



# Chapitre 13 : Fonctions hyperboliques

Pour les graphiques, le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## I Les fonctions hyperboliques directes

### A) Définition

#### Définition :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{et pour } x \neq 0, \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad (13.1)$$

Déjà, on a la formule :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (13.2)$$

En effet : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = e^{-x} e^x = 1$

### B) Étude de la fonction sh (sinus hyperbolique)

- On voit tout de suite qu'elle est impaire, strictement croissante et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- De plus, on voit immédiatement aussi que :

$$(\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = +\infty, \quad \operatorname{sh}(0) = 0 \quad (13.3)$$

- Ainsi, sh est une bijection continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- DL à n'importe quel ordre en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (13.4)$$

et

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (13.5)$$

donc

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \quad (13.6)$$

### C) Étude de la fonction ch (cosinus hyperbolique)

- On voit tout de suite qu'elle est paire et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

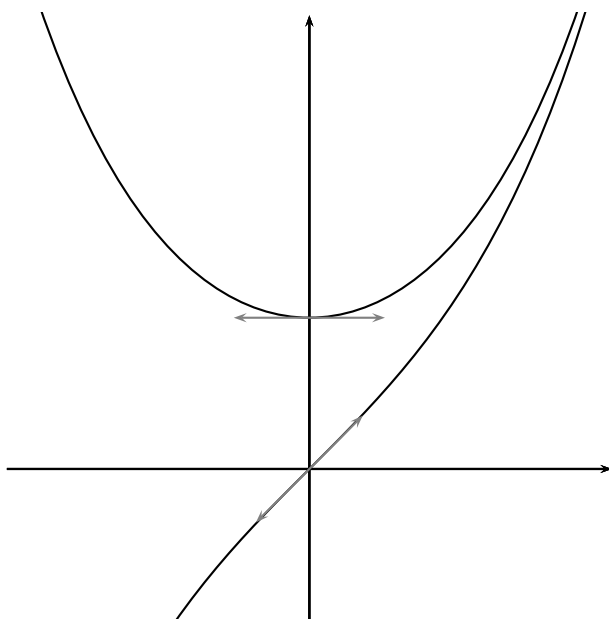
- On a sans difficulté :

$$(\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{x} = +\infty, \quad \operatorname{ch}(0) = 1 \quad (13.7)$$

- Il en résulte que  $\operatorname{ch}$  constitue une bijection continue strictement croissante de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[1, +\infty[$ .
- DL à un ordre quelconque en 0 :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \quad (13.8)$$

### D) Graphes comparés des fonctions $\operatorname{sh}$ et $\operatorname{ch}$



- Les sens de variation, les tangentes au point d'abscisse 0 et les branches infinies (qui sont des branches paraboliques verticales) sont immédiatement tirés des études précédentes.
- De plus, comme  $(\operatorname{sh})'' = \operatorname{sh}$ , la fonction  $\operatorname{sh}$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$  et concave sur  $\mathbb{R}_-$ , ce qui donne la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 (position que l'on retrouve localement grâce au DL)
- Enfin, comme  $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$ ,  $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$  est positif et tend vers 0 en  $+\infty$
- Notons enfin que la courbe représentative de  $\operatorname{ch}$  ressemble à une parabole mais n'en est pas une (c'est une chaînette : c'est la forme que prend effectivement une chaînette lorsqu'elle est pendue par deux bouts...)

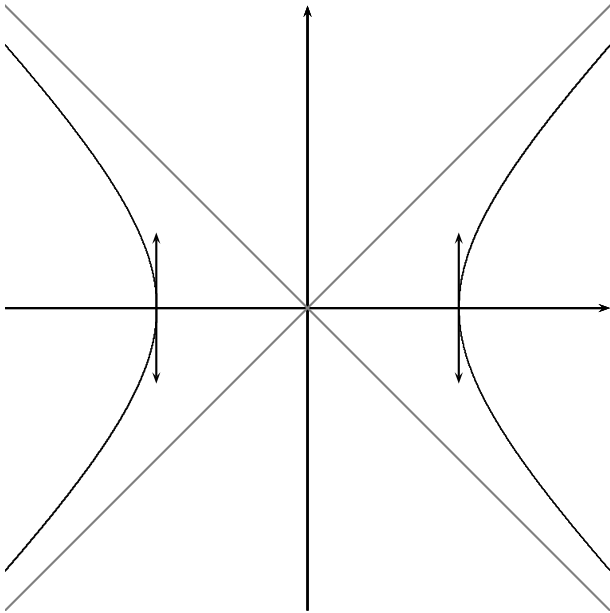
### E) Justification du terme hyperbolique

- Les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  s'appellent des fonctions circulaires parce que le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  peut se paramétrer en 
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
- La branche « droite » de l'hyperbole  $x^2 - y^2 = 1$  peut quant à elle se paramétrer en 
$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

En effet :  $\diamond$  Si  $M$  a pour coordonnées  $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , comme on a  $\operatorname{ch} t > 0$  et  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ ,  $M$  appartient donc bien à la branche droite de l'hyperbole.

