Chapitre 1 : Le champ électrique

I La charge électrique

A) Définition – propriétés

On trouve deux types d'électricité dans les corps :
- l'électricité résineuse (ambre)
- l'électricité vitreuse (verre)

L'expérience montre que deux corps d'électricités différentes s'attirent, et deux corps de même électricité se repoussent. On attribue alors (arbitrairement) un signe – à l'électricité résineuse, et + à l'électricité vitreuse.

L'action électrique est une grandeur extensive ; on attribue à tout corps chargé une intensité de charge en Coulomb (C).

La charge est quantifiée :

$Q = ne, n \in \mathbb{Z}$, où e est la charge élémentaire, $e = 1{,}6022.10^{-19}$ C

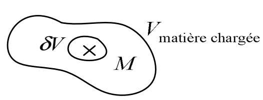
(électron : charge $-e$; proton : charge e)

B) Densité de charge

La quantification de la charge est insensible à l'échelle macroscopique. On peut donc la considérer comme une quantité continue.

1) Distribution volumique de charge

Charges réparties en volume :



(δV : volume mésoscopique)

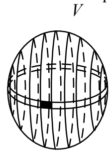
$\rho(M,t)$: densité volumique de charge en M

$$= \frac{\sum_{i \in \delta V} q_i}{\delta V}$$

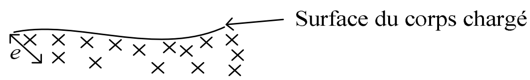
On le note aussi $\rho(M) = \dfrac{\delta Q}{\delta V} = \dfrac{dq}{dV}$, ou $dq = \rho(M) dV_{(M)}$. $[\rho] = \text{C.m}^{-3}$.

Dans un volume V chargé de dimension macroscopique, on a alors :

$$Q_V = \text{"}\sum_{\substack{dV \text{ qui} \\ \text{composent} \\ V}} dq\text{"} = \iiint_V dq = \iiint_V \rho(M) dV_{(M)}$$

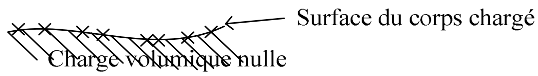


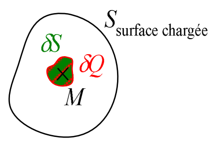
2) Distribution surfacique de charges



$e \approx 1\mu$m (pour un conducteur par exemple)

On assimile cette distribution à une distribution surfacée en supposant que les charges ne sont présentes que sur la surface du corps chargé.



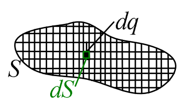


$\sigma(M,t)$: densité surfacique de charges

$$= \frac{\delta Q}{\delta S} = \frac{dq}{dS}$$

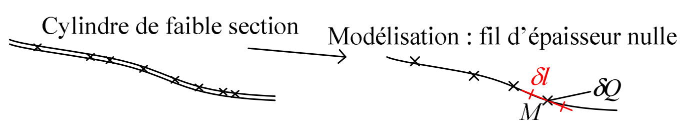
$dq = \sigma(M)dS_{(M)}$. $[\sigma] = \text{C.m}^{-2}$.

Charge totale portée par une surface macroscopique S :



$$Q_S = \text{"}\sum_{\substack{dS \text{ qui} \\ \text{composent} \\ S}} dq\text{"} = \iint_S \sigma(M)dS_{(M)}.$$

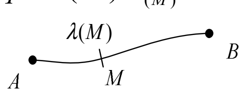
3) Distribution linéique de charges



On définit $\lambda(M,t) = \dfrac{\delta Q}{\delta l} = \dfrac{dq}{dl}$ (densité linéique de charge)

$[\lambda] = \text{C.m}^{-1}$.

$dq = \lambda(M)dl_{(M)}$



$$Q_{\text{AB}} = \text{"}\sum_{\substack{dl \text{ qui} \\ \text{composent} \\ \text{AB}}} dq\text{"} = \int_{\overset{\frown}{\text{AB}}} \lambda(M)dl_{(M)}$$

II Loi de Coulomb

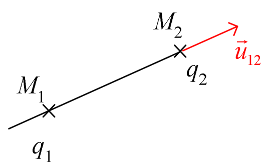
A) Cadre de l'électrostatique

- Les particules chargées sont assimilées à des points ponctuels de position M, de charge q. (condition : la distance entre les corps doit être très grande devant le dimension propre de ces atomes)
- Tous les champs sont indépendants du temps. $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$.

