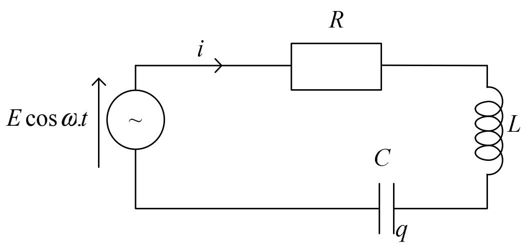
Chapitre 3 : Régime sinusoïdal forcé

I Définitions

A) Régime sinusoïdal forcé



Loi des mailles :

$E\cos\omega.t = \dfrac{q}{C} + L\dfrac{di}{dt} + Ri$ avec $i = \dfrac{dq}{dt}$

Donc $E\cos\omega.t = L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{C} + R\dfrac{dq}{dt}$

$q(t) = \text{Solution générale homogène} + \text{Solution particulière}$

Solution générale homogène : solution qui tend vers 0 de façon exponentielle avec une constante de temps τ qui dépend des caractéristiques des dipôles du circuit (Ici, $\tau = \dfrac{L}{2R}$). Cette solution correspond donc au régime transitoire.

Solution particulière : on s'intéresse à l'unique solution particulière périodique, après disparition de tout les transitoires (qui tendent vers 0). On appelle cette solution le régime sinusoïdal forcé (R.S.F.).

Le régime sinusoïdal forcé est une solution périodique sinusoïdale, avec la même pulsation que l'excitation (2^{nd} membre)

$q(t) = Q\cos(\omega.t + \varphi)$

B) Grandeurs sinusoïdales – complexes

Soit $x(t) = X\cos(\omega.t + \varphi)$ une grandeur sinusoïdale (G.S.).

ω (>0) est la pulsation de la grandeur sinusoïdale (si $\omega < 0$, transformer)

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est la période, F ou $\upsilon = \dfrac{1}{T}$ la fréquence.

X (>0) est l'amplitude de la grandeur sinusoïdale, φ la phase à l'origine, et $\omega.t + \varphi$ la phase à l'instant t.

Complexes : on note j une solution de $x^2 = -1$ (pour éviter les conflits de notation avec l'intensité).

Un nombre complexe est noté $\underline{z}$ (ou $\overline{z}$) $= x + j\times y = z\times e^{j\varphi}$ avec $z = |\underline{z}| \geq 0$ et $\varphi = \arg \underline{z} \in [0;2\pi[$. (remarque : un complexe conjugué est noté $\underline{z}^*$)

Relation de passage : $\begin{cases} x = z\cos\varphi \\ y = z\sin\varphi \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \text{ si } x > 0 \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés :

$$|\underline{z_1}\times\underline{z_2}| = z_1 z_2 \ ; \quad \left|\frac{1}{\underline{z}}\right| = \frac{1}{z}$$

$$\arg(\underline{z_1}\times\underline{z_2}) = \arg\underline{z_1} + \arg\underline{z_2} \ ; \quad \arg\frac{1}{\underline{z}} = -\arg\underline{z}$$

II Notation complexe

A) Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

A une grandeur sinusoïdale $x(t) = X\cos(\omega.t+\varphi)$, on associe la grandeur complexe (G.C.) $\underline{x}(t) = Xe^{j(\omega.t+\varphi)}$

On a :

$$* \ \underline{x}(t) = Xe^{j(\omega.t+\varphi)}$$
$$= X\cos(\omega.t+\varphi) + jX\sin(\omega.t+\varphi)$$
$$= X\cos(\omega.t+\varphi) + jX\cos\left(\omega.(t-\frac{\pi}{2\omega})+\varphi\right)$$
$$= x(t) + j\times x(t-\frac{\pi}{2\omega})$$

$$* \ x(t) = X\cos(\omega.t+\varphi)$$
$$= \mathrm{Re}(\underline{x}(t))$$

L'association de $x(t)$ et $\underline{x}(t)$ est donc unique.

$\underline{x}(t) = Xe^{j(\omega.t+\varphi)} = Xe^{j\varphi}e^{j\omega.t} = \underline{X}e^{j\omega.t}$

$\underline{X}$: amplitude complexe, contient toute l'information sur l'amplitude réelle X de la grandeur sinusoïdale et sur la phase à l'origine φ (de la grandeur sinusoïdale)

B) Propriétés de la notation complexe

1) Linéarité

Pour toutes grandeurs sinusoïdales x, y à la pulsation ω, pour tous réels α, β constants, on a :

$$\underline{\alpha x + \beta y} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}$$

Démonstration :

$\alpha x + \beta y = \alpha \cos(\omega.t+\varphi) + \beta \cos(\omega.t+\varphi)$. C'est donc une grandeur sinusoïdale à la pulsation ω. On peut lui associer une grandeur complexe :

$$\underline{\alpha x + \beta y} = (\alpha x + \beta y)(t) + j(\alpha x + \beta y)(t - \frac{\pi}{2\omega})$$
$$= \alpha\left(x(t) + j.x(t - \frac{\pi}{2\omega})\right) + \beta\left(y(t) + j.y(t - \frac{\pi}{2\omega})\right)$$
$$= \alpha \underline{x} + \beta \underline{y}$$

2) Dérivation

Soit une grandeur sinusoïdale $x(t) = X\cos(\omega.t+\varphi)$. La grandeur complexe associée est $\underline{x}(t) = Xe^{j(\omega.t+\varphi)}$

On a :

$$\frac{dx}{dt} = -X\omega\sin(\omega.t+\varphi) = -X\omega\cos(\omega.t+\varphi-\frac{\pi}{2}) = X\omega\cos(\omega.t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

C'est donc une grandeur sinusoïdale.

