Chapitre 6 : Dénombrement

Dans ce chapitre, les lettres E, F, G, A, B, C,...désignent des ensembles, et les lettres n, m, p, a, b, c,...des entiers.

Préliminaires

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases}. \tag{6.1}$$

Lorsque $E = \varnothing$, il y a une seule application de E vers F. Cette application est injective (et surjective si et seulement si $F = \varnothing$)

I Ensembles finis et cardinaux : les bases

A) Supposé connu

- La notion d'ensemble fini ou infini.
- Ce qu'est le cardinal d'un ensemble fini ($\operatorname{card}(\varnothing) = 0$).
- Pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$, $\operatorname{card}(\llbracket p, n \rrbracket) = n - p + 1$.

Proposition (admise) :

- Si E est fini, et si $F \subset E$, alors F est fini, et $\operatorname{card}(F) \leqslant \operatorname{card}(E)$. Si E et F sont disjoints et finis, alors $F \cup E$ est fini, et $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)$.

B) Conséquences

Si $E_1, E_2, \dots E_n$ sont finis et disjoints deux à deux, alors $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ est un ensemble fini de cardinal $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E_k)$ (Cet ensemble est aussi noté $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$).

Proposition :

Si E et F sont finis, alors $E \cup F$ est fini et $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F)$

Démonstration :

On a $E \cup F = E \cup (F \backslash E)$. Or, $F \backslash E \subset F$, donc $F \backslash E$ est fini. Les ensembles E et $F \backslash E$ sont disjoints. Donc $E \cup (F \backslash E)$ est fini et $\operatorname{card}(E \cup (F \backslash E)) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F \backslash E)$. Donc $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F \backslash E)$. Par ailleurs, $(F \backslash E) \cup (F \cap E) = F$, et $F \backslash E$ et $F \cap E$ sont disjoints et finis. Donc $\operatorname{card}(F \backslash E) + \operatorname{card}(F \cap E) = \operatorname{card}(F)$. Soit : $\operatorname{card}(F \backslash E) = \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(F \cap E)$. Donc $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F)$.

C) Résultats liant applications entre ensembles finis et comparaison de leurs cardinaux (admis)

Proposition (admise) :
Si E est fini, on a les équivalences :

- il existe une injection de E dans $F \iff F$ est infini ou $\text{card}(F) \geqslant \text{card}(E)$.
- il existe une surjection de E dans $F \iff F$ est fini et $\text{card}(F) \leqslant \text{card}(E)$.
- il existe une bijection de E dans $F \iff F$ est fini et $\text{card}(F) = \text{card}(E)$.

Proposition (Autre résultat admis) :
Soient E, F de même cardinal et finis. Soit $f : E \to F$. On a les équivalences :

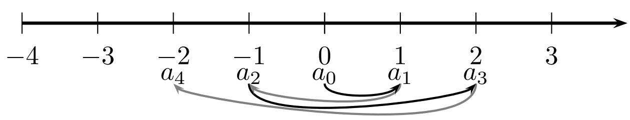
- f est injective $\iff f$ est bijective.
- f est surjective $\iff f$ est bijective.

D) Notion d'ensemble dénombrable

Définition :
Soit E un ensemble. E est dénombrable lorsque E est fini ou lorsque E est en bijection avec $\mathbb{N}$ (E est alors infini dénombrable).

Exemple :

- $\mathbb{N}$ est dénombrable. L'ensemble des nombres pairs P est dénombrable. En effet, $\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & P \\ k & \longmapsto & 2k\end{array}$ est bijective.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable :



- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable :

	0	1	2	3	4
0	$^0(0,0)$	$^2(0,1)$	$^5(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$
1	$^1(1,0)$	$^4(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
2	$^3(2,0)$	$(2,1)$			
3	$(3,0)$	$(3,1)$			
4	$(4,0)$	$(4,1)$			

(6.2)

- $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- L'ensemble E des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable ($u_k = 100100011\ldots$).