En particulier, ρ, σ, λ sont indépendants du temps.

B) Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles q_1, q_2 en M_1, M_2.



$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$.

L'interaction électrique entre deux charges dans le vide est décrite par la loi de Coulomb :

$\vec{F}_{1\to 2} = K\frac{q_1q_2}{M_1M_2^2}\vec{u}_{12}$.

K : constante caractéristique de l'attraction électrique ($K > 0$)

$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \text{SI (N.m}^2\text{.C}^{-2})$. ε_0 : permittivité électrique du vide.

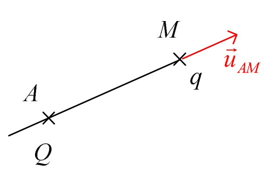
La loi de Coulomb reste valable dans un matériau isolant à condition de remplacer ε_0 par ε, permittivité électrique du milieu.

$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ (ε_r : permittivité relative du milieu, sans dimension)

$\varepsilon_r = 1$ pour le vide ; $\varepsilon_r = 1{,}00058$ pour l'air ; $\varepsilon_r = 80$ pour l'eau.

III Le champ électrique

A) Champ créé par une charge ponctuelle



$\vec{F}_{A\to M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{AM^2}\vec{u}_{AM} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 AM^2}\vec{u}_{AM}$.

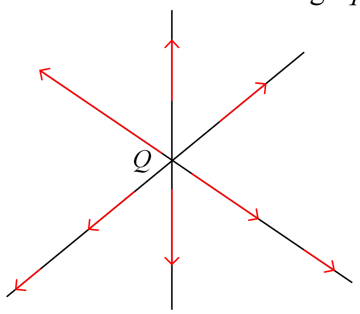
On pose $\vec{E}_Q(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 AM^2}\vec{u}_{AM}$.

$\vec{E}_Q(M)$ est défini en tout point de l'espace. On l'appelle le champ électrique créé au point M par la charge Q en A.

Ainsi, $\vec{F}_{A\to M} = q\vec{E}_Q(M)$.

Interprétation :

La charge Q crée un champ $\vec{E}_Q$ dans tout l'espace et c'est ce champ qui interagit localement en M avec une charge q.



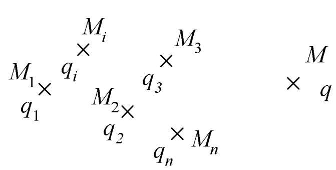
($Q > 0$ ici)

C'est un champ radial, c'est-à-dire que les lignes de champ sont des ½ droites d'origine Q. Les surfaces équipotentielles sont ici les sphères centrées en Q.

B) Principe de superposition des champs créés par une distribution de charges quelconques

1) Distribution discrète

On considère un ensemble de charges q_i en M_i, $i \in [\![1, n]\!]$.



$$\vec{F}_{\{q_i\}\to q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{q_i\to q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q}{M_iM^2}\vec{u}_{M_iM} \text{ avec } \vec{u}_{M_iM} = \frac{\overrightarrow{M_iM}}{M_iM}$$

$$= q\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{M_iM^2}\vec{u}_{M_iM}$$

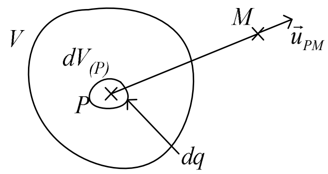
Définition :

Le champ $\vec{E}_{\{q_i\}}(M)$ créé par $\{q_i\}$ en M est défini par : $\vec{F}_{\{q_i\}\to q} = q\vec{E}_{\{q_i\}}(M)$

Ainsi, $\vec{E}_{\{q_i\}}(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{M_iM^2}\vec{u}_{M_iM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_{q_i}(M)$.

Ainsi, le champ créé par les n charges est la superposition des champs créés par chacun des champs agissant seuls.

2) Distribution volumique de charges



$dV_{(P)}$ peut être considéré comme une charge ponctuelle.

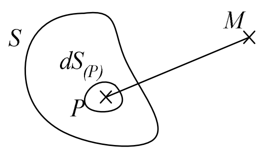
$dq = \rho(P)dV_{(P)}$. Cette charge, située en *P*, crée en *M* un champ électrique $d\vec{E}(M)$ ou $d_{dq}\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{PM^2}\vec{u}_{PM}$.