On peut lui associer la grandeur complexe :

$$\underline{\frac{dx}{dt}} = X\omega e^{j(\omega.t+\varphi+\frac{\pi}{2})} = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} Xe^{j(\omega.t+\varphi)} = j\omega\underline{x}$$

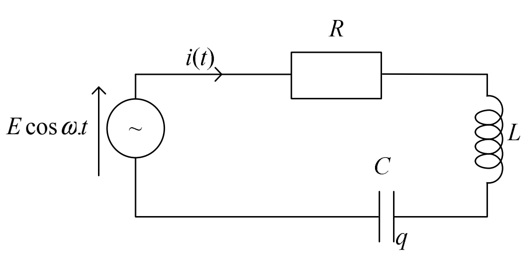
3) Intégration

Soit une grandeur sinusoïdale $x(t) = X\cos(\omega.t+\varphi)$. On s'intéresse à l'unique primitive de x qui est une grandeur sinusoïdale (constante d'intégration nulle) :

$$\int_0^t x(t')dt' = \frac{1}{\omega}X\sin(\omega.t+\varphi) = \frac{1}{\omega}X\cos(\omega.t+\varphi-\frac{\pi}{2})$$

Donc $\underline{\int_0^t x(t')dt'} = \frac{1}{\omega}Xe^{j(\omega.t+\varphi-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}Xe^{j(\omega.t+\varphi)} = \frac{1}{j\omega}\underline{x}$

C) Application



D'après la loi des mailles, $E\cos\omega.t = L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$

Solution du régime sinusoïdal forcé : $q(t) = Q\cos(\omega.t + \varphi)$

On a donc :

$$Ee^{j\omega.t} = L(j\omega)^2\underline{q} + jR\omega\underline{q} + \frac{\underline{q}}{C}$$

$$Ee^{j\omega.t} = \underline{q} \times \left(-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C}\right)$$

$$Ee^{j\omega.t} = Qe^{j(\omega.t+\varphi)} \times \left(-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C}\right)$$

$$Ee^{j\omega.t} = \underline{Q}e^{j\omega.t} \times \left(-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C}\right) \text{ avec } \underline{Q} = Qe^{j\varphi}$$

$$E = \underline{Q} \times \left(-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C}\right)$$

$$\underline{Q} = \frac{E}{-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C}}$$

Si $E > 0$:

$$Q = \left|\underline{Q}\right| = \frac{E}{\sqrt{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + (R\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg \underline{Q} = \arg E - \arg\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} + jR\omega\right)$$

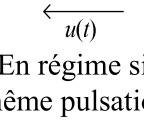
$$= \begin{cases} -\arctan \dfrac{R\omega}{-L\omega^2 + \frac{1}{C}} \text{ si } -L\omega^2 + \frac{1}{C} > 0 \\ \pi - \arctan \dfrac{R\omega}{-L\omega^2 + \frac{1}{C}} \text{ si } -L\omega^2 + \frac{1}{C} < 0 \end{cases}$$

On peut ensuite préciser $q(t) = Q\cos(\omega.t + \varphi)$

III Dipôles linéaires passifs en régime sinusoïdal forcé

A) Impédance complexe d'un dipôle linéaire passif

1) Relation entre *u* et *i*.



En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs électriques sont sinusoïdales à la même pulsation ω.

Un dipôle linéaire vérifie la relation :

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{d^n u}{dt} = C(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{d^n i}{dt}$ (où les a_n et les b_n sont des constantes nulles à partir d'un certain rang). Pour un dipôle linéaire passif, on a $C(t) = 0$.

Donc, avec les grandeurs complexes, en régime sinusoïdal forcé :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (j\omega)^n \underline{u}(t) = C(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (j\omega)^n \underline{i}(t)$$

Soit $\boxed{\underline{u}(t) = \underline{i}(t) \times \underbrace{\dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (j\omega)^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (j\omega)^n}}_{\substack{\text{impédance complexe } \underline{Z}(\omega) \\ \text{du dipôle}}}}$

Donc $\underline{u}$ et $\underline{i}$ sont proportionnels, de coefficient de proportionnalité $\underline{Z}(\omega)$

L'équation s'écrit aussi :

$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$, avec $\underline{u} = \underline{U}e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t}$

(Relation indépendante du temps)

2) Propriétés de l'impédance complexe Z.

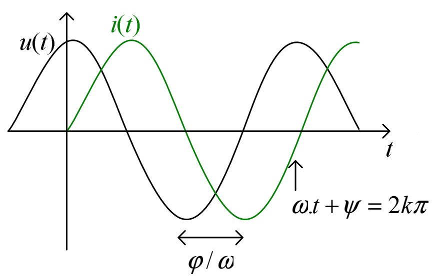
$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$

$\boxed{Z = |\underline{Z}| \text{ impédance du dipôle (en } \Omega\text{)}}$.

$u = U\cos(\omega t + \psi)$ Donc $\underline{U} = Ue^{i\psi}$

Donc $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \dfrac{U}{Z}e^{i(\psi - \varphi)}$

Donc $i(t) = \dfrac{U}{Z}\cos(\omega t + \psi - \varphi)$



$i(t)$ maximum $\Leftrightarrow \omega t + \psi - \varphi = 2k\pi$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{2k\pi}{\omega} - \dfrac{\psi}{\omega} + \dfrac{\varphi}{\omega}$

$u(t)$ maximum $\Leftrightarrow \omega t + \psi = 2k\pi$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{2k\pi}{\omega} - \dfrac{\psi}{\omega}$

Donc $t_{\max}$ de $i = t_{\max}$ de u $+\dfrac{\varphi}{\omega}$

Donc $i(t)$ atteint son maximum après $u(t)$ (si $\varphi > 0$)

$\text{décalage} = \dfrac{\varphi}{\omega} = \dfrac{\varphi}{2\pi} \times T$

φ est l'avance de phase de la tension sur le courant ; $\underline{U} = \underline{I} \times Ze^{j\varphi}$

$\underline{Z} = R + jX$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \mathrm{Re}(\underline{Z}) \text{ résistance du dipôle} \\ X = \mathrm{Im}(\underline{Z}) \text{ réactance du dipôle} \end{array}}$$

3) Admittance complexe

$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \Leftrightarrow \underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{Y}\underline{U}$

$\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$: Admittance complexe du dipôle

