Chapitre 1 : Vocabulaire sur les ensembles, la logique et les applications

I Les ensembles

A) La notion d'appartenance

Soit E un ensemble, soit a un « objet ».

L'énoncé « $a \in E$ » signifie : a appartient à E.

La négation de cet énoncé s'écrit « $a \notin E$ » ; autrement dit, l'énoncé $a \notin E$ est équivalent à non($a \in E$).

Exemple :

- $2 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{C}$, $1,5 \notin \mathbb{N}$ sont vrais.
- $1,5 \in \mathbb{N}$, $4 \notin \mathbb{N}$ sont faux.

B) Inclusion

Soient deux ensembles E et F. L'énoncé « $E \subset F$ » se lit E est inclus dans F et signifie : tout élément de E est élément de F.

Exemple :

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Remarque :

- $\forall E, E \subset E$
- L'équivalence suivante est toujours vraie : $(E \subset F$ et $F \subset E) \iff F = E$.

C) Vocabulaire et notations

- $\varnothing$ désigne l'unique ensemble qui n'a pas d'élément. On convient que $\varnothing \subset E$ est vrai quel que soit E.
- $\{a, b, c\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont exactement a, b, c. (remarque : $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 2, 2, 3\}$).
- Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur un ensemble E. Pour tout $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est un énoncé (vrai ou faux).

  Exemple :

  $\mathcal{P}$ pourrait être la propriété « être pair », définie sur $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\mathcal{P}(6)$ est vrai ; $\mathcal{P}(-7)$ est fausse ; $\mathcal{P}(3.2)$ n'a pas de sens.

  La notation $\{x \in E, \mathcal{P}(x)\}$ désigne l'ensemble des éléments de E qui ont la propriété $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}(x)$ est un énoncé avec une variable libre x. $\{x \in E, \mathcal{P}(x)\}$ est un ensemble avec une variable muette x.

D) Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. Une partie de E est un ensemble inclus dans E. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Ainsi, on a l'équivalence : $A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$. On a aussi : $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$, $E \in \mathscr{P}(E)$.

Exemple :

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. Alors :

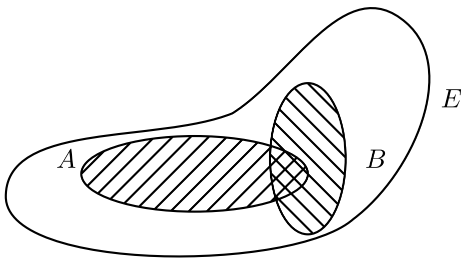
$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}. \tag{1.1}$$

Soient A et B deux parties de E.

$$A \cup B = \{x \in E, (x \in A \text{ ou } x \in B)\}, \quad \text{(réunion)} \tag{1.2}$$

$$A \cap B = \{x \in E, (x \in A \text{ et } x \in B)\}, \quad \text{(intersection)} \tag{1.3}$$

$$A \backslash B = \{x \in E, (x \in A \text{ et } x \notin B)\}, \quad \text{(différence)} \tag{1.4}$$



Sur le dessin :

- réunion : /// \\\ XXX
- intersection : XXX
- différence : ///

Cas particulier :

Si $B \subset A$, $A \backslash B$ est le complémentaire de B dans A, noté $C_A B$

E) Produit cartésien

Soient E, F deux ensembles. $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) formés d'un élément x de E et d'un élément y de F.

Rappel :

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y' \tag{1.5}$$

De même, on peut définir $E \times F \times G \times \ldots$. $E \times E$ est aussi noté E^2 (et $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté E^n).

II Logique

On y utilise :

- Des lettres de variables, de constantes, de propriétés, de relations...
- Des connecteurs et, ou, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$.

- La négation non.
- Des quantificateurs $\forall, \exists$.

Pour l'utilisation, les règles, voir à l'usage.

Notons cependant :

- Si E désigne un ensemble, $\mathcal{P}$ une propriété définie sur E,
  - ⋄ l'énoncé $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ signifie que quel que soit x de E, $\mathcal{P}(x)$, soit que tout élément de E vérifie $\mathcal{P}$,
  - ⋄ l'énoncé $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ signifie qu'il existe un élément de E qui vérifie $\mathcal{P}$.

