Chapitre 14 : Développements limités

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle, et a un point de I.

I Généralités

A) Définitions

Définition :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre n en a lorsqu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n$ et une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \dots + \lambda_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \tag{14.1}$$

Autrement dit :

Lorsqu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de a :

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \dots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \tag{14.2}$$

Ou encore lorsqu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \dots + \lambda_n u^n + o(u^n) \text{ au voisinage de } 0 \tag{14.3}$$

Ainsi, la notion de DL à l'ordre n en a pour $f\colon x \mapsto f(x)$ revient à la notion de DL à l'ordre n en 0 pour $f\colon u \mapsto f(a+u)$.

Exemple :

- L'égalité $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ constitue un DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction cosinus.
- On veut un DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de cosinus :

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{4}+x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x + o(x^2))) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \end{aligned} \tag{14.4}$$

- DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x + x^3 \sin x$:

$$\begin{aligned} e^x + x^3\sin x &= (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \end{aligned} \tag{14.5}$$

- DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f\colon x \to \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^6}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = 0 + o(x^5) = o(x^5) \tag{14.6}$$

(Vrai à n'importe quel ordre)

B) Théorème d'unicité des coefficients d'un DL

Théorème :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un DL à l'ordre n en a, alors les coefficients de ce DL sont déterminés de manière unique, c'est-à-dire que si $\begin{cases} \lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n \\ \mu_0, \mu_1, \dots \mu_n \end{cases}$ sont des réels tels que, au voisinage de 0 :

$$f(a+u) = \lambda_0 + u\lambda_1 + \cdots + u^n\lambda_n + o(u^n) \tag{14.7}$$

et

$$f(a+u) = \mu_0 + u\mu_1 + \cdots + u^n\mu_n + o(u^n) \tag{14.8}$$

Alors $\forall i \in [\![0, n]\!], \lambda_i = \mu_i$

Démonstration :
Soient ε, η deux fonctions qui tendent vers 0 telles que :

$$\forall u \in J, \lambda_0 + \lambda_1 u + \cdots + \lambda_n u^n + u^n\varepsilon(u) = \mu_0 + \mu_1 u + \cdots + \mu_n u^n + u^n\eta(u) \tag{14.9}$$

Où $J = \{u \in \mathbb{R}, a + u \in I\}$.
Alors, en prenant $u = 0$ dans (14.9), on obtient déjà $\lambda_0 = \mu_0$.
En reportant et en simplifiant par u (si non nul), on obtient :

$$\forall u \in J \setminus \{0\}, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n u^{n-1} + u^{n-1}\varepsilon(u) = \mu_1 + \cdots + \mu_n u^{n-1} + u^{n-1}\eta(u) \tag{14.10}$$

En faisant tendre u vers 0, on obtient alors $\lambda_1 = \mu_1$...
...on répète l'opération. Donc :

$$\forall u \in J \setminus \{0\}, \lambda_{n-1} + \lambda_n u + u\varepsilon(u) = \mu_{n-1} + \mu_n u + u\eta(u) \tag{14.11}$$

Donc $\lambda_{n-1} = \mu_{n-1}$.
Donc $\forall u \in J \setminus \{0\}, \lambda_n + \varepsilon(u) = \mu_n + \eta(u)$, donc $\lambda_n = \mu_n$.

C) Troncature d'un DL

Proposition :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un DL à l'ordre n en a, alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un DL à l'ordre p en a, obtenu par troncature.

En effet :
- Pour $p = n$, ok
- Sinon, $p < n$:

$$f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \dots + \lambda_p u^p + \underbrace{\lambda_{p+1}u^{p+1} + \dots + \lambda_n u^n + u^n\varepsilon(u)}_{= u^p \underbrace{\left(\lambda_{p+1}u + \dots + \lambda_n u^{n-p} + u^{n-p}\varepsilon(u)\right)}_{\to 0} = o(u^p)} \tag{14.12}$$

II DL et dérivation

Proposition :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$; f a un DL à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a, et dans ce cas ce DL est $f(a+u) = f(a) + \varepsilon(u)$, où ε tend vers 0 en 0.