$\underline{Y} = Ye^{-j\varphi}$

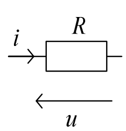
$$\boxed{|\underline{Y}| = \frac{1}{Z} \text{ : Admittance du dipôle (en Siemens : } S\text{)}}.$$

$\underline{Y} = G + jS$

$$\boxed{\begin{array}{l} G = \mathrm{Re}(\underline{Y}) \text{ conductance du dipôle} \\ S = \mathrm{Im}(\underline{Y}) \text{ susceptance du dipôle} \end{array}}$$

B) Impédance complexe de dipôles linéaires usuels

1) Résistance



$\forall t,\ u(t) = R \times i(t)$

En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω, ce sont des grandeurs sinusoïdales. Donc $\underline{u} = R \times \underline{i}$

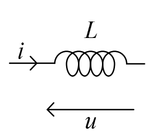
$\underline{Z_R} = R$ impédance complexe de la résistance ($\in \mathbb{R}$)

$Z_R = |\underline{Z_R}| = R$

$\varphi = 0$

$\left(G = \dfrac{1}{R}\,; \quad X = 0\,; \quad S = 0 \right)$

2) Bobine idéale



$\forall t,\ u(t) = L \times \dfrac{di}{dt}$. Donc $\underline{u} = Lj\omega \times \underline{i}$

$\underline{Z_L} = j\omega L$ impédance complexe de la bobine

$\left|\underline{Z_L}\right| = \omega L$

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (tension en avance)

Comportement en haute fréquence $\omega \mapsto +\infty$:

$\left|\underline{Z_L}\right| \mapsto +\infty$ ou $I = \dfrac{U}{\left|\underline{Z_L}\right|} \mapsto 0$

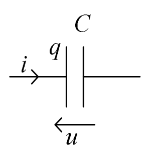
(équivaut donc à un circuit ouvert)

Comportement en basse fréquence $\omega \mapsto 0$

$\left|\underline{Z_L}\right| \mapsto 0$ ou $U = I \times \left|\underline{Z_L}\right| \mapsto 0$

(Equivaut donc à un fil)

3) Condensateur



$\forall t,\ i(t) = C \times \dfrac{du}{dt}$

Donc $\underline{i} = jC\omega \times \underline{u} \Leftrightarrow \underline{u} = \dfrac{1}{jC\omega}\underline{i}$

$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$ impédance complexe du condensateur

$\left|\underline{Z_L}\right| = \omega C$

$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ (tension en retard)

Comportement en haute fréquence $\omega \mapsto +\infty$:

$\left|\underline{Z_C}\right| \mapsto 0$

(équivaut donc à un fil)

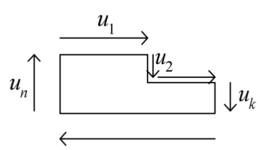
Comportement en basse fréquence $\omega \mapsto 0$

$\left|\underline{Z_C}\right| \mapsto +\infty$

(Equivaut donc à un circuit ouvert)

IV Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω.

A) Lois de Kirchhoff

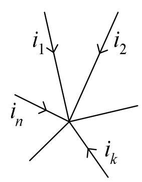


Dans une maille d'un réseau linéaire : d'après la loi des mailles, $\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$

En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω, ce sont des grandeurs sinusoïdales.

Donc $\forall t,\ \underline{u}_1(t)+\underline{u}_2(t)+...+\underline{u}_n(t)=0 \Leftrightarrow \underline{U}_1+\underline{U}_2+...+\underline{U}_n=0$ (où $\underline{u}_k=\underline{U}_k e^{j\omega t}$)

Soit $\sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k = 0$



D'après la loi des nœuds : $\forall t,\ i_1(t)+i_2(t)+...+i_n(t)=0$

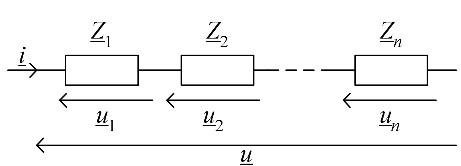
En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω :

$\forall t,\ \underline{i}_1(t)+\underline{i}_2(t)+...+\underline{i}_n(t)=0$

Soit $\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0$

B) Association d'impédances

1) Association en série

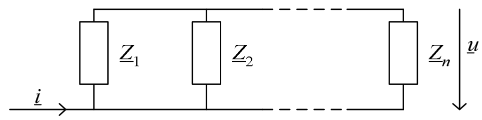


D'après la loi des mailles :

$$\underline{u}=\sum_{k=1}^{n}\underline{u}_k=\sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k\underline{i}=\underline{i}\sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k$$

On a donc un dipôle linéaire d'impédance complexe $\underline{Z}_{éq}=\sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k$

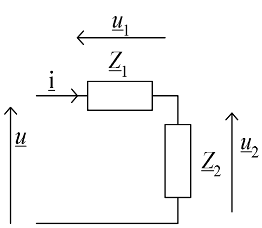
2) Association en parallèle



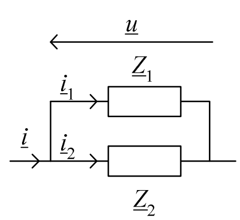
On a donc un dipôle linéaire d'impédance complexe telle que $\dfrac{1}{\underline{Z}_{éq}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\underline{Z}_k}$

ou d'admittance complexe $\underline{Y}_{éq} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k$ (d'après la loi des nœuds)

3) Diviseur de tension et de courant

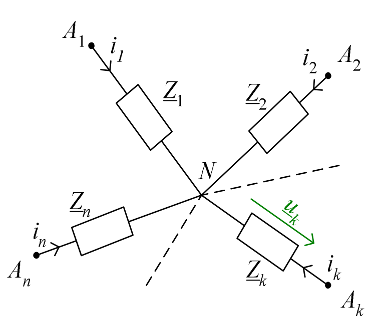


$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{u}$$



$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \times \underline{i}$$

C) Théorème de Millman



D'après la loi des nœuds, $\sum_{k=1}^{n} \underline{i_k} = 0$

et $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\underline{u_k} = \underline{u_{A_k n}} = \underline{v_{A_k}} - \underline{v_n} = \underline{Z_k} \times \underline{i_k}$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{v_{A_k}} - \underline{v_N}}{\underline{Z_k}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{v_{A_k}}}{\underline{Z_k}} - \underline{v_N} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z_k}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\underline{v_N} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{v_{A_k}}}{\underline{Z_k}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z_k}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \underline{v_{A_k}}\,\underline{Y_k}}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y_k}}}$