  Exemple :

  $E = \{1, 3, 5, 4\}$, $\mathcal{P} =$ « être pair » ; alors $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ est vrai.

- On a les équivalences suivantes (négation) :

$$\text{non}(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \iff \exists x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x)) \tag{1.6}$$

$$\text{non}(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \iff \forall x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x)) \tag{1.7}$$

- Concernant « et » et « ou » :

$$\forall x \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) \iff (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)) \tag{1.8}$$

$$\forall x \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) \impliedby (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)) \tag{1.9}$$

$$\exists x \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) \implies (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)) \tag{1.10}$$

$$\exists x \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) \iff (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)) \tag{1.11}$$

- Autres règles : A et B désignent deux énoncés quelconques.

$$\text{non}(A \text{ et } B) \iff \text{non}(A) \text{ ou non}(B) \tag{1.12}$$

$$\text{non}(A \text{ ou } B) \iff \text{non}(A) \text{ et non}(B) \tag{1.13}$$

$$\text{non}(A \implies B) \iff A \text{ et non}(B) \tag{1.14}$$

  Une simplification d'écriture :

  $\forall x \in E, \forall x' \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(x') \implies x = x')$:il y a au plus un élément de E tel que $P(x)$.

  $[\exists x \in E, \mathcal{P}(x)]$ et $[\forall x \in E, \forall x' \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(x') \implies x = x')]$: il existe un et un seul $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$: cet énoncé est noté $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$.

- Contraposée : soient A et B deux énoncés. On a l'équivalence :

$$(A \implies B) \iff (\text{non}(B) \implies \text{non}(A)) \tag{1.15}$$

III Les applications

E, F, G désignent ici des ensembles quelconques.

A) Généralités

La donnée d'une application f est la donnée

- D'un ensemble de départ E.

- D'un ensemble d'arrivée F.
- Pour chaque élément x de E, d'un élément de F noté $f(x)$ et appelé l'image de x par l'application f.

On note : $f\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Exemple :

- L'application : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est l'identité sur E, notée Id_E.
- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, $\cancel{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}}$ (l'ensemble d'arrivée ne convient pas), $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, $\cancel{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x^2 & \longmapsto & x \end{array}}$ (mauvaise variable), $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.
  Toutes ces applications sont des applications différentes.

On note $\mathscr{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

B) Composition

Définition :
Soient $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$. $g \circ f$ désigne l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe $g(f(x))$. Ainsi, pour tout x de E, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Théorème :
la loi $\circ$ est une loi associative sur l'ensemble des fonctions de E dans E. Elle admet un élément neutre Id_E, et elle n'est pas commutative en général.

Démonstration :

- $\circ$ constitue une loi sur $\mathscr{F}(E,E)$:
  Pour $f \in \mathscr{F}(E,E)$, $g \in \mathscr{F}(E,E)$, $g \circ f$ est bien défini.
- Associativité :
  Soient f, g, h trois éléments de $\mathscr{F}(E,E)$. Montrons que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Déjà, les deux applications $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ sont bien de E dans E. Soit $x \in E$. On a :
  $$(f \circ (g \circ h))(x) = f[(g \circ h)(x)] = f(g(h(x))) \tag{1.16}$$
  et
  $$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \tag{1.17}$$
  C'est valable pour tout x de E. donc les deux applications sont égales. C'est valable pour toutes applications $f, g, h \in \mathscr{F}(E,E)$. Donc la loi $\circ$ est associative.
  Attention : écrire $f \circ [g(x)]$ n'a aucun sens. En effet, la loi $\circ$ prend comme arguments deux applications, et ici $g(x)$ est un élément de E.
- Elément neutre :
  Pour tout $f \in \mathscr{F}(E,E)$, $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$. En effet : déjà, $f, \mathrm{Id}_E \circ f, f \circ \mathrm{Id}_E \in \mathscr{F}(E,E)$. Pour tout x de E, on a :
  $$(f \circ \mathrm{Id}_E)(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x) \tag{1.18}$$

et

$$(\mathrm{Id}_E \circ f)(x) = \mathrm{Id}_E(f(x)) = f(x) \quad \text{car } f(x) \in E \tag{1.19}$$

