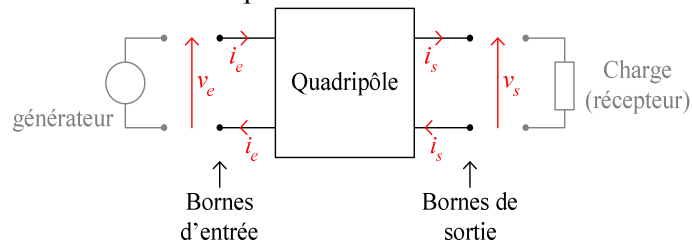


# Chapitre 4 : Quadripôles, fonctions de transfert, filtres

## I Quadripôle électrocinétique

### A) Définition

Elément de circuit à quatre bornes :



Quadripôle passif : pas de source auxiliaire de puissance électrique.

Quadripôle actif : présence d'une source auxiliaire de puissance.

Le fonctionnement électrique du quadripôle est caractérisé par :

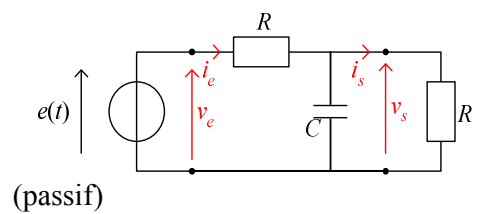
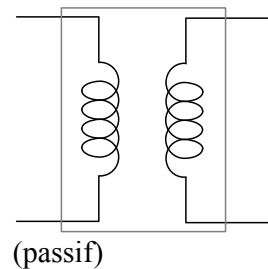
$v_e, v_s$  : tension d'entrée, de sortie du quadripôle

$i_e, i_s$  : courant d'entrée, de sortie du quadripôle

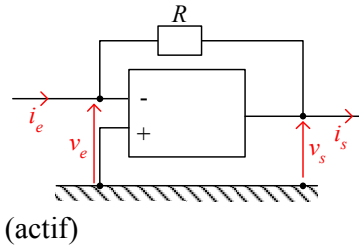
Un quadripôle est dit linéaire lorsqu'il est constitué uniquement de dipôles et éléments de circuit linéaires.

### B) Exemples de quadripôles

Transformateur :



Montage à amplificateur opérationnel (A.O)



## II Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire en $RSF(\omega)$ .

$$\underline{v}_e = \underline{V}_e e^{j\omega t} \quad \underline{i}_e = \underline{I}_e e^{j\omega t}$$

$$\underline{v}_s = \underline{V}_s e^{j\omega t} \quad \underline{i}_s = \underline{I}_s e^{j\omega t}$$

### A) Fonction de transfert (Transmittance)

Définition :

$$\underline{H}(j\omega) \text{ (fonction de transfert)} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \text{ (amplification en tension)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{i}_s}{\underline{i}_e} = \frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_e} \text{ (amplification en courant)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{V}_s}{\underline{I}_e} \text{ (Transimpédance)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{I}_s}{\underline{V}_e} \text{ (Transadmittance)}$$

$$\left( \frac{\text{fonction d'entrée}}{\text{fonction de sortie}} \right)$$

Attention :  $\underline{H}$  dépend du quadripôle et du reste du circuit.

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| e^{j \arg(\underline{H}(j\omega))} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$G(\omega)$  : gain du quadripôle.

$\varphi(\omega)$  : avance de phase de la sortie sur l'entrée.

On définit le gain en décibel :  $G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(G(\omega))$

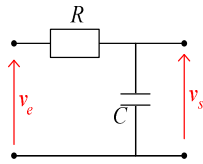
## III Diagramme de Bode

### A) Définition

Consiste à tracer les graphes  $G_{dB}$  et  $\varphi$  en fonction de  $\log_{10}(\omega/\omega_0)$ , où  $\omega_0$  est soit une pulsation caractéristique du circuit, soit  $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . On peut aussi tracer en fonction de  $\omega$  sur un papier millimétré en échelle logarithmique. (unité : décade).