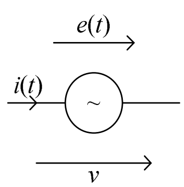
Variante avec un courant :

Loi des nœuds : $\sum_{k=1}^{n} \underline{I_k} = 0 \Leftrightarrow \underline{I_1} + \sum_{k=2}^{n} \underline{I_k} = 0 \Leftrightarrow \underline{I_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\underline{v_{A_i}} - \underline{v_N}}{\underline{Z_i}} = 0$

$\Leftrightarrow \underline{I_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\underline{v_{A_i}}}{\underline{Z_i}} - \underline{v_N} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\underline{Z_i}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\underline{v_N} = \frac{\underline{I_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\underline{v_{A_i}}}{\underline{Z_i}}}{\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\underline{Z_i}}}}$

D) Générateur sinusoïdal

1) Générateur de tension sinusoïdale idéale

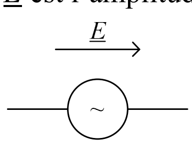


$v(t) = e(t) = E\cos(\omega.t + \psi)$, indépendant de $i(t)$.

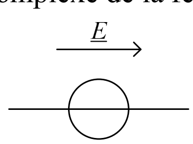
$e(t)$ est la force électromotrice de la source de tension sinusoïdale.

$\underline{v} = \underline{e} = Ee^{j(\omega.t+\psi)} = \underline{E}e^{j\omega.t}$ avec $\underline{E} = Ee^{j\psi}$

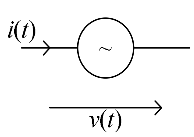
$\underline{E}$ est l'amplitude complexe de la fém de la source.



ou



2) Générateur de courant sinusoïdal idéal

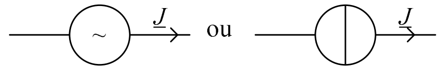


$i(t) = j(t) = J\cos(\omega.t + \psi)$, indépendant de $v(t)$.

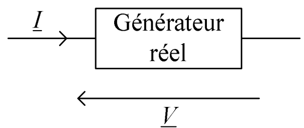
$j(t)$ est le courant électromoteur ou courant de court-circuit.

$\underline{i} = \underline{j} = Je^{j\psi}e^{j\omega t} = \underline{J}e^{j\omega t}$

$\underline{J}$ est l'amplitude complexe du courant de court-circuit.

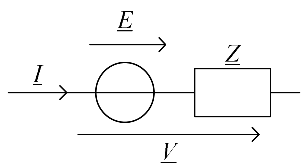


3) Générateur sinusoïdal réel



$\underline{V} = \underline{E} - \underline{Z}\,\underline{I}$

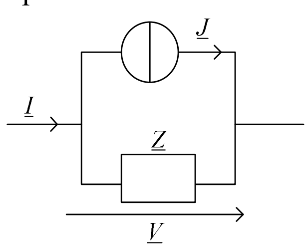
Modélisation (représentation de Thévenin)



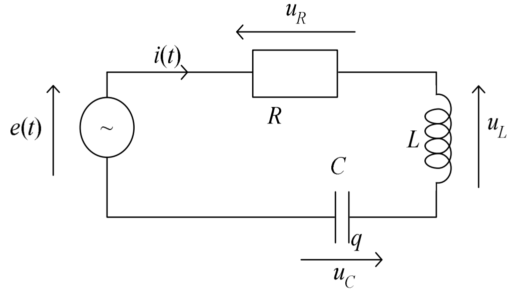
$\underline{E}$: fém du générateur
$\underline{Z}$: impédance interne du générateur

$$\underline{V} = \underline{E} - \underline{Z}\,\underline{I} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{E} - \underline{V}}{\underline{Z}} = \underbrace{\frac{\underline{E}}{\underline{Z}}}_{\underline{J}} - \frac{\underline{V}}{\underline{Z}}$$

Représentation de Norton :



V Résonance d'intensité du *R,L,C* série



$e(t) = E\cos(\omega.t)$; $\quad i(t) = I\cos(\omega.t + \psi)$

$\underline{e}(t) = Ee^{j\omega.t} \quad (\underline{E} = E)$

$\underline{i}(t) = Ie^{j(\omega.t+\psi)} = Ie^{j\psi}e^{j\omega.t} = \underline{I}e^{j\omega.t}$

D'après la loi des mailles :

$$\underline{E} = E = \underline{U_R} + \underline{U_L} + \underline{U_C} = R\underline{I} + j\omega L \times \underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \underline{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

Donc $\underline{I} = \dfrac{E}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$. En considérant que $E > 0$:

$$I = \left|\underline{I}\right| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = I(\omega)$$

$\psi = \arg \underline{I}$ (avance de phase de i sur u)

$$= \arg(E) - \arg\left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)$$

$$= 0 - \arctan\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

$$= \arctan\frac{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

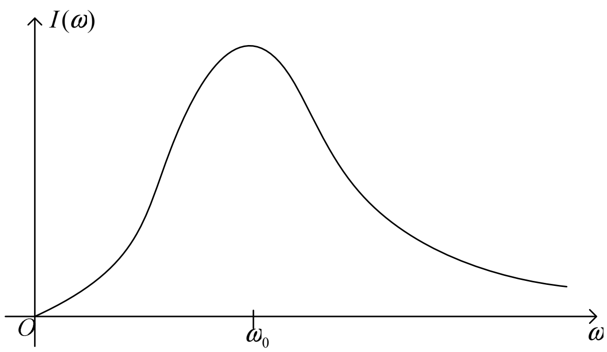
- Etude de $I(\omega)$:

$I(\omega)$ est maximum si $R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2$ est minimum, c'est-à-dire $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$ ou $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} = \omega_0$ (pulsation propre du circuit R,L,C)

$I_{\max} = I(\omega_0) = \dfrac{E}{R}$. Ainsi, l'impédance de l'association du condensateur et de la bobine s'annule.