- Non commutativité : dès que E a au moins trois éléments. En effet, supposons que E a au moins trois éléments. Notons a, b, c trois éléments distincts de E. Soient alors deux applications $f, g \in \mathscr{F}(E, E)$ définies par :

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \\ \forall x \in E \backslash \{a, b\}, f(x) = x \end{cases}, \quad \begin{cases} g(a) = c \\ g(c) = a \\ \forall x \in E \backslash \{a, c\}, g(x) = x \end{cases}. \tag{1.20}$$

  Alors

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = b \tag{1.21}$$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(c) = c \tag{1.22}$$

Généralisation :
On a associativité « en général » de la loi $\circ$: pour tous $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $g \in \mathscr{F}(F, G)$, $h \in \mathscr{F}(G, H)$, on a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, qu'on note aussi $h \circ g \circ f$.

Démonstration :
Les deux applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont bien des éléments de $\mathscr{F}(E, H)$. Ensuite, on procède comme pour montrer l'associativité dans $\mathscr{F}(E, E)$.

C) Injectivité, surjectivité

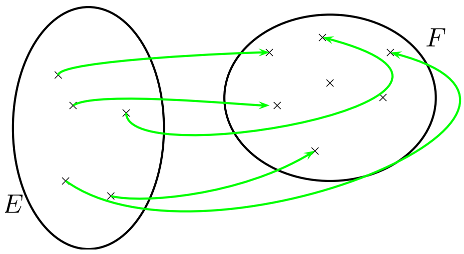
Soit $f : E \to F$.

- On dit que f est injective lorsque $\forall x \in E, \forall x' \in E, (f(x) = f(x') \implies x = x')$.
  Autrement dit, si deux éléments de E ont la même image par f, alors ils sont égaux.
  Ou encore : deux éléments distincts de E on toujours des images distinctes (c'est la contraposée de l'énoncé précédent).

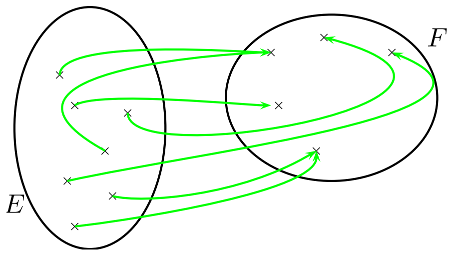
- On dit que f est surjective lorsque $\forall y \in F, \exists x \in E, (y = f(x))$.
  C'est-à-dire que tout élément de F est l'image d'un élément de E.

- On dit que f est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

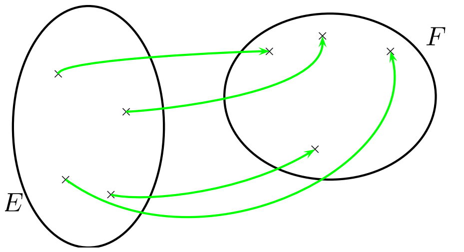
Exemple :
- En dessins :



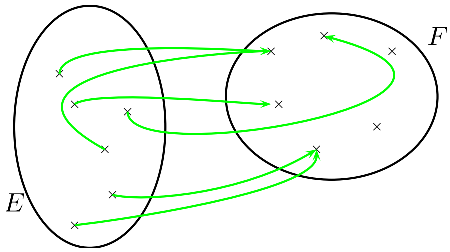
Injective non surjective



Surjective non injective



Bijective



Ni injective ni surjective

- $\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est ni injective ni surjective : $f(-1) = f(1)$ et non$(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -4)$.

  $\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est surjective, non injective.

  $\begin{array}{rcl} h\colon \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est injective non surjective.