En effet :
- Si f est continue en a, alors $f(a+u) - f(a) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$, donc $f(a+u) = f(a) + o(1)$.
- Si f admet un DL à l'ordre 0 en a, il s'écrit $f(a+u) = \lambda_0 + o(1)$, donc $f(a+u) \xrightarrow[a\to 0]{} \lambda_0$, donc f est continue en a, et $f(a) = \lambda_0$.

Proposition :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$; f admet un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a, et dans ce cas ce DL est $f(a+u) = f(a) + uf'(a) + o(u)$

En effet :
- Si f admet un DL à l'ordre 1 en a, alors $f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + u\varepsilon(u)$
  Donc avec $u = 0$, $\lambda_0 = f(a)$, et pour $u \neq 0$, $\frac{f(a+u)-f(a)}{u} = \lambda_1 + \varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} \lambda_1$.
- Si f est dérivable en a, on a vu que l'égalité est vraie.

Attention : Il est faux cependant qu'on ait un tel rapport pour les ordres supérieurs à 2.

Exemple :

Soit $f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

Alors f admet un DL à l'ordre 2 en 0.

$$f(x) = o(x^2) \tag{14.13}$$

Donc f admet un DL à l'ordre 1 en 0 qui s'écrit $f(x) = o(x)$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$

Donc $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \underbrace{3x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{pas de limite}}$

Donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Cependant :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors f admet en tout point a de I un DL à l'ordre n, qui est donné par la formule de Taylor–Young :

$$f(a+u) = f(a) + f'(a) \times u + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}u^n + o(u^n) \tag{14.14}$$

Exercice :

Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3+x \end{array}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer $f^{-1}(0), (f^{-1})'(0), (f^{-1})''(0), (f^{-1})'''(0)$.

Déjà f est bijective, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dérivée ne s'annulant pas. Donc f^{-1} est de classe C^∞.

Comme f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet un DL à l'ordre 3 en 0 :

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x) \tag{14.15}$$

et

$$\forall k \in [\![0,3]\!], a_k = \frac{(f^{-1})^{(k)}(0)}{k!}. \tag{14.16}$$

Pour tout réel x, on a :

$f^{-1}(f(x)) = x = x + o(x^3)$ d'une part.

et

$$f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1(x+x^3) + a_2(x+x^3)^2 + a_3(x+x^3)^3 + (x+x^3)^3\varepsilon(x+x^3) \tag{14.17}$$

Soit

$$f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1x + a_1x^3 + a_2x^2 + o(x^3) + a_3x^3 + o(x^3) + \underbrace{x^3\underbrace{(1+x^2)^3}_{\to 1}\underbrace{\varepsilon(x+x^3)}_{\to 0}}_{=o(x^3)} \tag{14.18}$$

Donc $f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + (a_1+a_3)x^3 + o(x^3)$

Donc $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$

Donc $f^{-1}(0) = 0$, $(f^{-1})'(0) = 1$, $(f^{-1})''(0) = 0$, $(f^{-1})'''(0) = 3! \times (-1) = -6$

III « Opérations sur les DL »

A) « Retour à 0 »

On rappelle que $x \mapsto f(x)$ a un DL à l'ordre n en a si et seulement si $u \mapsto f(u+a)$ a un DL à l'ordre n en 0.

Exemple :

DL à l'ordre 3 en 1 de exp.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$e^{1+u} = e \times e^u = e + eu + e\frac{u^2}{2} + e\frac{u^3}{6} + eu^3\varepsilon(u) \tag{14.19}$$

où $\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

B) Somme, produit par un réel

Proposition :

Soient $f, g \colon I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Si f et g admettent un DL à l'ordre n en a, alors λf et $f+g$ aussi, et les parties principales des DL de λf et $f+g$ sont obtenues en faisant respectivement le produit de la partie principale du DL de f par λ, et en faisant la somme des parties principales des DL de f et g.