En basse fréquence ($\omega \mapsto 0$) : $I(\omega) \mapsto 0$ (à cause du condensateur)

En haute fréquence ($\omega \mapsto +\infty$) : $I(\omega) \mapsto 0$ (à cause de la bobine)



On a donc une résonance d'intensité en $\omega = \omega_0$

- Pulsation de coupure à -3dB :

On cherche les deux pulsations pour lesquelles $I(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$

On a :

$$I(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{R\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = \varepsilon R \text{ avec } \varepsilon = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow L\omega^2 - R\omega\varepsilon - \frac{1}{C} = 0$$

$$\Delta = R^2\varepsilon^2 + 4\frac{L}{C} = R^2 + 4\frac{L}{C} > 0$$

Donc $\omega = \dfrac{R\varepsilon \pm \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}$

$\omega > 0$ Donc

$$\omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

On remarque que $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$

ω_0 est donc la moyenne géométrique de ω_1 et ω_2 (au milieu sur un graphique en échelle logarithmique)

$$\boxed{\text{Bande passante } = \left\{\omega, I(\omega) > \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\right\} = [\omega_1, \omega_2]}$$

$$\boxed{\text{Longueur de bande passante } = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}}$$

Facteur de qualité : $\Delta\omega = \frac{R}{L} = \frac{R}{L\omega_0}\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$. Donc $\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$

La résonance est d'autant plus aigue/marquée que Q est grand (pour $Q > 1$)

- Etude de $\psi(\omega)$

$$\psi(\omega) = \arctan \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

En basse fréquence : $\lim_{\omega \to 0} \psi = \frac{\pi}{2}$ (*u* en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à *i*)

(On a $\left|\underline{Z_R} + \underline{Z_L}\right| << \left|\underline{Z_C}\right|$ car $\left|\underline{Z_C}\right| \mapsto +\infty$, c'est donc comme si on a un condensateur seul)

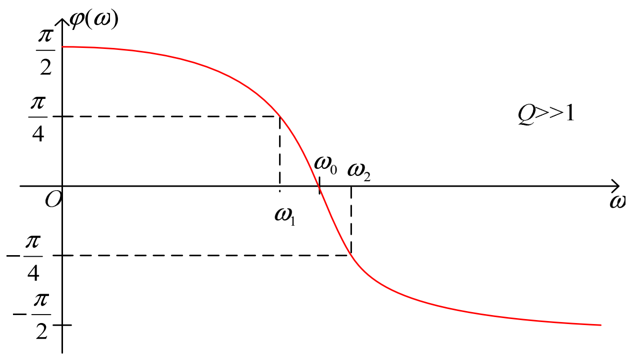
En haute fréquence, $\lim_{\omega \to +\infty} \psi = -\frac{\pi}{2}$ (i en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à u)

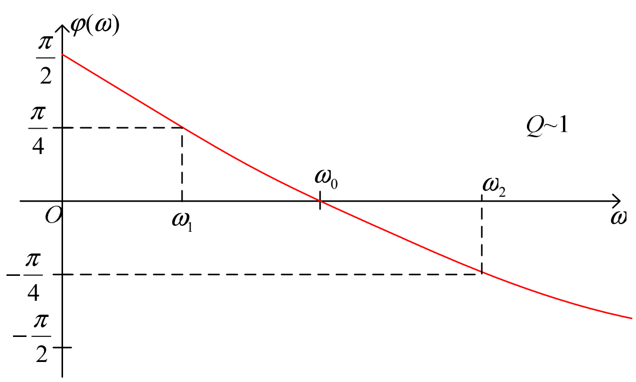
(Idem que précédemment pour la bobine)

A la résonance, $\psi(\omega_0) = \arctan(0) = 0$. Donc i et u sont en phase. L'association des dipôles correspond à la résistance seule.

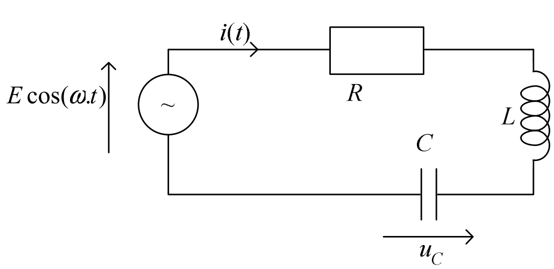
$$\psi(\omega_1) = \arctan\left(\frac{-\varepsilon R}{R}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (\varepsilon = \text{-}1)$$

$$\psi(\omega_2) = \arctan\left(\frac{-\varepsilon R}{R}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (\varepsilon = 1)$$





VI Résonance de tension aux bornes du condensateur



$(E > 0)$

$u_C(t) = U_C \cos(\omega.t + \varphi)$

$\underline{u_C} = \underline{U_C} e^{j\omega.t}$ avec $\underline{U_C} = U_C e^{j\varphi}$

Diviseur de tension :

$$\underline{U_C} = E\frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_L}+\underline{Z_C}} = \frac{E\times\frac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{E}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $x = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$; $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

$$U_C = \left|\underline{U_C}\right| = \frac{E}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}}$$

$$LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = x\ ;\quad R^2C^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\times R^2C^2\omega_0^2 = x\times\frac{R^2}{L^2\omega_à^2} = x\times\frac{1}{Q^2}$$

Donc $U_C = \frac{E}{\sqrt{(1-x)^2+\frac{x}{Q^2}}}$

$$\varphi = \arg\underline{U_C} = -\arg(1-LC\omega^2+jRC\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right) \text{ si } \omega<\omega_0 \\ \pi-\arctan\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right) \text{ si } \omega>\omega_0 \end{cases}$$