Démonstration :

Supposons qu'il le soit. On peut alors écrire la suite des éléments de E :

$$\begin{aligned} f(0) &= 10011001001\ldots 11\ldots \\ f(1) &= 10010001110\ldots 01\ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.3}$$

Pour chaque $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on note $a_{n,p}$ le terme d'indice p du n-ième élément de E. On a alors un tableau :

$$\begin{array}{rcccccc} f(0) = & \boxed{a_{0,0}} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & a_{0,4} & \cdots \\ f(1) = & a_{1,0} & \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\ f(2) = & a_{2,0} & a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots \end{array} \tag{6.4}$$

Soit u la suite de E définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_{k,k} = 1 \\ 1 \text{ si } a_{k,k} = 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

Alors u n'est pas dans le tableau : non$(\exists n \in \mathbb{N}, u = f(n))$ En effet, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = f(n)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = a_{n,k}$, et en particulier $u_n = a_{n,n}$, ce qui est impossible.

Théorème (admis) :

Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

II Dénombrement classique

Dans ce paragraphe, tous les ensembles considérés sont finis.

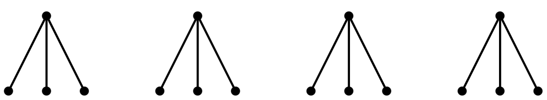
A) card$(E \times F)$

Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$, alors $\text{card}(E \times F) = n \times p$.

Démonstration :

informelle $\text{card}(E \times F)$ = nombre d'éléments de $E \times F$. Nombre d'éléments = nombre de façons de « faire » un élément. Pour faire un élément (a,b) de $E \times F$, on doit choisir a dans n éléments, et b dans p éléments.

visualisation On peut choisir le couple (a,b) en deux fois :



Choix de a

Choix de b

formelle $E \times F = \bigcup_{a \in E} \{a\} \times F$.Pour chaque $a \in E$, $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \{a\} \times F \\ y & \longmapsto & (a,y \end{array}$ est bijective. Donc $\text{card}(\{a\} \times F) = \text{card}(F)$. Les $\{a\} \times F$ pour $a \in E$ sont disjoints deux à deux. Donc $\text{card}(E \times F) = \sum_{a \in E} \text{card}(\{a\} \times F) = \sum_{a \in E} \text{card}(F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Conséquence :

$$\mathrm{card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = \mathrm{card}(E_1) \times \mathrm{card}(E_2) \times \ldots \times \mathrm{card}(E_n) \tag{6.6}$$

$$\mathrm{card}(E^m) = (\mathrm{card}(E))^m \tag{6.7}$$

$\mathrm{card}(E^m)$ est le nombre de m-uplets $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ d'éléments de E.

B) $\mathrm{card}(\mathscr{F}(E, F))$

Proposition :

$$\mathrm{card}(\mathscr{F}(E, F)) = (\mathrm{card}(F))^{\mathrm{card}(E)} \tag{6.8}$$

Démonstration :

$E = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ où les a_i sont distincts deux à deux, $F = \{b_1, b_2, \ldots b_p\}$ où les b_j sont distinct deux à deux. Pour fabriquer une application de E dans F :

1. image de a_1 : p possibilités.
2. image de a_2 : p possibilités.

...n. image de a_n : p possibilités.

Donc p^n possibilités en tout.

Remarque :

En particulier, $\mathrm{card}(F([\![1, m]\!], E)) = (\mathrm{card}(E))^m$

C) $\mathrm{card}(\mathscr{P}(E))$

Proposition :

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)} \tag{6.9}$$

Démonstration :

On note $n = \mathrm{card}(E)$, $E = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$. Se donner une partie A de E, c'est se donner la liste $(r_1, r_2, \ldots r_n)$ de 0 et de 1 définie par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], r_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_k \notin A \\ 1 \text{ si } a_k \in A \end{cases} \tag{6.10}$$

Or, il y a 2^n telles listes (voir B)).

Plus formellement, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0, 1\}^n \\ A & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots x_n) \end{array}, \tag{6.11}$$

définie par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_k \notin A \\ 1 \text{ si } a_k \in A \end{cases}, \tag{6.12}$$

est bijective.

D) Nombre d'injections de E vers F

Proposition :

On note $p = \mathrm{card}(E)$, $n = \mathrm{card}(F)$. Le nombre d'injections de E vers F est

$$A_n^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \end{cases}. \tag{6.13}$$

Démonstration :

En effet, soit $p \leqslant n$ (le cas où $p > n$ étant évident). Si $p = 0$, alors $A_n^p = 1$, ok (une seule injection d'un ensemble à 0 éléments vers un autre ensemble). Si $1 \leqslant p \leqslant n$, notons alors $E = \{a_1, a_2, \dots a_p\}$. Pour construire une injection de E vers F :

1. On choisit $f(a_1)$: n possibilités.
2. On choisit $f(a_2)$: $n-1$ possibilités.

...p. On choisit $f(a_p)$: $n-p+1$ possibilités.