Démonstration (sans introduire les notations) :

On a :

$$f(a+x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}_{P(x)} + x^n \varepsilon(x) \tag{14.20}$$

$$g(a+x) = \underbrace{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}_{Q(x)} + x^n \eta(x) \tag{14.21}$$

Donc :

$$(f(a+x) + g(a+x) = P(x) + Q(x) + \underbrace{x^n \eta(x)}_{=o(x^n)} + \underbrace{x^n \varepsilon(x)}_{=o(x^n)} \tag{14.22}$$

Exemple :

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \tag{14.23}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \tag{14.24}$$

Donc $e^x + \cos x = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Et $e^x + 2\cos x = 3 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

C) Produit de deux DL

Exemple :

On a :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \tag{14.25}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \tag{14.26}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin x\sqrt{1+x} &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3)\end{aligned} \tag{14.27}$$

Proposition :

Si deux fonctions f et g admettent un DL à l'ordre n en a, alors $f \times g$ admet un DL à l'ordre n en a, obtenu en ne conservant que les termes de degré $\leqslant n$ dans le produit des parties principales (polynomiales) des DL de f et g.

Démonstration (sans introduire les notations) :

On a :

$$f(a+x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}_{P(x)} + x^n \varepsilon(x) \tag{14.28}$$

$$g(a+x) = \underbrace{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}_{Q(x)} + x^n \eta(x) \tag{14.29}$$

Donc :

$$f(a+x)g(a+x) = P(x)Q(x) + \underbrace{P(x)x^n\eta(x)}_{o(x^n)} + \underbrace{Q(x)x^n\varepsilon(x)}_{o(x^n)} + \underbrace{x^n x^n \varepsilon(x)\eta(x)}_{=o(x^{2n})=o(x^n)} \tag{14.30}$$

D) Composition de DL

Exemple :

On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \tag{14.31}$$

où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Donc

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \underbrace{(-1)^n \varepsilon(-x)}_{\to 0} \tag{14.32}$$

On a donc obtenu le DL à l'ordre n en 0 de $x \mapsto e^{-x}$.

Théorème :

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$

Soit $g\colon J \to \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$

Si f a un DL à l'ordre n en a, et g un DL à l'ordre n en $f(a)$, alors $g \circ f$ a un DL à l'ordre n en a, donné dans la démonstration.

Démonstration :

On a :

$$f(a+x) = \underbrace{\lambda_0}_{f(a)} + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x), \qquad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{14.33}$$

$$g(\lambda_0 + u) = \mu_0 + \mu_1 u + \mu_2 u^2 + \cdots + \mu_n u^n + u^n \eta(u), \qquad \text{où } \eta(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \tag{14.34}$$

Donc

$$\begin{aligned} g(f(a+x)) &= g(\lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x)}_{u}) \\ &= \mu_0 + \mu_1(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x)) \\ &\quad + \mu_2(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x))^2 + \cdots \\ &\quad + \mu_n(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x))^n \\ &\quad + \underbrace{\underbrace{(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x))^n}_{x^n \times \text{termes qui tendent vers } \lambda_1^n \text{ quand } x\to 0} \underbrace{\eta(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x))}_{\to 0}}_{=o(x^n)} \end{aligned} \tag{14.35}$$

On a donc la somme d'un polynôme en x de degré $\leqslant n$ et d'une fonction négligeable devant x^n.

Exemple :

- DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{\cos x}$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \tag{14.36}$$

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \sqrt{1+u} \qquad \text{avec } u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \tag{14.37}$$

$$u \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{14.38}$$

Donc :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + u^3\eta(u) \tag{14.39}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x} &= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3) - \frac{1}{8}(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))^2 + \frac{1}{16}(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))^3 \\ &\quad + \underbrace{(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))^3\,\underbrace{\eta(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))}_{\to 0}}_{=o(x^6)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\end{aligned} \tag{14.40}$$

On remarque qu'on pouvait se contenter de $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2\eta(u)$

- DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin^3 x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \qquad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{14.41}$$

$$(\sin x)^3 = x^3(1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x))^3 = x^3 + x^3\eta(x), \qquad \text{où } \eta(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \tag{14.42}$$

On pouvait là aussi se contenter de $\sin x = x + o(x^2)$

- DL à l'ordre 4 de $x \mapsto e^{\cos x}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \tag{14.43}$$

$$e^{\cos x} = \exp(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = e\exp(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) \tag{14.44}$$

Or,

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^2) \tag{14.45}$$

Donc

$$\exp(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \tag{14.46}$$

Donc

$$e^{\cos x} = e - e\frac{x^2}{2} + e\frac{x^4}{6} + o(x^4) \tag{14.47}$$

E) Inverse

Proposition :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si $f(a) \neq 0$, et si f a un DL à l'ordre n en a, alors $\frac{1}{f}$ aussi.

