge d'extension finie) :

$W_{op} = E_p(M) = qV(M)$

C) Energie potentielle d'un système de deux charges

M_1
$\times$
q_1

q_2
$\times$
M_2

$\vec{F}_2 = \vec{F}_{q_1 \to q_2} = q_2 \vec{E}_1(M_2) = q_2(-\overrightarrow{\text{grad}}_{M_2} V_1) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{M_2} q_2 V_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}_{M_2} E_p$

Où $E_P = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2}$

On retrouve l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'un système de deux particules isolées.

Travail d'un opérateur pour construire cette distribution, les charges q_1, q_2 étant initialement à l'infini (et infiniment éloignées l'une de l'autre).

1ère étape :

On amène q_1 de l'infini à M_1. Aucun champ, donc pas de travail. $W_{\text{op}}^{(1)} = 0$

2ème étape :

q_1 est en M_1, immobile.

On amène q_2 de l'infini à M_2 : $W_{\text{op}}^{(2)} = q_2 V(M_2)$

avec $V(M_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2}$: potentiel en M_2 créé par la charge q_1 en M_1.

Donc $W_{\text{op}} = W_{\text{op}}^{(1)} + W_{\text{op}}^{(2)} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2}$

$$E_p = q_2 V_1(M_2) = q_1 V_2(M_1)$$
$$= \frac{1}{2}(q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2))$$

Généralisation à *n* charges q_i en M_i :

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(M_i)$$

Où $V(M_i)$ est le potentiel créé par toutes les charges en M_i