Chapitre 5 : Le symbole Σ

I Généralités

A) Définition

Définition :

Soit $(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, noté aussi $\sum_{i\in\{1,2,\dots n\}} a_i$, ou $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$
Pus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble fini I quelconque, $\sum_{i\in I} a_i$ désigne la « somme des a_i, i décrivant I ». (Se donner une famille $(a_i)_{i\in I}$ indexée par I, c'est se donner pour chaque $i \in I$ un complexe a_i ; cela correspond à une application de I dans $\mathbb{C}$. Cela peut servir pour le repérage).

Cette définition est possible parce que $+$ est associative et commutative. Par exemple, on peut définir aussi $\prod_{i\in I} a_i$ (produit des a_i), mais on ne peut pas définir $\Delta_{i\in I}\, a_i$ comme étant la différence des a_i (dans quel ordre les prendre ?).

On convient que $\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$, et $\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$.

B) Premières propriétés

- Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles indexées par un même ensemble fini I :

$$\sum_{i\in I} a_i + b_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \tag{5.1}$$

- Si J et J sont deux ensembles finis disjoints, et si $(a_i)_{i\in I\cup J}$ est une famille de complexes indexée par $I \cup J$:

$$\sum_{i\in I\cup J} a_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i \tag{5.2}$$

- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble fini I, et pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i \tag{5.3}$$

C) Exemples

Exemple :

- On a vu : $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{i=0}^n (2i+3) = 2\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 3 = n(n+1) + 3(n+1) = (n+3)(n+1)$.
- $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
  Démonstration :
  Par récurrence :
  - ◇ C'est vrai pour $n = 0$.

⋄ Si c'est vrai pour n :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ = \frac{2n^2+7n+6}{6}(n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},\end{aligned} \tag{5.4}$$

ce qui achève la récurrence.

- $\sum_{i=0}^{n}(3i^2+2i-1) = 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i - (n+1) = \frac{n+1}{2}(n(2n+1)+2n-2) = \frac{(n+1)(n+2)(2n-1)}{2}$

II Sommes « doubles »

On s'intéresse ici au cas $\sum_{k\in K} a_k$ lorsque la famille $(a_k)_{k\in K}$ est indexée par une partie finie K de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Autrement dit, les indices dans la somme sont des couples d'entiers. Pour $k=(i,j)\in K$, $a_k = a_{(i,j)}$ est noté $a_{i,j}$ ou même a_{ij}. On s'intéresse donc à une somme du type $\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j}$ où K est une partie finie de $\mathbb{N}^2$.

A) Un cas particulier simple

$K = [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On note alors :

$$\sum_{i,j\in K} a_{i,j} = \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,p]\!]}} a_{i,j}, \tag{5.5}$$

« somme des $a_{i,j}$ pour i entre 1 et n et j entre 1 et p ». Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} &= (a_{1,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{1,p}) + (a_{2,1}+a_{2,2}+\cdots+a_{2,p}) \\ &\quad + \cdots + (a_{n,1}+a_{n,2}+\cdots+a_{n,p}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Visualisation :

${}_i{}^j$	1	2	3	
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	
3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	

Convention habituelle : dans un tableau, $a_{x,y}$ est sur la ligne numéro x, la colonne numéro y. Ainsi, faire $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)$, c'est sommer par ligne (et $\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$ par colonne)

B) Deuxième cas particulier

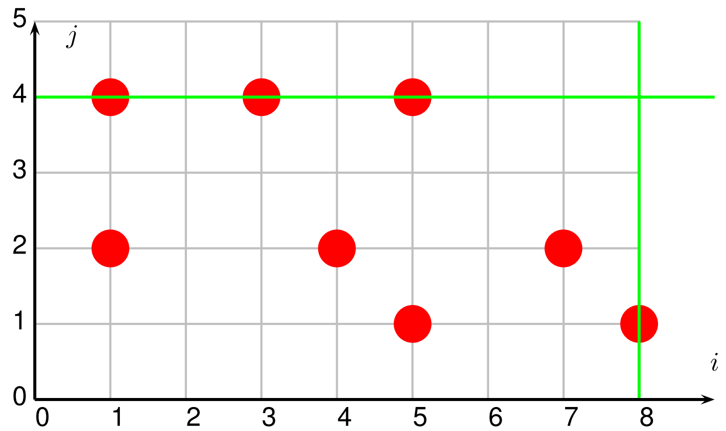
$K = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

$_i{}^j$	1	2	3
1			
2			
3			

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} &= \sum_{\substack{(i,j)\\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}\\ &= (a_{1,1}+a_{1,2}+\dots+a_{1,n}) + (a_{2,2}+a_{2,3}+\dots+a_{2,n})\\ &\quad +\dots+(a_{n-1,n-1}+a_{n-1,n})+a_{n,n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)\end{aligned} \tag{5.7}$$

C) Cas général

Remarquons que K est une partie finie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset [\![0,N]\!]\times[\![0,N]\!]$.