Démonstration :

On a :

$$f(a+x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x), \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ et } \lambda_0 \neq 0. \tag{14.48}$$

Comme f a un DL à l'ordre n en a, f a un DL à l'ordre 0 en a, donc f est continue en a, donc, comme $f(a) \neq 0$, f est strictement du signe de $f(a)$ au voisinage de a, donc $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(a+x)} &= \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x)} \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \times \frac{1}{1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + x^n \eta(x)} \end{aligned} \tag{14.49}$$

Où $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$, et $\eta = \frac{\varepsilon}{\lambda_0}$

On note $g(x) = \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + x^n \eta(x)$

Alors g a un DL à l'ordre n en 0, et $g(0) = 0$

$u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ a un DL à l'ordre n en 0, donc, par composition, $x \mapsto \dfrac{1}{1+g(x)}$ a un DL à l'ordre n en 0, d'où l'existence.

Rappel :

On a :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n) \tag{14.50}$$

Exemple :

- DL à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos x}$:

$$1 + \cos x = 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \tag{14.51}$$

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)}\right) \tag{14.52}$$

Or, $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$

Si on prend $u = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)$, on aura :

$$u^2 = \frac{x^4}{16} + o(x^4) \tag{14.53}$$

Et $o(u^2) = o(x^4)$ car $u^2 \sim \frac{x^4}{16}$ Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\cos x} &= \frac{1}{2}\left(1 - (-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)) + (\frac{x^2}{16} + o(x^4)) + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{48} + o(x^4) \end{aligned} \tag{14.54}$$

- DL à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{6}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$:

$$\sin(\frac{\pi}{6} + u) = \sin u \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos u \times \frac{1}{2} \tag{14.55}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} + u)} &= \frac{2}{\sqrt{3}\sin u + \cos u} = \frac{2}{\sqrt{3}(u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)) + (1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3))} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{3}u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}u^3 + o(u^3)} \end{aligned} \tag{14.56}$$

Or, $\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - v^3 + o(v^3)$
Si on prend $v = \sqrt{3}u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}u^3 + o(u^3)$, on a :

$$v^2 = u^2(\sqrt{3} - \frac{1}{2}u \underbrace{- \frac{\sqrt{3}}{6}u^2 + o(u^2)}_{=o(u)})^2 = u^2(3 - \sqrt{3}u + o(u)) = 3u^2 - \sqrt{3}u^3 + o(u^3) \tag{14.57}$$

$$v^3 = 3\sqrt{3}u^3 + o(u^3) \tag{14.58}$$

$$o(v^3) = o(u^3) \text{ car } v^3 \sim 3\sqrt{3}u^3 \tag{14.59}$$

Donc

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} + u)} = 2(1 - \sqrt{3}u + \frac{7}{2}u^2 - \frac{23\sqrt{3}}{6}u^3 + o(u^3)) \tag{14.60}$$

IV Primitive, dérivée

A) Primitive

Théorème :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, admettant un DL à l'ordre n en a.
Si f admet une primitive F sur I, alors F admet un DL à l'ordre $n+1$ en a, obtenu de la manière suivante :
Si $f(a+x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$,
Alors $F(a+x) = F(a) + \lambda_0 x + \frac{\lambda_1}{2}x^2 + \frac{\lambda_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{\lambda_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$.