D'où :

$$\vec{E}_V(M) = \iiint_V d\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM^2}\vec{u}_{PM} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(V)dV_{(P)}}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

Ce champ existe en l'absence de charge en *M*, mais si on ajoute une charge *q* en *M*, $\vec{F}_{V\to q} = q\vec{E}_V(M)$

3) Distribution surfacique de charges



L'élément $dS_{(P)}$ est une charge ponctuelle $dq = \sigma(P)dS_{(P)}$ en *P* qui crée un champ en *M* : $d\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma(P)dS_{(P)}}{PM^2}\vec{u}_{PM}$.

D'où $\vec{E}_S(M) = \iint_S \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma(V)dS_{(P)}}{PM^2}\vec{u}_{PM}$

4) Distribution linéique de charges

$$\vec{E}_{\overset{\frown}{AB}}(M) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(P)dl_{(P)}}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

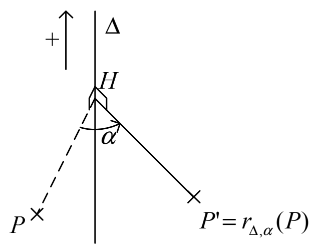
IV Symétries

A) Symétries et antisymétries de la distribution de charges

On considère une distribution de charge volumique $\{\rho\}$

$$\{\rho\} : \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \rho(P) \end{array}$$

Rappel : rotation d'axe Δ orienté et d'angle α :



On considère une isométrie s :

$$\begin{cases} \text{translations } t.\vec{u} \\ \text{symétries planes } s_P \\ \text{rotations d'axe } \Delta \text{ orienté, d'angle } \alpha \end{cases}$$

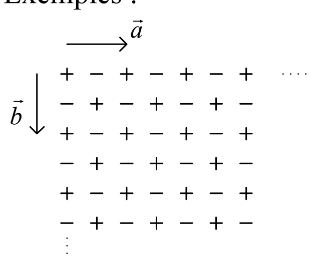
Alors :

s est une symétrie pour $\{\rho\} \Leftrightarrow$ pour tout point P de l'espace, $\rho(P') = \rho(P)$.

s est une antisymétrie pour $\{\rho\} \Leftrightarrow$ pour tout point P de l'espace, $\rho(P') = -\rho(P)$.

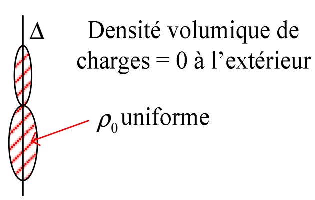
(où $P' = s(P)$)

Exemples :



$t.\vec{a}$, $t.\vec{b}$ sont des symétries pour cette distribution de charges.

$t.\frac{1}{2}\vec{a}$, $t.\frac{1}{2}\vec{b}$ sont des antisymétries.

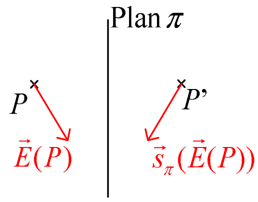


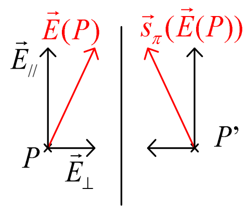
Les symétries sont toutes les rotations d'axe Δ et d'angle $\alpha \in [0, 2\pi[$; c'est une symétrie cylindrique. Pour tout plan P contenant Δ, s_P est aussi une symétrie (on dit aussi que P est un plan de symétrie pour $\{\rho\}$)

B) Symétrie et antisymétrie plane : direction de $\vec{E}$.

1) Théorème (admis)

Si π est un plan de symétrie pour $\{\rho\}$, alors c'en est aussi un pour $\{\vec{E}\}$, (c'est-à-dire que pour tout point P de l'espace, $\vec{E}(P') = \vec{s}_\pi(\vec{E}(P))$; $\vec{s}_\pi$: symétrie plane vectorielle)





$\vec{E}(P) = \vec{E}_{//} + \vec{E}_\perp$

$\vec{s}_\pi(\vec{E}(P)) = \vec{s}_\pi(\vec{E}_{//} + \vec{E}_\perp) = \vec{s}_\pi(\vec{E}_{//}) + \vec{s}_\pi(\vec{E}_\perp) = \vec{E}_{//} - \vec{E}_\perp$

Cas particulier :