$\diamond$  Réciproquement, si  $M(x, y)$  appartient à cette branche droite, alors :

Soit  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $y = \operatorname{sh} t$  (il en existe un, et même un seul). Mais comme  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$  et  $x^2 - y^2 = 1$ , on a alors  $x^2 = \operatorname{ch}^2 t$ , et, comme  $x > 0$ ,  $x = \operatorname{ch} t$ .



### F) Fonction th (tangente hyperbolique)

- $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
- th est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , impaire.
- $(\operatorname{th})'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1$

De ces trois derniers points, on tire que th constitue une bijection continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1, 1[$

- DL en 0 :

th admet un DL en 0 à tout ordre, et on obtient les premiers termes de la même façon qu'avec la fonction tangente :

$$\operatorname{th} x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5) \quad \text{car th est impaire et } (\operatorname{th})'(0) = 1 \quad (13.9)$$

$$\operatorname{th}' x = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4) \quad (13.10)$$

$$\operatorname{th}^2 x = x^2(1 + ax^3 + o(x^2))^2 = x^2(1 + 2ax^2 + o(x^2)) \quad (13.11)$$

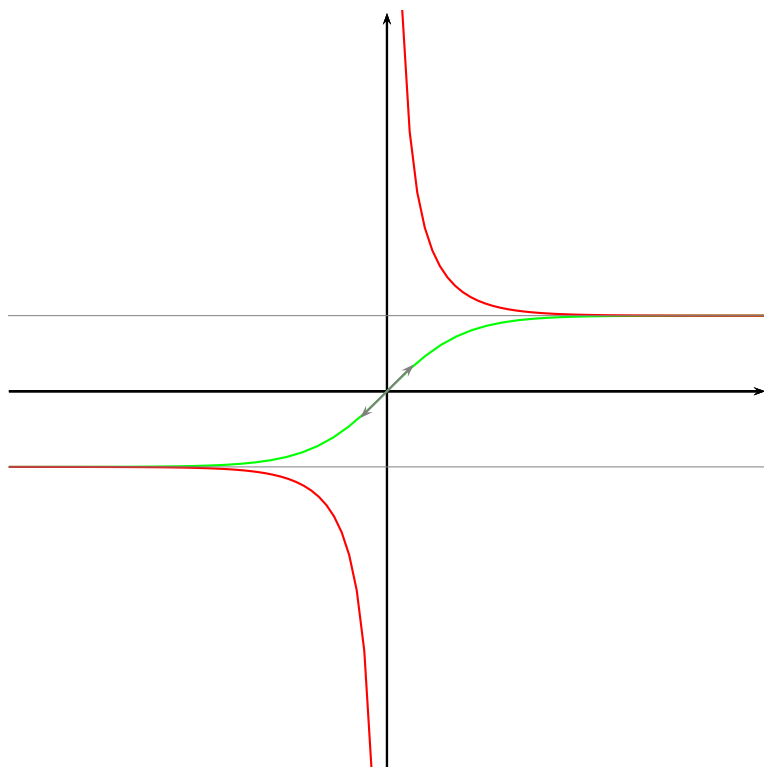
$$1 - \operatorname{th}^2 x = 1 - x^2 - 2ax^4 + o(x^2) = (\operatorname{th})'(x) \quad (13.12)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 3a = -1 \\ 5b = -2a \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{15} \end{cases}.$$

Ainsi,  $\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

**G) Fonction coth (cotangente hyperbolique)**

- Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , impaire.
- $(\coth)'(x) = \frac{\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x}{\text{sh}^2 x} = 1 - \coth^2 x = \frac{-1}{\text{sh}^2 x}$
- Et autres propriétés tirées de  $\coth x = \frac{1}{\text{th} x}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$

**H) Graphes de th et coth****II Formulaire**

On tire tout de suite des définitions les formules suivantes :

$$\text{ch } x + \text{sh } x = e^x \quad \text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x} \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \quad (13.13)$$

Formules d'addition :

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch } a \times \text{ch } b + \text{sh } a \times \text{sh } b \quad \text{sh}(a+b) = \text{sh } a \times \text{ch } b + \text{ch } a \times \text{sh } b \quad (13.14)$$

**Démonstration (De la première égalité) :**

On a

$$\begin{aligned} \text{ch } a \times \text{ch } b + \text{sh } a \times \text{sh } b &= \frac{1}{4} ((e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})) \\ &= \frac{1}{4} (e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^{a+b} + 2e^{-a-b}) = \text{ch}(a+b) \end{aligned} \quad (13.15)$$

La démonstration de la deuxième égalité est analogue.