Démonstration :
On a

$$f(a+x) = \underbrace{\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n}_{P(x)} + x^n \varepsilon(x), \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{14.61}$$

Posons $Q(x) = F(a) + \lambda_0 x + \frac{\lambda_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{n+1}x^{n+1}$
Ainsi, $Q' = P$.
On doit donc montrer que $F(a+x) - Q(x) = o(x^{n+1})$.
Notons $J = \{x \in \mathbb{R}, a + x \in I\}$
Soit $x \in J \setminus \{0\}$.
D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $t \mapsto F(a+t) - Q(t)$ entre 0 et x, il existe $c_x \in \underset{\leftrightarrow}{]0, x[}$ tel que :

$$(F(a+x) - Q(x)) - \underbrace{(F(a) - Q(0))}_{=0} = \underbrace{(f(a+c_x) - P(c_x))}_{(c_x)^n \varepsilon(c_x)} \times x \tag{14.62}$$

Ainsi, pour $x \neq 0$:

$$\frac{F(a+x) - Q(x)}{x^{n+1}} = x \times (c_x)^n \varepsilon(c_x) \frac{1}{x^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{c_x}{x}\right)^n}_{\substack{\text{borné car} \\ |\frac{c_x}{x}| \leqslant 1}} \times \underbrace{\varepsilon(c_x)}_{\substack{\to 0 \text{ car} \\ c_x \xrightarrow[x\to 0]{} 0}} \tag{14.63}$$

Donc $\frac{F(a+x) - Q(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $F(a+x) - Q(x) = o(x^{n+1})$.

B) Dérivation

Théorème :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable et admet un DL à l'ordre n en a, et si f' admet un DL à l'ordre $n-1$ en a, alors ce DL est obtenu ainsi :
Si $f(a+x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + o(x^n)$,
Alors $f'(a+x) = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \dots + n\lambda_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$

Démonstration :
Il suffit d'appliquer à f' le théorème précédent.

Attention : L'hypothèse que f' admet un DL est indispensable :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.64}$$

Alors f admet un DL à l'ordre 2 en 0, à savoir $f(x) = 0 + o(x^2)$
(Puisque $\frac{f(x)}{x^2} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \neq 0]{x \to} 0$)
Mais f' n'admet pas de DL à l'ordre 1 en 0 puisque f n'est pas deux fois dérivable en 0, donc f' n'est pas dérivable en 0, donc n'admet pas de DL à l'ordre 1 en 0.

V Parité

Proposition :
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre n en 0, disons

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n) \tag{14.65}$$

Alors :

- Si f est paire, alors les a_{2i+1} sont nuls.
- Si f est impaire, alors les a_{2i} sont nuls.

Démonstration :
Ici, I est un intervalle contenant 0 et centré en 0. On a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n) \tag{14.66}$$

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + \dots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n) \tag{14.67}$$

Si f est paire, on a alors $f(x) = f(-x)$, et donc $a_1 = -a_1$,...
Si f est impaire, on a alors $f(x) = -f(-x)$, et donc $a_0 = -a_0$,...

VI DL à connaître

Toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elles ont donc un DL à n'importe quel ordre en 0 :

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{14.68}$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{14.69}$$
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \begin{cases} o(x^{2p}) \\ o(x^{2p+1}) \end{cases} \tag{14.70}$$
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \begin{cases} o(x^{2p+1}) \\ o(x^{2p+2}) \end{cases} \tag{14.71}$$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \begin{cases} o(x^{2p}) \\ o(x^{2p+1}) \end{cases} \tag{14.72}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \begin{cases} o(x^{2p+1}) \\ o(x^{2p+2}) \end{cases} \tag{14.73}$$

- $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{14.74}$$

On en tire plusieurs résultats :

◇ Déjà,
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \tag{14.75}$$
D'où, par intégration,
$$\mathrm{Arctan}(x) = 0 + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \tag{14.76}$$

◇ Mais aussi, par intégration,
$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \tag{14.77}$$

◇ Ou encore
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) \tag{14.78}$$
D'où
$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}) \tag{14.79}$$
Et, par intégration :
$$\mathrm{Argth}(x) = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \tag{14.80}$$
(Qu'on pouvait aussi retrouver en considérant que $\mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$)

- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \tag{14.81}$$

Avec :
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1) \times (\frac{1}{2} - 2) \times \cdots \times (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} = \frac{1}{2^n n!} \times (-1) \times (-3) \times \cdots \times (-(2n-3)) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-3) \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n \times (2n-1)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{2^n n!(2n-1)} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} \end{aligned} \tag{14.82}$$