  $\begin{array}{rcl} \varphi\colon \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

- On note $\mathcal{H}$ l'humanité, $\mathcal{M}$ l'ensemble des mères, $\mathcal{A}$ l'ensemble des aînés. $\begin{array}{rcl} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x & \longmapsto & \text{mère de } x \end{array}$ n'est ni injective ni surjective.

  $\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x & \longmapsto & \text{enfant de } x \end{array}$ ne peut pas être définie, car x peut avoir plusieurs enfants.

  $\begin{array}{rcl} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ x & \longmapsto & \text{mère de } x \end{array}$ est surjective non injective.

  $\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x & \longmapsto & \text{ainé de } x \end{array}$ est injective non surjective.

  $\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & \text{ainé de } x \end{array}$ est bijective.

Définition (Antécédent éventuel) :

Soit $f\colon E \to F$. Soit $y \in F$. Un antécédent de y est un élément x de E tel que $y = f(x)$. Attention, il n'y a en général ni existence ni unicité.

Proposition :

f est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent.

f est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent.

f est bijective si et seulement si tout élément de F a exactement un antécédent.

Démonstration :

- Pour l'injectivité :

  $\Longrightarrow$: supposons f injective. Supposons que y élément de F a un antécédent x. Soit x' un autre antécédent. On a alors $y = f(x)$ et $y = f(x')$. Donc $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$. Donc si y admet un antécédent, il n'en admet qu'un seul. $\Longleftarrow$: supposons f non injective. Alors il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$. Alors, en notant $y = f(x)(= f(x'))$, y admet deux antécédents distincts x et x'. Donc non(tout élément de F a au plus un antécédent). (On a montré la contraposée).

- Pour la surjectivité, il suffit de traduire les deux côtés de l'équivalence pour voir qu'on écrit exactement la même chose.
- Pour la bijectivité, on utilise les deux résultats précédents.

Proposition :
La composée de deux injections est une injection. Il en est de même pour la composée de deux surjections ou de deux bijections.

Démonstration :
Soient $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$.

- Supposons f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ l'est aussi. (c'est-à-dire que $\forall x, x' \in E, ((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'))$. Soient $x, x' \in E$. Supposons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, et montrons que $x = x'$.
  On a : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, soit $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, on a alors $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on a donc $x = x'$.
- Supposons f et g surjectives. Montrons que $g \circ f$ l'est aussi. (c'est-à-dire que $\forall y \in G, \exists x \in E, y = (g \circ f)(x))$.
  Soit $y \in G$. Comme g est surjective, il existe $x' \in F$ tel que $y = g(x')$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $x' = f(x)$. Ainsi, $y = g(x') = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

D) Réciproque d'une bijection

Soit $f\colon E \to F$ une application bijective. On peut introduire l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f dans E. Cette application s'appelle la réciproque de f, notée f^{-1}.

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\colon F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \text{l'unique élément } y \text{ de } E \text{ tel que } f(y) = x \end{array} \tag{1.23}$$

On a $\forall x \in F, \forall y \in E, (y = f^{-1}(x) \implies x = f(y))$.

Proposition :
Soit $f\colon E \to F$ bijective. Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration :

- $f \circ f^{-1}$ est bien défini et va de F dans F.
  Soit $x \in F$. Alors $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ (car $f^{-1}(x)$ est l'antécédent de x par f).
- $f^{-1} \circ f$ est bien défini et va de E dans E.
  Soit $x \in E$. Alors $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ (car x est l'antécédent de $f(x)$ par f^{-1}).

Théorème (inversible $\implies$ bijectif) :
Soit $f\colon E \to F$. S'il existe $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Démonstration :

Soit $f\colon E \to F$. Supposons qu'il existe $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

- Alors f est injective :
  Soient $x, x' \in E$, supposons que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Ainsi, $x = x'$.
- Et f est surjective :
  Soit $y \in F$. Alors $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Donc y a un antécédent par f, à savoir $g(y)$, et ce quel que soit y. Donc f est surjective.
- Donc f est bijective.
- Montrons que $f^{-1} = g$. On a : $g = g \circ \mathrm{Id}_F = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E \circ f^{-1} = f^{-1}$.