On a donc $n(n-1)\dots(n-p+1)$ possibilités.

Remarque :

A_n^p est aussi le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.

E) Nombre de permutations d'un ensemble fini

Définition :

Une permutation sur E est une bijection de E dans E. L'ensemble des permutations sur E est noté $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition :

Soit E de cardinal n. Alors le nombre de permutations sur E est $n!$.

Démonstration :

Comme E est fini, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective. Donc le nombre de permutations est A_n^n.

F) Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Proposition :

Soit E de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de parties de cardinal p de l'ensemble E est :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \end{cases}. \tag{6.14}$$

Démonstration :
(cas $p=0$, $p>n$ évidents). Si $1 \leqslant p \leqslant n$, comptons de deux manières différentes le nombre de p-listes d'éléments distincts de E :

- Ce nombre est A_n^p
- Pour construire une telle p-liste $(x_1, x_2, \dots x_p)$, on choisit d'abord l'ensemble des p termes de la liste : $\binom{n}{p}$ possibilités. On doit ensuite les ranger : $p!$ possibilités. Ainsi, le nombre cherché est $\binom{n}{p} \times p!$.

Donc $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

III Propriétés des $\binom{n}{p}$

Proposition :

- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.
- $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n \tag{6.15}$$
- $$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1} \tag{6.16}$$

Démonstration :
En effet, la première égalité vient du fait que choisir p éléments parmi n revient à choisir les $n-p$ qu'on ne prend pas. Pour la deuxième

- Si $p > n$,
$$\binom{n}{p} = 0, \qquad \binom{n-1}{p} = 0, \qquad \binom{n-1}{p-1} = 0 \tag{6.17}$$
- Si $p = n$,
$$\binom{n}{p} = 1, \qquad \binom{n-1}{p} = 0, \qquad \binom{n-1}{p-1} = 1 \tag{6.18}$$
- Sinon : Soit E de cardinal n. Comme $n > p$, $E \neq \emptyset$. Soit alors $a \in E$. On a :
$$\binom{n}{p} = N_1 + N_2, \tag{6.19}$$
où N_1 est le nombre de parties à p éléments de E sans a, et N_2 le nombre de parties à p éléments de E avec a. Ainsi :
$$N_1 = \binom{n-1}{p} \tag{6.20}$$
(on choisit p éléments parmi $E \backslash \{a\}$), et
$$N_2 = \binom{n-1}{p-1} \tag{6.21}$$
(on choisit a, il reste à choisir les $p-1$ autres éléments dans $E \backslash \{a\}$), d'où le résultat.

Application :

On peut remplir le tableau donnant les $\binom{n}{p}$:

$$
\begin{array}{c|cccc}
{}^{p}_{n} & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\
2 & 2 & 1+1 & \boxed{1+0} & 0 \\
3 & 1 & 1+2 & 2+1 & 1+0
\end{array}
\tag{6.22}
$$

Pour la troisième égalité : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$ correspond au cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments (nombre de parties à 0 éléments + nombre de parties à 1 élément +…). Ou : $\mathscr{P}(E) = \bigcup_{p=0}^{n} \mathscr{P}_p(E)$, et les $\mathscr{P}_p(E)$ sont disjoints deux à deux. ($\mathscr{P}_k(E)$: ensemble des parties à k éléments de E.) Donc $\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{card}(\mathscr{P}_p(E))$, soit $2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

Démonstration du dernier point (les cas $p = 0$, $p > n$ sont triviaux) :
Si $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \\
&= \frac{n-p+1}{p}\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

Si $p = n+1$:

$$
\binom{n}{n+1} = 0, \qquad \binom{n-1}{n} = 0, \qquad \frac{n-p+1}{p} = 0. \tag{6.24}
$$