## B) Exemple : circuit R,C et C,R

Circuit R,C :



Source :  $v_e = V_e \cos(\omega t + \varphi)$

Charge : circuit ouvert ( $i_s = 0$ )

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \quad (\text{diviseur de tension})$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}. \quad \text{On pose } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\text{Donc } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\text{Ainsi, } G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Diagramme de Bode :

En basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ ) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 1 \text{ donc } \lim_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow -\infty} G_{\text{dB}} = 0. \text{ On a donc une asymptote horizontale en } -\infty.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0 \text{ donc } \lim_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow -\infty} \varphi(\omega) = 0. \text{ On a aussi une asymptote horizontale.}$$

En haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ) :

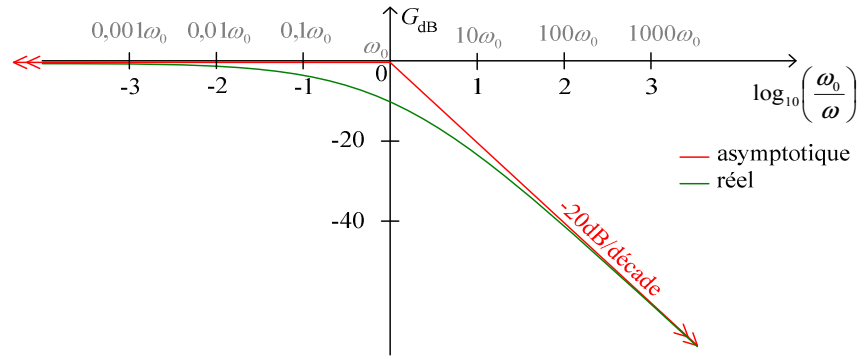
$$G(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{Donc } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \log(G\omega) - \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \right) = 0$$

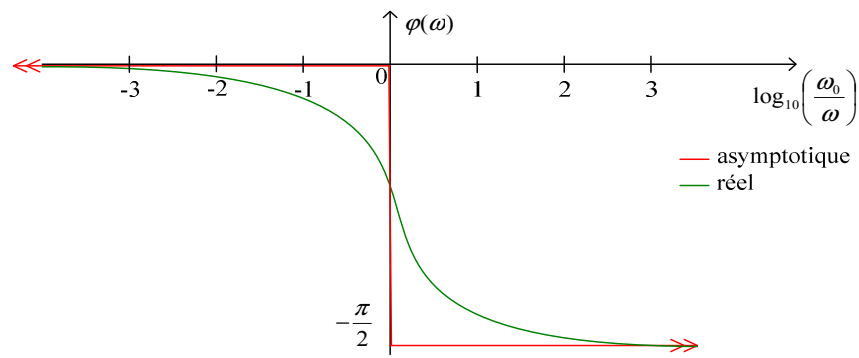
$$\text{Soit } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{G_{\text{dB}}(\omega)}_Y - \underbrace{(-20 \log \frac{\omega_0}{\omega})}_X \right) = 0$$

On a une asymptote d'équation  $Y = -20X$  (soit  $G_{\text{dB}}(\omega) = -20 \log \frac{\omega_0}{\omega}$ ) en  $+\infty$ .

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \text{ On a donc une asymptote horizontale en } +\infty$$

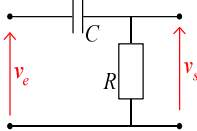


$$G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{\text{dB}}(\omega_0) = -3\text{dB}$$



$$\varphi(\omega_0) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

Circuit  $C,R$  :



Source :  $v_e = V_e \cos(\omega t + \varphi)$

Charge :  $R_\infty$ .

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$G(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} ; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

En basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ ) :

$$G(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{Donc } \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( G_{\text{dB}}(\omega) - 20 \log \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0$$

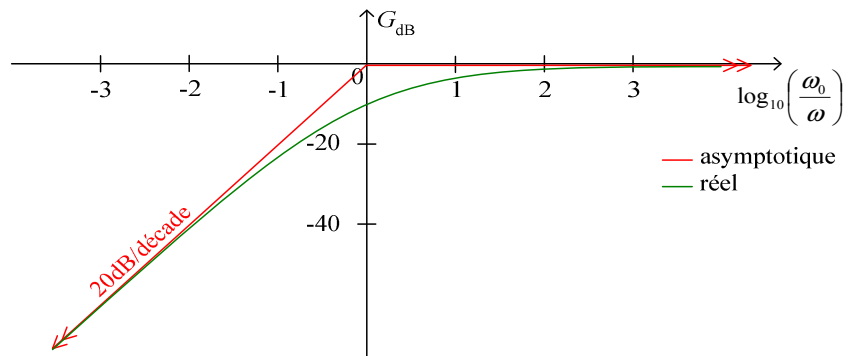
On a une asymptote d'équation  $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log \frac{\omega_0}{\omega}$  en  $-\infty$ .