Corollaire :

si f est bijective, f^{-1} l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$

E) Image directe, image réciproque

Définition :

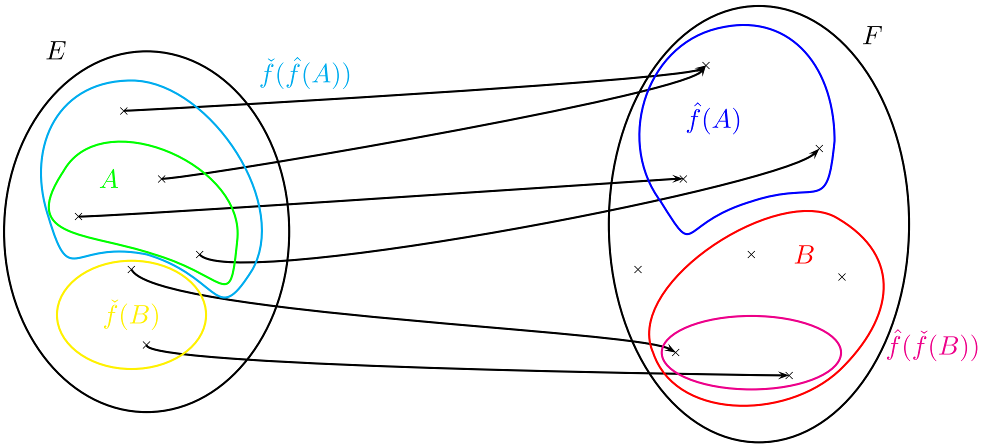
Soit $f\colon E \to F$.

- Soit A une partie de E. On appelle image directe de A par f, et on note $\hat{f}(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A, c'est-à-dire : $\hat{f}(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$.
- Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f et on note $\check{f}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B, c'est-à-dire : $\check{f}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

Cas particulier :

L'image directe par f de E est l'ensemble image de f, noté $\mathrm{Im}(f)$. Soit $f\colon E \to F$. Alors, $\tilde{f}\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathrm{Im}(F) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est évidemment surjective.

Visualisation :



Proposition :

Si $f\colon E \to F$ est bijective, alors pour toute partie B de F, $\check{f}(B) = \widehat{f^{-1}}(B)$.

Démonstration :

- Montrons que $\widehat{f^{-1}}(B) \subset \check{f}(B)$.
  Soit $x \in \widehat{f^{-1}}(B)$. Montrons que $x \in \check{f}(B)$ (c'est-à-dire que $f(x) \in B$). On a $x \in E$ car $\widehat{f^{-1}}(B) \subset E$, et il existe $y \in B$ tel que $x = f^{-1}(y)$ par définition de $\widehat{f^{-1}}(B)$. Donc $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$. Or, $y \in B$. Donc $f(x) \in B$. Donc $x \in \check{f}(B)$, d'où la première inclusion.
- Montrons que $\check{f}(B) \subset \widehat{f^{-1}}(B)$.
  Soit $x \in \check{f}(B)$. On a : $f(x) \in B$, et $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$ avec $y = f(x) \in B$. Donc $x \in \widehat{f^{-1}}(B)$. D'où l'autre inclusion et l'égalité.

Corollaire :

Soit $f\colon E \to F$, bijective, et A une partie de E. Alors $\hat{f}(A) = \widecheck{f^{-1}}(A)$. En effet, il suffit d'appliquer l'égalité précédente avec f^{-1} qui est aussi une bijection de F dans E : $\widehat{f^{-1}}(A) = \widecheck{f^{-1}}^{-1}(A)$, c'est-à-dire $\widehat{f^{-1}}(A) = \check{f}(A)$.

Conséquence :

Pour une application f quelconque de E dans F, on peut noter $f(A)$ pour $\hat{f}(A)$ (c'est la nature de $A \subset E$ qui permet de distinguer l'image directe) et $f^{-1}(B)$ pour $\check{f}(B)$ lorsque $B \subset F$. (attention, le $^{-1}$ ne signifie pas pour autant que f est bijective !).