Chapitre 2 : Lois de composition interne

I Définition

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne (l.c.i.) sur E est une application de $E \times E$ dans E. Si $*$ est le symbole désignant cette l.c.i, l'image de (x, y) est notée $x * y$. Ainsi, se donner une l.c.i. $*$ sur E, c'est se donner une application :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array} \tag{2.1}$$

On parle souvent d'opération plutôt que de l.c.i.

Exemple :

- Les opérations usuelles $+$ et $\times$ constituent des l.c.i sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$...
- La division $\div$ constitue une l.c.i sur l'ensemble $\mathbb{Q}^*$ (ou sur $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$)
- La loi $\circ$ constitue une l.c.i sur l'ensemble $\mathscr{F}(A, A)$ des applications d'un ensemble quelconque A vers lui-même.
- Sur l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties d'un ensemble Ω, les opérations $\cup$ et $\cap$ sont des l.c.i.
- L'addition entre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi une l.c.i sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

II Propriétés éventuelles

Dans toute cette section, $(E, *)$ désigne un ensemble muni d'une l.c.i.

A) Associativité

Définition :
On dit que $*$ est associative lorsque, pour tous x, y, z de E, $x * (y * z) = (x * y) * z$. Cette valeur commune peut être alors notée sans ambiguïté $x * y * z$.

B) Commutativité

Définition :
On dit que $*$ est commutative lorsque, pour tous x, y de E, $x * y = y * x$.

C) Elément neutre

Définition :

Soit $e \in E$. On dit que e est élément neutre pour $*$ lorsque, pour tout x de E, $x * e = e * x = x$ (les deux égalités doivent être vérifiées lorsque $*$ n'est pas commutative).

Proposition :

S'il y a dans E un élément neutre pour $*$, alors il n'y en a qu'un seul.

Démonstration :

Si e et e' sont deux éléments neutres, alors $e' = e * e' = e$ (La première égalité vient du fait que e est neutre, la seconde du fait que e' est neutre).

Définition :

Si $*$ est une l.c.i. associative sur E et s'il y a dans E un élément neutre pour $*$, on dit que $(E, *)$ est un monoïde. Si de plus $*$ est commutative, on dit que ce monoïde est commutatif.

Exemple :

$(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde commutatif.

D) Symétrique

On suppose ici que E admet un neutre e pour $*$. Soient x et x' deux éléments de E. On dit que x' est symétrique de x (pour la loi $*$) lorsque $x * x' = x' * x = e$.

Proposition :

Si $*$ est associative, et si un élément x de E admet un symétrique pour $*$, alors il n'en a qu'un seul.

Démonstration :

Si x' et x'' sont symétriques de x, alors $x'' = e * x'' = (x' * x) * x'' = x' * (x * x'') = x' * e = x'$.

Vocabulaire :

Un élément qui admet un symétrique est dit symétrisable. Ainsi, dans $\mathbb{Z}$ muni de la loi $*$, l'ensemble des éléments symétrisables se réduit à $\{-1, 1\}$.

En fait, dans le cas de certaines lois, comme la loi $\times$, on dit plutôt « inverse » et « inversible » plutôt que « symétrique » et « symétrisable ».

E) Distributivité

On suppose que E est muni d'une deuxième l.c.i. notée $\#$. On dit que $*$ est distributive sur $\#$ lorsque, pour tous x, y, z de E, on a $x * (y \# z) = (x * y) \# (x * z)$ et $(y \# z) * x = (y * x) \# (z * x)$.

III Stabilité

$(E, *)$ désigne toujours un ensemble muni d'une l.c.i.

Soit F une partie de E. On dit que F est stable par $*$ lorsque, pour tous x, y de F, $x * y$ est encore dans F. Dans ce cas, on pourra dire que $*$ définit, par restriction, une l.c.i. sur F.

IV Autres propriétés

Proposition :

Soit $(E, *)$ un monoïde (ainsi, $*$ est associative). Alors l'ensemble S des éléments symétrisables de E est stable par $*$.

Démonstration :

Soient x, y deux éléments de S. On note x', y' leurs symétriques, e l'élément neutre de E. On a :

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e, \tag{2.2}$$

et

$$(x' * y') * (y * x) = x' * (y' * y) * x = x' * e * x = x' * x = e. \tag{2.3}$$

Donc $x * y \in S$, et le symétrique de $x * y$ pour $*$ est $y' * x'$.

Définition :

Soit A un ensemble, et soit E un ensemble muni d'une l.c.i. $*$. On définit sur $\mathscr{F}(A, E)$ une loi $\hat{*}$ de la façon suivante :

Pour tous f, g de $\mathscr{F}(A, E)$, $f \hat{*} g$ est l'application de A dans E qui à tout x de A associe $f(x) * g(x)$.