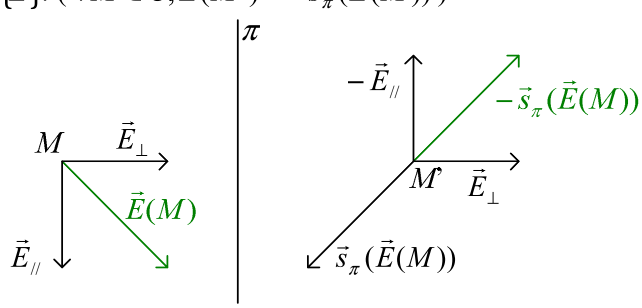
Si $M \in \pi$, alors $M' = s_\pi(M) = M$

Et $\vec{E}(M) = \vec{s}_\pi(\vec{E}(M))$, d'où $\vec{E}_\perp = \vec{0}$

Ainsi, en tout point M de π, $\vec{E}(M)$ est parallèle au plan.

2) Autre théorème

Si π est un plan d'antisymétrie pour $\{\rho\}$, alors π est un plan d'antisymétrie pour $\{\vec{E}\}$. ($\forall M \in \varepsilon, \vec{E}(M') = -\vec{s}_\pi(\vec{E}(M))$)



$\vec{E}(M) = \vec{E}_{//} + \vec{E}_\perp$

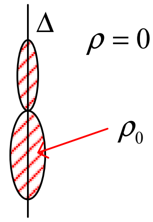
$\vec{E}(M') = -\vec{s}_\pi(\vec{E}(M)) = -\vec{E}_{//} + \vec{E}_\perp$

Cas particulier :

Si $M \in \pi$, alors $M' = M$, et $\vec{E}(M') = -\vec{s}_\pi(\vec{E}(M))$, soit $\vec{E}_{//} = \vec{0}$.

Donc $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan π en tout point M du plan.

3) Exemples

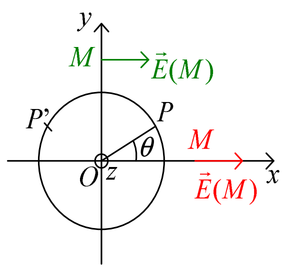


Tout les plans π qui contiennent Δ sont des plans de symétrie pour $\{\rho\}$.

Si $M \in \Delta \subset \pi$, alors $\vec{E}(M) // \pi$.

On choisit deux plans π, π' distincts contenant Δ.

Alors $\vec{E}(M) \subset \pi \cap \pi'$, donc $\vec{E}(M) // \Delta$



Distribution linéique de charge $\lambda(P) = \lambda_0 \cos\theta$.

Le plan yOz est un plan de symétrie pour $\{\lambda\}$:

Si P est un point du cercle, $\lambda(P') = \lambda_0 \cos(\pi - \theta) = -\lambda_0 \cos\theta = -\lambda(P)$

Sinon, $\lambda(P') = 0 = -\lambda(P)$

Ainsi, pour $M \in (Oy$, $\vec{E}(M) \perp yOz$.

De même, si $M \in (Ox$, $\vec{E}(M) // xOz$.

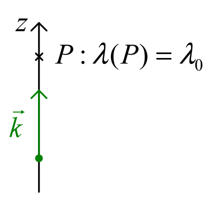
C) Invariance par symétrie : dépendance avec les variables d'espace

1) Invariance par translation de direction u.

Définition :

$\{\rho\}$ est invariante par translation de direction $\vec{u}$ $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, t_{\lambda.\vec{u}}$ est une symétrie pour $\{\rho\}$.

Exemple :



Un fil infini uniformément chargé, de densité linéique de charge λ_0 constante. Cette distribution est invariante par toute translation de direction $\vec{k}$.

Théorème :

Les coordonnées cartésiennes E_x, E_y, E_z du champ $\vec{E}$ ne dépendent pas de la coordonnée repérant la position dans la direction d'invariance : ici, z.

Ou : $\forall M \in \varepsilon, \vec{E}(M) = \vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,\not{z}).\vec{i} + E_y(x,y,\not{z}).\vec{j} + E_z(x,y,\not{z}).\vec{k}$

Démonstration :

$\forall x,y,z,z' \in \mathbb{R}$, pour $M(x,y,z), M'(x,y,z')$ points de l'espace, on a $M' = t_{(z'-z)\vec{k}}(M)$.

C'est une symétrie pour $\{\vec{E}\}$.