- $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \tag{14.83}$$

Avec :
$$b_n = \frac{(-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2} - 1) \times (-\frac{1}{2} - 2) \times \cdots \times (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} = \cdots = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \tag{14.84}$$

- $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots + b_n x^{2n} + o(x^{2n}) \quad (14.85)$$
  - ◇ Donc par intégration :
    $$\mathrm{Argsh}(x) = 0 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{5\times 8} + \cdots + \frac{b_n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad (14.86)$$
  - ◇ Ou
    $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots + |b_n| x^{2n} + o(x^{2n}) \quad (14.87)$$
    D'où, par intégration :
    $$\mathrm{Arcsin}(x) = 0 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{5\times 8} + \cdots + \frac{|b_n|}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad (14.88)$$
    Et
    $$\mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{5\times 8} - \cdots - \frac{|b_n|}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad (14.89)$$
- $\tan(x)$: deux méthodes :
  - ◇ $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = \cdots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \begin{cases} o(x^5) \\ o(x^6) \end{cases} \quad (14.90)$$
  - ◇ $$\tan x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5) \quad (14.91)$$
    La dérivée de tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, donc admet un DL à l'ordre 4 en 0, et :
    $$\tan' x = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4) \quad (14.92)$$
    Or,
    $$\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + (x + ax^3 + bx^5 + o(x^5))^2 = 1 + x^2 + 2ax^4 + o(x^4) \quad (14.93)$$
    Donc, par unicité des coefficients d'un DL : $3a = 1$, $5b = 2a$. Donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{15}$

VII Applications

A) Recherche de limites, d'équivalents (exemples)

- $\lim_{x\to 1} \lim \frac{\ln x}{x-1}$? On peut réutiliser les méthodes de Terminale (c'est $\ln'(1)$), ou :
  Au voisinage de 0, on a :
  $$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad (14.94)$$
  Donc, pour $u \neq 0$:
  $$\frac{\ln(1+u)}{u} = 1 - \frac{u}{2} + o(u), \text{ d'où } \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 \quad (14.95)$$
  Donc la fonction $f\colon \begin{array}{rcl}]0,+\infty[\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{x-1} \end{array}$ est prolongeable par continuité en 1 par la valeur 1, et la fonction obtenue admet un DL à l'ordre 1 en 1 :
  $f(1+u) = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$. Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Proposition :

- Soit f définie sur $I\setminus\{a\}$, où a est un élément de I.
  S'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0 privé de 0 :
  $f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \cdots + \lambda_n u^n + o(u^n)$, alors f est prolongeable par continuité en a (par $f(a) = \lambda_0$), et la fonction obtenue admet un DL à l'ordre n en a.

- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$?
  Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{\sin x\times\tan x}=\frac{(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3))-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^2+o(x^2)}=\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^2+o(x^2)}\underset{0}{\sim}\frac{x}{2}\tag{14.96}$$

  Donc

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\xrightarrow[x\to 0]{}0\tag{14.97}$$

- Le premier terme non nul d'un DL donne un équivalent : Si

$$f(x)=\lambda_p x^p+\underbrace{\lambda_{p+1}x^{p+1}+\cdots+\lambda_n u^n+o(u^n)}_{o(x^p)}\tag{14.98}$$

  (avec $\lambda_p\neq 0$), alors $f(x)\underset{0}{\sim}\lambda_p x^p$.

- Donner un équivalent en $+\infty$ de $e^{1/x^2}-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
  Au voisinage de 0, on a :

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\tag{14.99}$$

$$\cos u=1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\tag{14.100}$$

$$\sin u=u+o(u^2)\tag{14.101}$$

  Donc $e^u-\cos u-\sin u=u^2+o(u^2)$ D'où

$$e^{1/x^2}-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x^4}\tag{14.102}$$