(L'ensemble des points représente K)

$$\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{j\in A_i} a_{i,j}\right), \tag{5.8}$$

où $A_i = \{j \in \mathbb{N}, (i,j)\in K\}$. Ici, $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{2,4\}$. De même,

$$\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{i\in B_j} a_{i,j}\right), \tag{5.9}$$

où $B_j = \{i \in \mathbb{N}, (i,j)\in K\}$

III Changement de variable

Proposition :
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par un ensemble fini I. On suppose que J est un autre ensemble fini, et que φ est une bijection de J sur I. Alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)}$. On dit qu'on fait le changement de variables « $i = \varphi(j)$ ».

Les $\varphi(j)$ pour j décrivant J donnent tout les i de I (car φ est surjective) et chacun une seule fois (car φ est injective). Les termes des deux sommes sont donc les mêmes à l'ordre près.

Exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 \tag{5.10}$$

IV Exemples classiques

- minimum :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \min(i,j) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\min(i,j)\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant i}\min(i,j) + \sum_{1+i\leqslant j\leqslant n}\min(i,j)\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant i} j + \sum_{1+i\leqslant j\leqslant n} i\right)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{i^2}{2} + i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{(n+\frac{1}{2})n(n+1)}{2}\\
&= n(n+1)(2n+1)\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

- Calcul des sommes $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$; on sait déjà que :
  - ◇ $S_0 = n$,
  - ◇ $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$
  - ◇ $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

  On a :

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = S_2 + 2S_1 + (n+1) \\ \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = S_2 + (n+1)^2 \end{cases}, \tag{5.12}$$

  d'où $S_2 + 2S_1 + (n+1) = S_2 + (n+1)^2$, et ainsi, $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$. De même,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \begin{cases} S_3 + 3S_2 + 3S_1 + (n+1) \\ S_3 + (n+1)^3 \end{cases}, \tag{5.13}$$

d'où $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 = \begin{cases} S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + (n+1) \\ S_4 + (n+1)^4 \end{cases}, \tag{5.14}$$

donc $S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + (n+1) = S_4 + (n+1)^4$, soit

$$\begin{aligned} 4S_3 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1) \\ &= (n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1)) = (n+1)^2 n^2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Donc $S_3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$. Pour obtenir S_4 en connaissant les précédents, on fait de la même façon…

- Produit de sommes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i\right)\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} b_j\right) &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_p) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_p) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_2 b_p) \\ &\quad + \cdots + (a_n b_1 + a_n b_2 + \cdots + a_n b_p) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i b_j\right) \\ &= \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_i b_j \end{aligned} \tag{5.16}$$

- Produit de deux expressions polynomiales :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i x^i\right)\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} b_j x^j\right) &= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j x^{i+j} \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n+p}\left(\sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \\ i+j=k}} a_i b_j\right) x^k \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n+p} C_k x^k \end{aligned} \tag{5.17}$$

où $C_k = \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \\ i+j=k}} a_i b_j$

- Somme de termes en progression arithmétique : on s'intéresse à $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ lorsqu'il existe r tel que $\forall k \in \{1, \ldots n\}, a_k = a_{k-1} + r$. <u>À retenir : $S_n =$ nombre de termes $\times \frac{1}{2} \times$ somme des extrêmes</u>.
Démonstration :
En effet : $\forall k \in \{0, \ldots n\}, a_k = a_0 + kr$, et $\forall k \in \{0, \ldots n\}, a_k + a_{n-k} = a_0 + kr + a_0 + (n-k)r = a_0 + a_0 + nr = a_0 + a_n$.

$$\begin{array}{ccccccccc} S_n & = & a_0 & + & a_1 & + & \cdots & + & a_n \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \cdots & + & a_0 \end{array} \tag{5.18}$$

Donc $2S_n = (n+1) \times (a_0 + a_n)$. Donc $S_n = \frac{(n+1)(a_0 + a_n)}{2}$.

- Somme de termes en progression géométrique : on s'intéresse à $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ lorsqu'il existe q tel que $\forall k \in \{1, \ldots n\}, a_k = q a_{k-1}$. <u>À retenir : $S_n = \begin{cases} (n+1)a_0 \text{ si } q = 1 \\ \frac{a_{n+1} - a_0}{q-1} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$</u>.

Démonstration :

Le cas où $q = 1$ est trivial : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 = (n+1)a_0$. Sinon, pour $q \neq 1$:

$$S_n = a_0 + qa_0 + q^2 a_0 + \cdots + q^n a_0, \tag{5.19}$$

et

$$qS_n = qa_0 + q^2 a_0 + q^3 a_0 + \cdots + \underbrace{q^{n+1} a_0}_{a_{n+1}} = S_n + a_{n+1} - a_0 \tag{5.20}$$

Donc $(q-1)S_n = a_{n+1} - a_0$. Donc $S_n = \frac{a_{n+1} - a_0}{q-1}$.