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

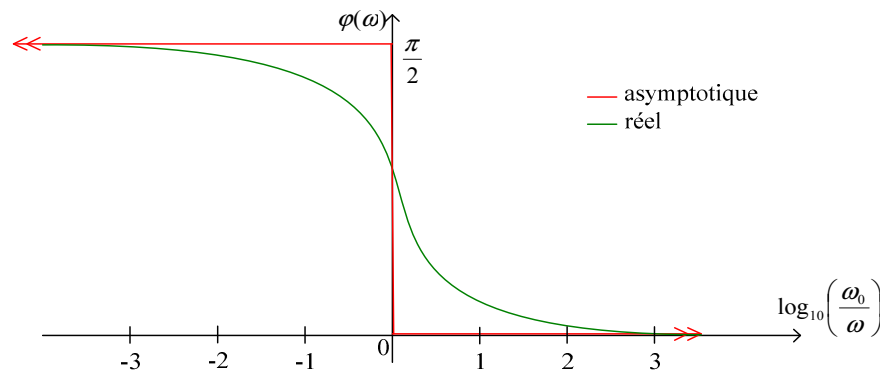
En haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ) :

$$G(\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\omega/\omega_0}{\omega/\omega_0} \sim 1. \text{ Donc } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega) = 1; \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_{\text{dB}}(\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = 0$$



Pour  $\varphi(\omega)$ , c'est le même que le précédent décalé de  $\pi/2$  vers le haut :



### C) Diagramme de Bode asymptotique

Définition du diagramme de Bode asymptotique : c'est la réunion des asymptotes haute fréquence et basse fréquence. (Le diagramme de Bode asymptotique est très proche du réel.) Remarque : on peut avoir plusieurs domaines de fréquences (haute fréquence, basse fréquence et intermédiaire).

## IV Filtres du 1<sup>er</sup> ordre

### A) Décomposition en série de Fourier

Soit  $F$  de période  $T$  (pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ). Alors, d'après le théorème de Fourier :

$$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \exists (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega n t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\omega n t)$$

On a :

$$a_0 = \langle F(t) \rangle_t$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^t F(t') \cos(\omega n t') dt'$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^t F(t') \sin(\omega n t') dt'$$

Notation compacte :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n) \quad (a_0 = C_0 \cos \varphi_0)$$

Terme 0 : valeur moyenne

Terme  $n$  : harmonique de rang  $n$  de la décomposition de Fourier.

Exemple : le son d'un instrument de musique

$$F(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\substack{\text{fondamental} \\ = \text{hauteur de la note}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n)}_{\substack{\text{harmoniques, donnent} \\ \text{le "timbre" de la note}}}$$

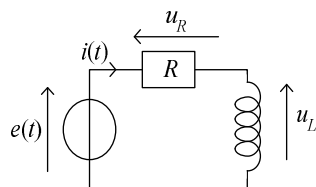
Si  $F$  n'est pas périodique, on a toujours une décomposition, appelée « transformée de Fourier » (mais éventuellement avec une intégrale au lieu de la somme)

Exemple : décomposition spectrale de la lumière :

$$\underbrace{F(t)}_{\substack{\text{onde lumineuse} \\ \text{en un point}}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n)}_{\substack{\text{composantes monochromatiques} \\ \text{de } F(t)}}$$

### B) Théorème de superposition

Un circuit linéaire correspond à la donnée d'équations (différentielles) linéaires.



$$e(t) = u_R + u_L = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$

$$e_1(t) \rightarrow i_1(t)$$

$$e_2(t) \rightarrow i_2(t)$$

$$e_1(t) + e_2(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Théorème de superposition : pour calculer la réponse à  $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$ , il suffit de sommer les réponses à chacune des excitations prises individuellement (valable non seulement pour des sommes, mais aussi pour des combinaisons linéaires).

Conséquence : pour  $e(t)$ , excitation périodique ou non, la série/transformée de Fourier donne  $e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(\omega n t + \varphi_n)$

On trouve alors la réponse  $i_n(t)$ , pour chaque  $n$ , à  $E_n \cos(\omega n t + \varphi_n)$ . Dans ce cas,

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{E}_n}{R + jn\omega L}, \text{ soit } i_n(t) = |\underline{I}_n| \cos(\omega n t + \arg(\underline{I}_n))$$

$$\text{Donc } i_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\underline{I}_n| \cos(\omega n t + \arg(\underline{I}_n))$$

### C) Définition et classification d'un filtre

Un filtre est un quadripôle linéaire.

Bande passante du filtre :

$$BP = \left\{ \omega, G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \omega, G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB}}^{\max} - 3\text{dB} \right\}$$

Un filtre est dit :

Passe-bas si la bande passante est de la forme  $[0; \omega_1]$ .

Passe-haut si la bande passante est de la forme  $[\omega_1; +\infty[$ .