B) Dérivée, tangente, position d'une courbe par rapport à une tangente

On suppose que f admet un DL à l'ordre au moins 2 en a :
$f(a+u)=\lambda_0+\lambda_1 u+\lambda_2 u^2+\cdots+\lambda_n u^n+o(u^n)$, où $n\geqslant 2$
De ce DL, on tire : $f(a)=\lambda_0$, $f'(a)=\lambda_1$
D'où l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point A d'abscisse a : $y=\lambda_0+\lambda_1(x-a)$
La position de $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T est donnée par le signe de :

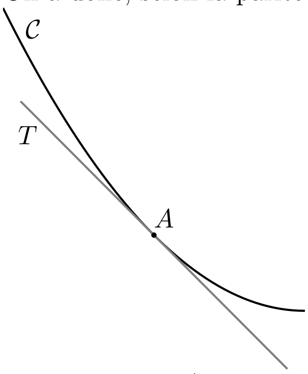
$$\underbrace{f(x)-(\lambda_0+(x-a)\lambda_1)}_{\Delta(x)}=\lambda_2(x-a)^2+\cdots+o((x-a)^n)\tag{14.103}$$

Si $\lambda_2\neq 0$:

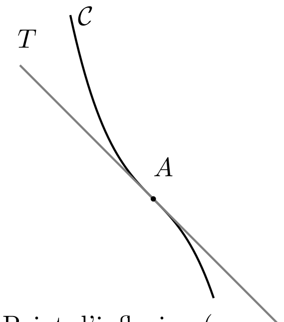
$$\Delta(a+u)=u^2(\lambda_2+\varepsilon(u))\tag{14.104}$$

Donc $\Delta(x)$ est du signe de λ_2 au voisinage de a.
Si $\lambda_2=0$, et si on suppose de plus qu'on peut faire un DL jusqu'à un ordre p suffisant de sorte que le coefficient de u^p ne soit pas nul :
$\Delta(a+u)=\lambda_p u^p+o(u^p)$ où $p>2$ et $\lambda_p\neq 0$
Soit $\Delta(a+u)=u^p(\lambda_p+\varepsilon(u))$
Donc $\Delta(a+u)$ est du signe de λ_p pour $u>0$ au voisinage de a et du signe de $(-1)^p\lambda_p$ pour $u<0$ toujours au voisinage de a.

On a donc, selon la parité de p :



Point ordinaire (pour p pair)



Point d'inflexion (pour p impair)

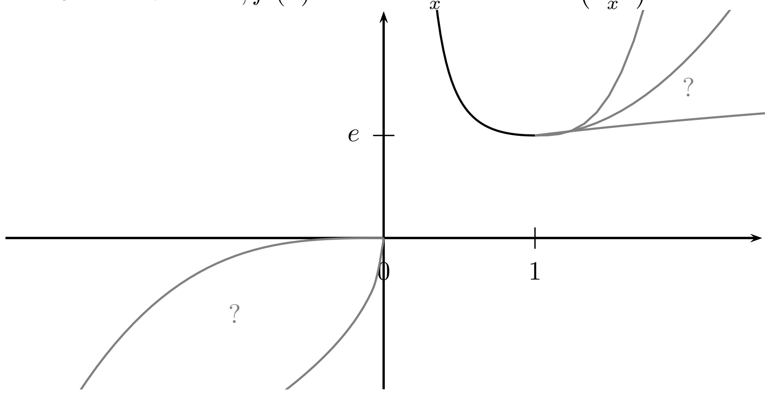
C) Étude locale en $+\infty$

Exemple :

Étude de la fonction $f\colon x \mapsto xe^{1/x}$.

Déjà f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x}e^{1/x} = e^{1/x}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$



Étude en $+\infty$ ou $-\infty$:

Au voisinage de 0 :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u), \quad \text{où } \varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \tag{14.105}$$

Donc

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{où } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \tag{14.106}$$

Donc

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \tag{14.107}$$

Ainsi, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ qui tend vers 0.

La droite $\mathcal{D}$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$

De plus,

$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{>0 \text{ au voisinage de } \pm\infty} \tag{14.108}$$

Donc $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$ en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

Étude à gauche en 0 :

On pose $f(0) = 0$

Ainsi, f est continue à gauche en 0.

Pour $x < 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = e^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$.

Donc f est dérivable à gauche en 0, et $f'_g(0) = 0$