Donc $\vec{E}(M') = \vec{t}_{(z'-z)\vec{k}}(\vec{E}(M)) = \vec{E}(M)$

(Un vecteur est inchangé par translation…)

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{E}(M') &= E_x(x,y,z')\vec{i} + E_y(x,y,z')\vec{j} + E_z(x,y,z')\vec{k} \\ &= \vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{i} + E_y(x,y,z)\vec{j} + E_z(x,y,z)\vec{k}\end{aligned}$$

Et en projetant, on trouve le résultat voulu.

Remarque :

En coordonnées cylindriques $M(\rho,\theta,z)$, de base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$:

$$\vec{E}(M(\rho,\theta,z)) = E_\rho(\rho,\theta)\vec{e}_\rho + E_\theta(\rho,\theta)\vec{e}_\theta + E_z(\rho,\theta)\vec{k}$$

2) Invariance par rotation autour de $\Delta = (Oz$

On dit que $\{\rho\}$ possède une symétrie cylindrique par rapport à Δ lorsque $\{\rho\}$ est invariante par toutes les rotations $r_{\Delta,\alpha}, \alpha \in [0,2\pi[$.

Théorème :

Les composantes cylindriques E_ρ, E_θ, E_z sont indépendantes de θ (attention, $\vec{E}$ en dépend quand même par l'intermédiaire de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$)

3) Invariance par rotation d'axe passant par *O*.

On dit que $\{\rho\}$ possède une symétrie sphérique lorsque pour tout axe Δ passant par *O*, pour tout angle $\alpha \in [0,2\pi[$, $r_{\Delta,\alpha}$ est symétrique pour $\{\rho\}$.

Théorème :

Les composantes sphériques de $\vec{E}$ $(E_r, E_\theta, E_\varphi)$ ne dépendent que de $r = OM$; on a même $E_\theta = E_\varphi = 0$. (Voir chapitre 3 pour les coordonnées sphériques)

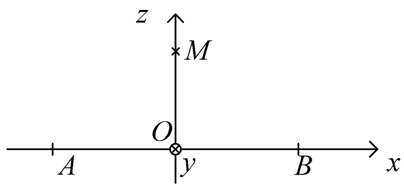
Exemple : Une charge ponctuelle.

V Calculs de champ

A) Champ électrique créé par un segment uniformément chargé dans son plan médiateur

On prend un segment $[AB]$, de longueur $AB = 2l$, un point *M* appartenant au plan médiateur.

On représente ici le plan passant par A, B, M :



$\forall P \in [AB], \lambda(P) = \lambda_0$ constante.

1) Direction de $\vec{E}(M)$

- $\pi = yOz$ est un plan de symétrie.

Comme $M \in \pi$, on a $\vec{E}(M) \in \pi$, ou $E_x = \vec{E}(M) \cdot \vec{i} = 0$.

- $\pi' = xOz$ est aussi un plan de symétrie.

Comme $M \in \pi'$, on a $\vec{E}(M) \in \pi'$, ou $E_y = \vec{E}(M) \cdot \vec{j} = 0$

Ainsi, $\vec{E}(M) = E_z(M)\vec{k} = E_z(z)\vec{k}$ (puisque $M \in (Oz)$)

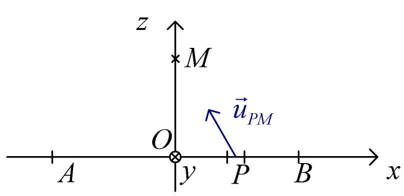
- $P = xOy$ est aussi un plan de symétrie.

On note $M' = s_P(M)$. Comme P est un plan de symétrie, on a :

$\vec{E}(M') = \vec{s}_P(\vec{E}(M))$, soit $E_z(-z)\vec{k} = \vec{s}_P(E_z(z)\vec{k}) = E_z(z)\vec{s}_P(\vec{k}) = -E_z(z)\vec{k}$.

Donc E_z est une fonction impaire.

2) Calcul de E_z.



On considère un élément infinitésimal de fil repéré par le point P d'abscisse x_P ou x, et de longueur dx. Cet élément crée en M un champ :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0 dx}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}_{PM}, \text{ où } \vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}}{PM}$$

Donc $\vec{E}(M) = \int_{A^\frown B} d\vec{E}(M)$.

Or, $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{k}$.

Donc $E_z(z) = \vec{E}(M) \cdot \vec{k} = \int_{A^\frown B} d\vec{E}(M) \cdot \vec{k}$; $\vec{u}_{PM} \cdot \vec{k} = \dfrac{\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}}{PM} \cdot \vec{k} = \dfrac{z}{PM}$.