Passe-bande si la bande passante est de la forme  $[\omega_1; \omega_2]$

Coupe-bande si la bande passante est de la forme  $[0; \omega_1] \cup [\omega_2; +\infty[$

Pour un quadripôle linéaire,  $\underline{H}(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de degré  $\leq n$  ;  $n$  désigne alors l'ordre du filtre.

Exemple : passe-bas

$$v_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n) \quad ; \quad v_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \cos(\omega n t + \varphi'_n)$$

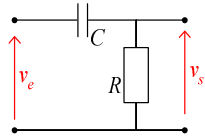
$$G(n\omega) = \frac{C'_n}{C_n}$$

Pour  $\omega \ll \omega_1$ ,  $C'_n$  et  $C_n$  sont comparables (les basses fréquences sont transmises)

Pour  $\omega \gg \omega_1$ ,  $C'_n \ll C_n$  (les hautes fréquences sont atténuées)

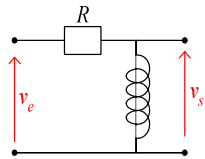
## D) Filtres passe-haut : $R,L$ et $C,R$

### 1) Fonction de transfert



Charge : sortie ouverte.

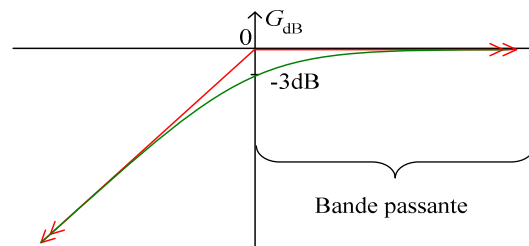
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$



Charge : sortie ouverte.

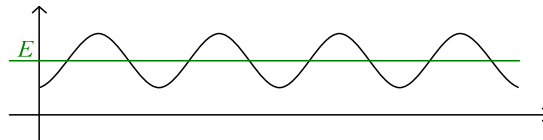
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{R}{L}$$

On a donc un filtre du premier ordre.



### 2) Application

Touche AC de l'oscilloscope :



La touche AC est un filtre passe-haut

$$v_e(t) = E + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n)$$

$$\uparrow \downarrow = \langle v_e \rangle$$

$$v_s(t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega.n.t + \varphi_n) = v_e(t) - E$$



### 3) Comportement pseudo dérivateur

Si  $\omega \ll \omega_0$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega / \omega_0}{1 + j\omega / \omega_0} \sim j \frac{\omega}{\omega_0}$$

ou  $\underline{V}_s = j \frac{\omega V_e}{\omega_0}$  soit  $v_s(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_e}{dt}$  (en RSF( $\omega$ ))

Pour une fonction périodique quelconque :

$$v_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n) \quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$

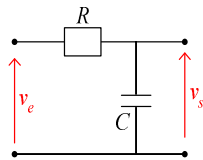
$$\text{Donc } v_s(t) = \sum_{\substack{n \text{ tq} \\ n\omega \ll \omega_0}} \frac{1}{\omega_0} \frac{d(C_n \cos(\omega n t + \varphi_n))}{dt} + \sum_{\text{autres } \omega_0} \frac{1}{\omega_0} \frac{d(C_n \cos(\omega n t + \varphi_n))}{dt}$$

Si la plupart des composantes de Fourier de  $v_e$  sont dans le domaine atténué ( $n\omega \ll \omega_0$ ), alors  $v_s(t) \approx \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_e(t)}{dt}$

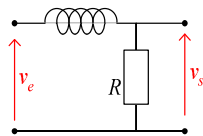
## E) Filtres passe-bas

### 1) Fonction de transfert

En sortie ouverte :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$



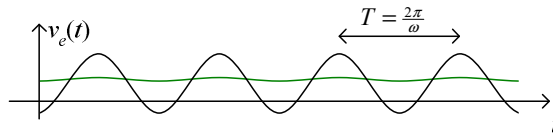
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{R}{L}.$$

Pulsation de coupure :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cdot |\underline{H}(j\omega)|_{\max} = 1 \cdot |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega = \omega_0$$

On a donc un filtre passe-bas, de bande passante  $[0; \omega_0]$

## 2) Application : redressement



On utilise un filtre passe-bas  $\omega_0 \ll \omega$

$$v_e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \approx$$

$$v_s(t) = C_0 \qquad + \qquad 0$$

$$(\underline{H}(0) = 1)$$

## 3) Comportement pseudo-intégrateur

En RSF( $\omega$ ), pour  $\omega \gg \omega_0$  :

$$\underline{H}(j\omega) \sim \frac{1}{j\omega / \omega_0} \sim \frac{\omega_0}{j\omega}$$

$$\text{Donc } \underline{V}_s = \frac{\omega_0 V_e}{j\omega}. \text{ Donc } v_s(t) = \omega_0 \int_{t_0}^t v_e(t') dt'$$