- Etude de $U_C(\omega)$

$U_C(0) = E$ (le courant est nul dans le circuit donc $u_L = u_R = 0$ donc $u_C = E$)

$U_C(+\infty) = 0$

On a : $\frac{dU_C}{d\omega} = \frac{dU_C}{dx}\times\frac{dx}{d\omega} = \frac{dU_C}{dx}\times\frac{2\omega}{\omega_0^2}$

Donc $\frac{dU_C}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{dU_C}{dx} = 0 \end{cases}$

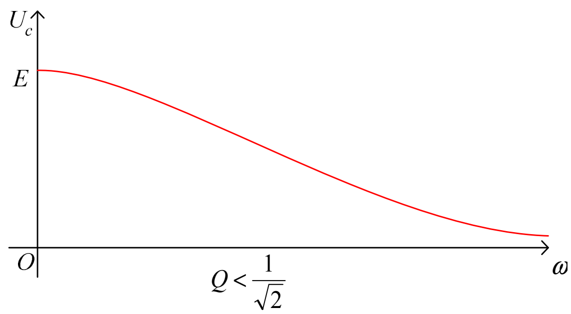
On cherche $\frac{dU_C}{dx} = 0$

$$\frac{dU_C}{dx} = \frac{E\times(-\frac{1}{2})\times(-2(1-x)+\frac{1}{Q^2})}{\left.\left((1-x)^2+\frac{x}{Q^2}\right)^{3/2}\right\}>0 \text{ car } x\geq 0}$$

$$\frac{dU_C}{dx} = 0 \Leftrightarrow -2(1-x)+\frac{1}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1-\frac{1}{2Q^2}$$

$$1-\frac{1}{2Q^2}\geq 0 \Leftrightarrow Q\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $Q<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{dU_C}{dx}$ ne s'annule pas. On a donc un seul extremum en $\omega = 0$.



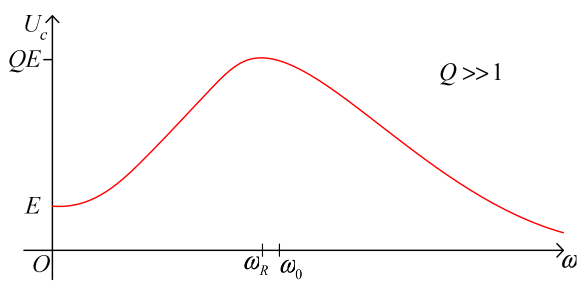
Si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=1-\frac{1}{2Q^2}$

$$\omega_R=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}<\omega_0$$

$$U_C(\omega_R)=\frac{E}{\sqrt{(1-x_R)^2+\frac{x_R}{Q^2}}} \text{ avec } x_R=\frac{\omega_R^2}{\omega_0^2}$$

$$=\ldots=\frac{QE}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

Si $Q>>1$: $U_{C_{\max}}\approx QE$



$$\omega_R=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\approx\omega_0$$

Q est alors le facteur/coefficient de surtension.

- Pulsation de coupure à -3dB

$$U_C(x)=\frac{E}{\sqrt{(1-x)^2+\frac{x}{Q^2}}} \text{ avec } x=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$U_{C_{\max}}=U_C(x_R)=\frac{QE}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

On cherche les pulsations telles que $U_C(x)=\frac{U_{C_{\max}}}{\sqrt{2}}$ $(Q>\frac{1}{\sqrt{2}})$

On a :

$$U_C(x) = \frac{U_{C_{\max}}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (1-x)^2 + \frac{x}{Q^2} = \frac{2}{Q^2}(1-\frac{1}{4Q^2})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (\frac{1}{Q^2}-2)x + (1-\frac{2}{Q^2}+\frac{1}{4Q^2}) = 0$$

$$\Delta = (\frac{1}{Q^2}-2)^2 - 4(1-\frac{2}{Q^2}+\frac{1}{4Q^2}) = \frac{4}{Q^2} - \frac{1}{Q^4} = \frac{1}{Q^2}(4-\frac{1}{Q^2}) > 0 \text{ car } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $x_{1,2} = \dfrac{2-\frac{1}{Q^2} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2}(4-\frac{1}{Q^2})}}{2}$

On suppose $x_1, x_2 > 0$ (Q assez grand)

$\omega_1 = \omega_0\sqrt{x_1}$; $\omega_2 = \omega_0\sqrt{x_2}$ ($\omega_1 < \omega_2$)

Bande passante $= [\omega_1, \omega_2]$

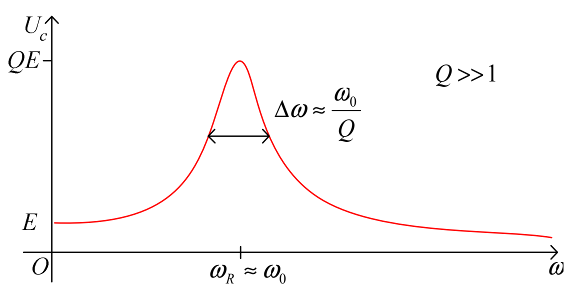
Largeur de la bande passante $= \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2 + \omega_1}$

Si $Q >> 1$: $x_1 \approx x_2 \approx 1$ (c'est-à-dire $\omega_1 \approx \omega_0 \approx \omega_2$)

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_0} \approx \frac{\omega_0^2}{2\omega_0}(x_2 - x_1) \approx \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\Delta}$$

et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\dfrac{1}{Q^2}(4-\dfrac{1}{Q^2})} = \dfrac{1}{Q}\sqrt{4-\dfrac{1}{Q^2}} \approx \dfrac{2}{Q}$