Autre démonstration, combinatoire, pour $1 \leqslant p \leqslant n$: soit E de cardinal n. Comptons le nombre de couples (A, a) constitués d'une partie A de E de cardinal p, et d'un élément a de A. Notons n ce nombre. On a :

$$
N = \underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A} \times \underbrace{p}_{\substack{\text{choix de } a \\ \text{dans } A}}, \tag{6.25}
$$

et

$$
N = \underbrace{n}_{\substack{\text{choix de } a \\ \text{dans } E}} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\substack{\text{choix de } A \text{ à } p \\ \text{éléments contenant } a}}, \tag{6.26}
$$

d'où la première égalité. On a aussi :

$$
N = \underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A} \times \underbrace{p}_{\substack{\text{choix de } a \\ \text{dans } A}}, \tag{6.27}
$$

et

$$
N = \underbrace{\binom{n}{p-1}}_{\substack{\text{choix de } B\text{à} \\ p-1 \text{ éléments}}} \times \underbrace{(n-p+1)}_{\substack{\text{choix de } a \\ \text{dans } E\backslash B}}, \tag{6.28}
$$

d'où la deuxième égalité.

Exemple :

$E = \{1, 2, 3\}$, $p = 2$:

$$N = \underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A} \times \underbrace{p}_{\substack{\text{choix de } a \\ \text{dans } A}}, \quad \left\{ \begin{array}{ll} A = \{1,2\} & a = 1 \\ & a = 2 \\ \hline A = \{2,3\} & a = 2 \\ & a = 3 \\ \hline A = \{1,3\} & a = 1 \\ & a = 3 \end{array} \right. \tag{6.29}$$

$$N = \underbrace{n}_{\substack{\text{choix de } a \\ \text{dans } E}} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\substack{\text{choix de } A \\ \text{à } p \text{ éléments} \\ \text{contenant } a}}, \quad \left\{ \begin{array}{ll} a = 1 & A = \{1,2\} \\ & A = \{1,3\} \\ \hline a = 2 & A = \{1,2\} \\ & A = \{2,3\} \\ \hline a = 3 & A = \{1,3\} \\ & A = \{2,3\} \end{array} \right. \tag{6.30}$$

$$N = \underbrace{\binom{n}{p-1}}_{\substack{\text{choix de } B\text{à} \\ p-1 \text{ éléments}}} \times \underbrace{(n-p+1)}_{\substack{\text{choix de } a \\ \text{dans } E \backslash B}}, \quad \left\{ \begin{array}{ll} \{1\} & a = 3 \\ & a = 2 \\ \hline \{2\} & a = 1 \\ & a = 3 \\ \hline \{3\} & a = 2 \\ & a = 3 \end{array} \right. \tag{6.31}$$

Théorème (formule du binôme de Newton) :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \tag{6.32}$$

Démonstration :

Par récurrence sur n, avec a, b fixés : montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}}_{P(n)}$:

- $P(0)$, $P(1)$ ok.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\underbrace{a^{p+1}b^{n-p}}_{p+1+n-p=n+1} + \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\underbrace{a^p b^{n-p+1}}_{p+n-p+1=n+1} \\
&= \sum_{q=1}^{n+1}\binom{n}{q-1}a^q b^{n-q+1} + \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p+1} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}} a^{n+1}b^0 + \sum_{p=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}\right)}_{=\binom{n+1}{p}} a^p b^{n-p+1} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}a^p b^{n+1-p},
\end{aligned} \tag{6.33}$$

  ce qui achève la récurrence.

Proposition :
Soit E de cardinal $n \geqslant 1$. Alors, il y a dans E autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Démonstration :
On doit montrer :

$$\underbrace{\sum_{\substack{p\in[\![0,n]\!] \\ \text{et } p \text{ pair}}}\binom{n}{p}}_{A} = \underbrace{\sum_{\substack{p\in[\![0,n]\!] \\ \text{et } p \text{ impair}}}\binom{n}{p}}_{B} \tag{6.34}$$

On a $(0 = 1 + (-1))^n = \sum p = 0^n \binom{n}{p}(-1)^p = A - B$, donc $A = B$, d'où le résultat.

Autre démonstration : on note A l'ensemble des parties de E de cardinal pair, B de ceux de cardinal impair. Soit alors $a \in E$. Soit f l'application définie par :

$$f \colon \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & \begin{cases} X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \backslash \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases} \end{array}. \tag{6.35}$$

Alors $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ (on dit que f est involutive / une involution). Donc f est bijective (car inversible, d'inverse elle-même). Donc f, par restriction, réalise une bijection de A sur son image, qui est évidemment B.