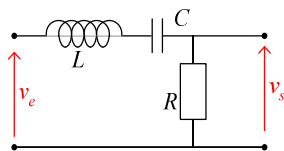
Pour un signal périodique ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ) de moyenne nulle :

$$v_e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n) \quad (C_0 = 0)$$

$$\text{avec } \omega \gg \omega_0, \quad v_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_0 \int_{t_0}^t C_n \cos(\omega n t' + \varphi_n) dt' = \omega_0 \int_{t_0}^t v_e(t') dt'$$

## F) Exemple de filtre du 2<sup>nd</sup> ordre

Filtre LC,R :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Etude du diagramme de Bode :

En basse fréquence,  $|Z_C| \gg R$  et  $|Z_C| \gg |Z_L|$

C'est-à-dire  $RC\omega \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll \frac{1}{RC} = \omega_1$  et  $\frac{1}{C\omega} \gg L\omega \Leftrightarrow \omega \ll \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\underline{H}(j\omega) \sim \frac{R}{\frac{1}{jC\omega}} \sim j \frac{\omega}{\omega_1}$$

Donc  $G_{dB}(\omega) \sim 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$ .

Donc  $G_{dB}(\omega)$  a une asymptote d'équation  $G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$

En haute fréquence,  $|Z_L| \gg R$  et  $|Z_L| \gg |Z_C|$

De même, avec  $\omega_2 = \frac{R}{L}$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{R}{j\omega L} \sim \frac{1}{j\omega/\omega_2}$

Donc  $G_{dB}(\omega)$  a une asymptote d'équation  $G_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_2}$

Comparaison des pulsations :

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{RC} \times \frac{R}{L} = \omega_0^2$$

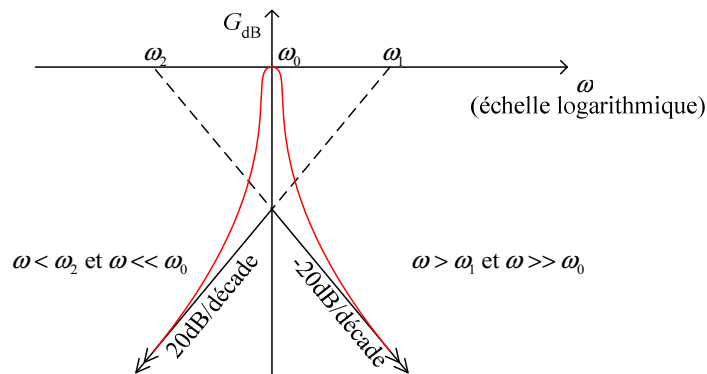
$$\text{Donc } \log_{10} \omega_0 = \frac{\log_{10} \omega_1 + \log_{10} \omega_2}{2}$$

$$\omega_1 / \omega_2 = \frac{1}{RC} \times \frac{L}{R} = \frac{L^2}{R^2 LC} = \frac{L^2 \omega_0^2}{R^2} = Q^2$$

Si  $Q > 1$ ,  $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$

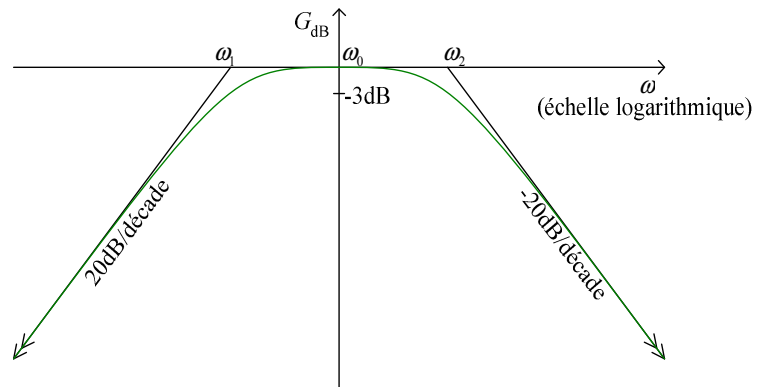
Si  $Q < 1$ ,  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$

Cas  $Q \gg 1$  :



Le gain est maximum quand  $\omega = \omega_0$ ,  $G(\omega_0) = 1$ . On a un filtre passe bande (très sélectif : la bande est très petite)

Cas  $Q < 1$  :



pour les fréquences intermédiaires :  $G_{dB} \approx 0$

Bande passante  $\approx [\omega_1; \omega_2]$