Donc $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \dfrac{1}{Q}$



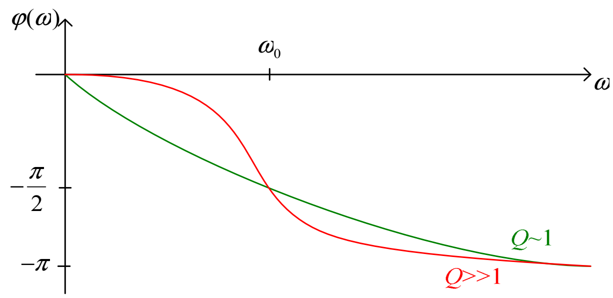
- Etude de $\varphi(\omega)$:

$\varphi(\omega) = \arg(\underline{U_C})$ (Avance de phase de u par rapport à $e(t)$)

$$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2} \quad (+\pi \text{ si } \omega \geq \omega_0)$$

$$\lim_{\omega\to 0}\varphi(\omega) = 0 \; ; \quad \lim_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega) = 0 + \pi \; [\pi]$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0^-}\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \; ; \quad \lim_{\omega\to\omega_0^+}\varphi(\omega) = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \; [2\pi]$$



VII Puissance en régime sinusoïdal forcé

A) Grandeurs efficaces

On considère une grandeur $x(t)$, périodique de période T (de moyenne nulle sur un nombre entier de périodes)

On pose alors $X_{\text{éff}}$ tel que :

$$X_{\text{éff}}^2 = \langle x^2(t) \rangle_{\substack{T \\ \text{ou } nT \\ \text{ou } \mathbb{R}}} = \frac{1}{nT}\int_{t_0}^{t_0+nT} x^2(t)dt$$

Dans le cas particulier d'une grandeur sinusoïdale :

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$X_{\text{éff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T X^2\cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{X^2}{2T}\int_0^T (\cos(2\omega t + 2\varphi) + 1)dt$$

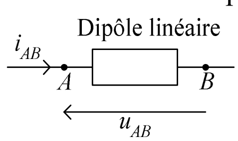
$$= \frac{X^2}{2T} \times T = \frac{X^2}{2}$$

Donc $\boxed{X_{\text{éff}} = \frac{X}{\sqrt{2}}}$

Exemple : EDF fournit une tension de 220V efficaces.
Donc $U_{\text{éff}} = 220V$ et $U = 310V$

B) Facteur de puissance

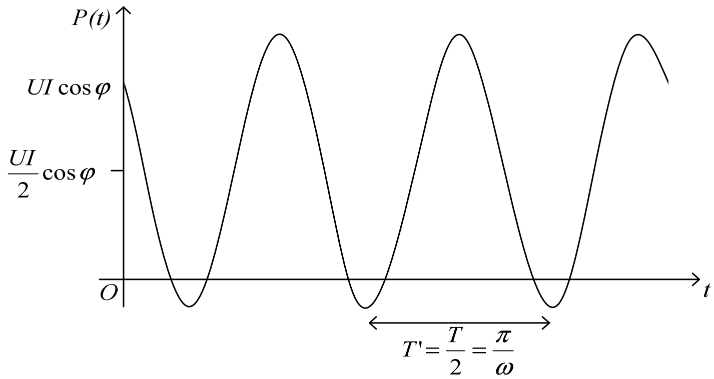
On considère un dipôle linéaire en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω.



$u_{AB}(t) = U\cos(\omega t)$ $\quad i_{AB} = I\cos(\omega t - \varphi)$ (φ est l'avance de phase de u sur i)

$$P(t) = u_{AB}(t) \times i_{AB}(t) = UI\cos(\omega t) \times \cos(\omega t - \varphi) = UI \times \frac{1}{2}(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi)$$

Donc $P(t)=\frac{UI}{2}\cos\varphi+\frac{UI}{2}(2\omega.t-\varphi)$



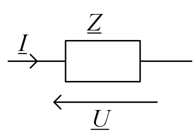
On note P_m la puissance moyenne / puissance active du dipôle :

$P_{\text{m}}=\langle P(t)\rangle_{T'}=\frac{UI}{2}\cos\varphi=U_{\text{éff}}I_{\text{éff}}\cos\varphi$

$\cos\varphi$ est ici le facteur de puissance du dipôle.

$I_{\text{éff}}=\frac{P_{\text{m}}}{U_{\text{éff}}\cos\varphi}$. Il faut donc que $\cos\varphi$ soit le plus grand possible pour que $I_{\text{éff}}$ soit minimal afin de minimiser les pertes Joules.

C) Pour un dipôle linéaire passif



$\underline{U}=\underline{Z}\,\underline{I}$

$\underline{Z}=Ze^{j\varphi}$; $\varphi=\arg(\underline{Z})$, avance de la tension sur le courant.

$\underline{Z}=R+jX$

$\quad=Z\cos\varphi+jZ\sin\varphi$

$P_{\text{m}}=\frac{1}{2}UI\cos\varphi$ et $|\underline{U}|=|\underline{Z}||\underline{I}|$, soit $U=Z\times I$.

Donc $P_{\text{m}}=\frac{1}{2}Z\times I^2\cos\varphi=\frac{1}{2}I^2\times Z\cos\varphi=R\times I_{\text{éff}}^2$

Ou $P_{\text{m}}=\frac{1}{2}Y\times U^2\cos\varphi=\frac{1}{2}U^2\times G=G\times U_{\text{éff}}^2$

(car $\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}=Ye^{-j\varphi}=Y\cos\varphi-jY\sin\varphi=G+jS$)

Cas particuliers :

Résistance R : $P_{\text{m}}=R\times I_{\text{éff}}^2$

Bobine et condensateur : $P_{\text{m}}=0$ (car $R=0:\underline{Z}=jX$)

D) Puissance et notation complexe

Définition : puissance complexe $\boxed{\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{u} \times \underline{i}^*}$

$u = U\cos(\omega.t + \psi)$; $\underline{u} = Ue^{j(\omega.t+\psi)}$

$i = I\cos(\omega.t + \psi - \varphi)$; $\underline{i}^* = Ie^{-j(\omega.t+\varphi-\varphi)}$

Donc $\underline{P} = \frac{1}{2}U \times I \times e^{j\varphi} = \frac{1}{2}Ue^{j\psi} \times Ie^{j(-\psi+\varphi)} = \frac{1}{2}\underline{U} \times \underline{I}^*$

On note : $\underline{P} = P_{\text{ac}} + jP_{\text{r}}$ où :

P_{ac} est la puissance active (partie réelle)

P_{r} est la puissance réactive (partie imaginaire)

$\underline{P} = P_{\text{ac}} + jP_{\text{r}} = U_{\text{éff}} I_{\text{éff}} \cos\varphi + jU_{\text{éff}} I_{\text{éff}} \sin\varphi$

Donc

$P_{\text{ac}} = U_{\text{éff}} I_{\text{éff}} \cos\varphi$

$P_{\text{r}} = U_{\text{éff}} I_{\text{éff}} \sin\varphi$

P_{ac} correspond à la puissance consommée par le dipôle.