Ainsi, $f \hat{*} g \colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) * g(x) \end{array}$

Proposition :

- Si $*$ est associative sur E, alors $\hat{*}$ est associative sur $\mathscr{F}(A, E)$.
- Si $*$ est commutative sur E, alors $\hat{*}$ est commutative sur $\mathscr{F}(A, E)$.
- Si il y a dans E un neutre pour $*$, alors il y a dans $\mathscr{F}(A, E)$ un neutre pour $\hat{*}$.
- Si tout élément de E admet dans E un symétrique pour $*$, alors tout élément de $\mathscr{F}(A, E)$ admet dans $\mathscr{F}(A, E)$ un symétrique pour $\hat{*}$.
- On munit E d'une deuxième l.c.i notée $\#$ et on définit de même la loi $\hat{\#}$ sur $\mathscr{F}(A, E)$. Si $*$ est distributive sur $\#$, alors $\hat{*}$ est distributive sur $\hat{\#}$.

Démonstration :

- Supposons $*$ associative sur E. Soient f, g, h trois éléments de $\mathscr{F}(A, E)$. Soit $x \in A$. On a :

$$\begin{aligned}(f \hat{*} (g \hat{*} h))(x) &= f(x) * (g \hat{*} h)(x) = f(x) * (g(x) * h(x)) \\ &= f(x) * g(x) * h(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

  et

$$\begin{aligned}((f \hat{*} g) \hat{*} h)(x) &= (f \hat{*} g)(x) * h(x) = (f(x) * g(x)) * h(x) \\ &= f(x) * g(x) * h(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donc $(f\hat{*}(g\hat{*}h))(x) = ((f\hat{*}g)\hat{*}h)(x)$. Cette égalité est valable pour tout $x \in A$, d'où l'égalité des applications : $f\hat{*}(g\hat{*}h) = (f\hat{*}g)\hat{*}h$ et ainsi l'associativité de $\hat{*}$.

- Supposons $*$ commutative sur E. Soient $f, g \in \mathscr{F}(A, E)$. On a, pour tout x élément de A :

$$(f\hat{*}g)(x) = f(x) * g(x) = g(x) * f(x) = (g\hat{*}f)(x). \tag{2.6}$$

Donc $f\hat{*}g = g\hat{*}f$. C'est valable pour tous $f, g \in \mathscr{F}(A, E)$. Donc $\hat{*}$ est commutative.

- Supposons qu'il y ait dans E un neutre pour $*$, noté e. Alors l'application $g\colon \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & e \end{array}$, élément de $\mathscr{F}(A, E)$, est neutre pour $\hat{*}$. En effet, soit $f \in \mathscr{F}(A, E)$. On a, pour tout x élément de A :

$$(g\hat{*}f)(x) = g(x) * f(x) = e * f(x) = f(x), \tag{2.7}$$

et

$$(f\hat{*}g)(x) = f(x) * g(x) = f(x) * e = f(x) \tag{2.8}$$

Donc $f\hat{*}g = g\hat{*}f = f$. Donc g est neutre pour $\hat{*}$.

- Supposons que tout élément de E admette dans E un symétrique pour $*$. Pour tout x de E, on note $\bar{x}$ le symétrique de x pour $*$. On note de plus e un neutre pour $*$. Alors, pour toute application $f \in \mathscr{F}(A, E)$, $f'\colon \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \overline{f(x)} \end{array}$ est symétrique de f pour $\hat{*}$. En effet, soit $f \in \mathscr{F}(A, E)$. On a, pour tout x élément de A :

$$(f\hat{*}f')(x) = f(x) * f'(x) = f(x) * \overline{f(x)} = e, \tag{2.9}$$

et

$$(f'\hat{*}f)(x) = f'(x) * f(x) = \overline{f(x)} * f(x) = e. \tag{2.10}$$

Donc $f\hat{*}f' = f'\hat{*}f = g$ où $g\colon \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & e \end{array}$. Donc tout élément de $\mathscr{F}(A, E)$ admet dans $\mathscr{F}(A, E)$ un symétrique pour $\hat{*}$.

- Supposons $*$ distributive sur $\#$. Soient f, g, h trois éléments de $\mathscr{F}(A, E)$. On a, pour tout élément x de A :

$$\begin{aligned}
(f\hat{*}(g\hat{\#}h))(x) &= f(x) * (g\hat{\#}h)(x) = f(x) * (g(x)\#h(x)) && (2.11)\\
&= (f(x) * g(x))\#(f(x) * h(x)) && (2.12)\\
&= (f\hat{*}g)(x)\#(f\hat{*}h)(x) = ((f\hat{*}g)\hat{\#}(f\hat{*}h))(x), && (2.13)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
((g\hat{\#}h)\hat{*}f)(x) &= (g\hat{\#}h)(x) * f(x) = (g(x)\#h(x)) * f(x) && (2.14)\\
&= (g(x) * f(x))\#(h(x) * f(x)) && (2.15)\\
&= (g\hat{*}f)(x)\#(h\hat{*}f)(x) = ((g\hat{*}f)\hat{\#}(h\hat{*}f))(x). && (2.16)
\end{aligned}$$

Donc $f\hat{*}(g\hat{\#}h) = (f\hat{*}g)\hat{\#}(f\hat{*}h)$ et $(g\hat{\#}h)\hat{*}f = (g\hat{*}f)\hat{\#}(h\hat{*}f)$. Ces égalités sont valables pour tous $f, g, h \in \mathscr{F}(A, E)$. Donc $\hat{*}$ est distributive sur $\hat{\#}$.