Donc :

$$E_z(z) = \int_{A^\frown B} \frac{z\lambda_0 dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{-l}^{l} \frac{z\lambda_0 dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0 z}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{z^2} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$.

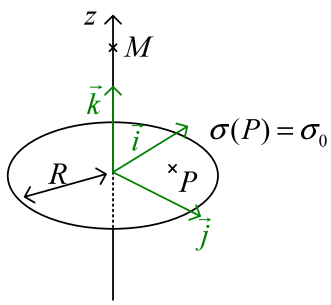
Donc $E_z(z) = \dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 z}\left(\dfrac{l}{\sqrt{l^2+z^2}} - \dfrac{-l}{\sqrt{l^2+z^2}}\right) = \dfrac{2\lambda_0 l}{4\pi\varepsilon_0 z\sqrt{l^2+z^2}}$

Soit $\vec{E}(M) = \dfrac{2\lambda_0 l}{4\pi\varepsilon_0 z\sqrt{l^2+z^2}}\vec{k}$.

Si $z >> l$, le segment correspond alors à une charge ponctuelle.
Vérification :

$$\vec{E}(M) = \frac{2\lambda_0 l}{4\pi\varepsilon_0 z\sqrt{l^2+z^2}}\vec{k} \approx \frac{2\lambda_0 l}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{k} \approx \frac{q_{AB}}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{k}$$

B) Champ créé par un disque uniformément chargé



On considère un disque d'axe $(Oz$, de rayon R, ayant une distribution uniforme de charge σ_0 constante.

On cherche le champ en $M \in (Oz$.

1) Symétries

xOz est un plan de symétrie pour $\{\sigma\}$, et M est dans ce plan.

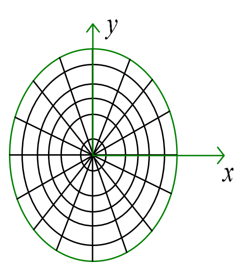
Donc $E_y(M) = 0$

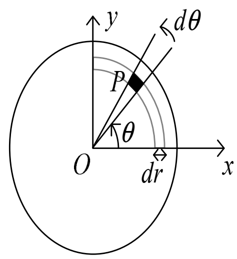
De même avec yOz, $E_x(M) = 0$

Donc $\vec{E}(M) = E_z(M)\vec{k} = E_z(z)\vec{k}$

2) Calcul de E_z.

Découpage de la distribution de charges :





On considère un élément infinitésimal repéré par $P(r,\theta)$ et de longueur $dr, d\theta$. Cet élément a pour aire $ds = dr \times rd\theta$ (en assimilant les arcs à la corde correspondante, de longueur $rd\theta$).

Il porte la charge $dq = \sigma(P)dS = \sigma_0 dr \times rd\theta$.

$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0 rdr \times d\theta}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}_{PM}.$$

Donc $\vec{E}(M) = \iint_{D(O,R)} d\vec{E}(M)$, et $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{k}$

Donc $E_z(z) = \iint_{D(O,R)} d\vec{E}(M)\cdot\vec{k}$

$$\vec{u}_{PM}\cdot\vec{k} = \frac{\overrightarrow{PM}\cdot\vec{k}}{PM} = \frac{z}{PM}$$

Donc $E_z(z) = \iint_{D(O,R)} \frac{z\sigma_0 rdr \times d\theta}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{z\sigma_0 rdr \times d\theta}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}$

Ainsi, en intégrant d'abord par rapport à θ :

$$E_z(z) = 2\pi\int_0^R \frac{z\sigma_0 rdr}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}$$

Une primitive de $r \mapsto \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$ est $r \mapsto \frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}$

Donc $E_z(z) = \frac{2\pi\sigma_0 z}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{1}{|z|}\right)$

Soit $\vec{E}(M) = \frac{2\pi\sigma_0 z}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k}$

Lorsque $z >> R$ (et $z > 0$) :

$$\vec{E}(M) = \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k} = \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{R^2+z^2}-z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k}$$

$$= \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z\left(\sqrt{1+R^2/z^2}-1\right)}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k} \approx \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z\left(R^2/2z^2\right)}{z}\right)\vec{k}$$

$$\approx \frac{\pi\sigma_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{k} = \frac{q_D}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{k}$$