Pour un dipôle complexe d'impédance $\underline{Z}$:

$\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{U} \times \underline{I}^* = \frac{1}{2}\underline{Z} \times \underline{I} \times \underline{I}^* = \frac{1}{2}\underline{Z} \times I^2 = I_{\text{éff}}^2 \underline{Z}$

Ou, de même : $\underline{P} = U_{\text{éff}}^2 \underline{Y}^*$

Donc

$P_{\text{ac}} = R \times I_{\text{éff}}^2 = G \times U_{\text{éff}}^2$

$P_{\text{r}} = X \times I_{\text{éff}}^2 = -S \times U_{\text{éff}}^2$

Exemples :

Résistance R : $P_{\text{ac}} = R \times I_{\text{éff}}^2$ $\quad P_{\text{r}} = 0$

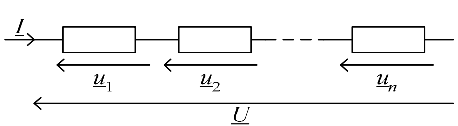
Bobine L : $P_{\text{ac}} = 0$ $\quad P_{\text{r}} = L\omega \times I_{\text{éff}}^2 = \frac{1}{L\omega} \times U_{\text{éff}}^2$

Condensateur C : $P_{\text{ac}} = 0$ $\quad P_{\text{r}} = \frac{-1}{C\omega} \times I_{\text{éff}}^2 = -C\omega \times U_{\text{éff}}^2$

P_{r} représente donc la puissance stockée par le dipôle (mesurée en V.A.R : vol ampère réactifs).

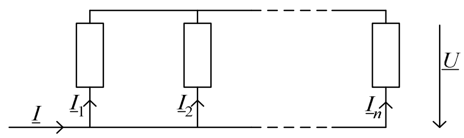
E) Théorème de Boucherot

Association en série de dipôles linéaires :



$\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{U} \times \underline{I}^* = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \underline{U_k}\right) \times \underline{I}^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\underline{U_k}\,\underline{I}^* = \sum_{k=1}^{n} \underline{P_k}$

Association en parallèle de dipôles linéaires



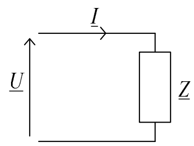
$$\underline{P}=\frac{1}{2}\underline{U}\times\underline{I}^*=\frac{1}{2}\underline{U}\left(\sum_{k=1}^{n}\underline{I}_k\right)^*=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\underline{U}\,\underline{I}_k{}^*=\sum_{k=1}^{n}\underline{P}_k$$

Cette relation est donc valable pour n'importe quel réseau.

$$P_{\text{ac}}(\text{total})=\sum_{k=1}^{n}\underline{P}_{ac\,k}$$

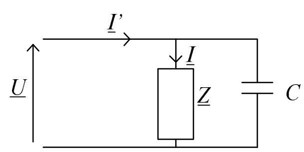
$$P_{\text{r}}(\text{total})=\sum_{k=1}^{n}\underline{P}_{r\,k}$$

F) Augmentation du facteur de puissance d'une installation électrique



$P_{\text{m}}=U_{\text{éff}}I_{\text{éff}}\cos\varphi$ avec $\varphi=\arg(\underline{Z})$. Pour avoir $I_{\text{éff}}$ le plus petit possible, il faut donc avoir $\cos\varphi$ le plus grand possible.

Nouvelle installation :



$$P_{\text{ac}}=P_{\text{ac}}(\underline{Z})+P_{\text{ac}}(\underline{C})=P_{\text{m}}+0=P_{\text{m}}$$

$$P_{\text{ac}}=U_{\text{éff}}I'_{\text{éff}}\cos\varphi'$$

Donc $\cos\varphi'=\dfrac{P_{\text{ac}}}{U_{\text{éff}}I'_{\text{éff}}}=\dfrac{\text{Re}(\underline{Z}')I'^2_{\text{éff}}}{U_{\text{éff}}I'_{\text{éff}}}=\dfrac{\text{Re}(\underline{Z}')}{Z'}$ (où $\underline{Z}'$ est l'association de C et $\underline{Z}$)

On a : $\underline{Z}'=\dfrac{\underline{Z}\dfrac{1}{jC\omega}}{\underline{Z}+\dfrac{1}{jC\omega}}=\dfrac{\underline{Z}}{1+jC\omega\underline{Z}}$ (diviseur de courant)

Avec $\underline{Z}=R+jX$, on obtient alors :

$$\underline{Z}'=\frac{R(1-CX\omega)+RCX\omega+j(X(1-CX\omega)-R^2C\omega)}{(1-CX\omega)^2+R^2C^2\omega^2}=\frac{R+j(X-C\omega(X^2+R^2)}{(1-CX\omega)^2+R^2C^2\omega^2}$$

Ainsi, $\cos\varphi'=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+(X-C\omega(X^2+R^2))^2}}$. Pour que $\cos\varphi'=1$, il faut donc que $R=\sqrt{R^2+(X-C\omega(X^2+R^2))^2}$, soit $C=\dfrac{X}{\omega(X^2+R^2)}$.

Ainsi, $I'_{\text{éff}}<I_{\text{éff}}$; on a moins de pertes Joule.