De (13.14), on tire :

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \times \operatorname{th} b} \quad (13.16)$$

En effet :

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh} a \times \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \times \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \times \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \times \operatorname{sh} a} = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \times \operatorname{th} b} \quad (13.17)$$

(dernière égalité obtenue en divisant « en haut et en bas » par  $\operatorname{ch} a \times \operatorname{ch} b$ )

De (13.14) et (13.16), on tire alors :

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a = 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 \quad (13.18)$$

$$\operatorname{sh}(2a) = 2 \operatorname{sh} a \times \operatorname{ch} a \quad (13.19)$$

$$\operatorname{th}(2a) = \frac{2 \operatorname{th}(a)}{1 + \operatorname{th}^2 a} \quad (13.20)$$

Ces dernières formules donnent alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et en posant  $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad (13.21)$$

En effet : On a  $\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a}{\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$  (en divisant haut et bas par  $\operatorname{ch}^2 a$ )

De même pour  $\operatorname{sh}(2a)$ , puis poser ensuite  $x = 2a$

Enfin, il faut savoir retrouver ce que l'on obtient par addition et par soustraction à partir de (13.14) :

$$\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b) = 2 \operatorname{ch} a \times \operatorname{ch} b \quad (13.22)$$

$$\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b) = 2 \operatorname{sh} a \times \operatorname{sh} b \quad (13.23)$$

$$\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b) = 2 \operatorname{sh} a \times \operatorname{ch} b \quad (13.24)$$

$$\operatorname{sh}(a+b) - \operatorname{sh}(a-b) = 2 \operatorname{ch} a \times \operatorname{sh} b \quad (13.25)$$

Ces quatre formules permettent de linéariser des produits (c'est-à-dire les transformer en sommes), ce qui est utile dans de nombreux cas. Réciproquement, en posant au besoin  $\begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases}$ , on transforme des sommes en produits.

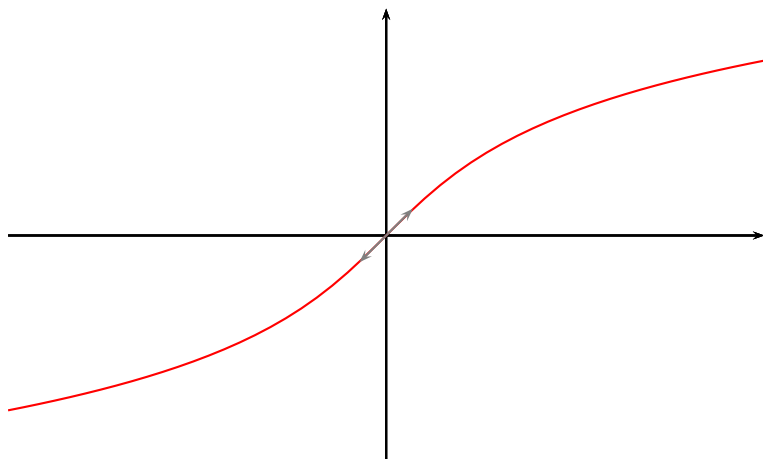
Moyen mnémotechnique à partir des formules de la trigonométrie circulaire : les signes qui précèdent un sinus carré ou un produit de deux sinus, ou une tangente carrée ou un produit de deux tangentes sont échangé, le reste est pareil.

### III Fonctions hyperboliques inverses

#### A) Argsh (Argument sinus hyperbolique)

$\operatorname{sh}$  réalise une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dont la dérivée ne s'annule pas.

On appelle  $\operatorname{Argsh}$  la réciproque de cette bijection.  $\operatorname{Argsh}$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et strictement croissante.



Dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}(x))} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{Argsh}(x))}} \quad (13.26)$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Propriétés diverses :

- Argsh est impaire (car sh l'est)
- $\text{Argsh } x \underset{0}{\sim} x$

Expression logarithmique :

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences :

$$y = \text{Argsh } x \iff \text{sh } y = x \iff \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \quad (13.27)$$

Résolution de l'équation  $u^2 - 2xu - 1 = 0$  (d'inconnue  $u$ ) :

Les racines sont  $x \pm \sqrt{1+x^2}$ .

Donc, en reprenant les équivalences :

$$\begin{aligned} y = \text{Argsh } x &\iff e^y = x - \sqrt{1+x^2} \text{ ou } e^y = x + \sqrt{1+x^2} \\ &\iff e^y = x + \sqrt{1+x^2} \\ &\iff y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \end{aligned} \quad (13.28)$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh } x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

### B) Argch (Argument cosinus hyperbolique)

ch réalise une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  strictement croissante de  $[0, +\infty[$  dans  $[1, +\infty[$ . On appelle Argch sa réciproque.

Argch est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ , et :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{Argch}(x))} = \frac{1}{\underbrace{\text{sh}(\text{Argch}(x))}_{>0}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2(\text{Argch}(x)) - 1}} \quad (13.29)$$

Soit  $\forall x \in ]1, +\infty[, \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

**Expression logarithmique :**

Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Posons  $y = \operatorname{Argch} x$ .  $y$  est l'unique réel positif dont le ch vaut  $x$ , c'est-à-dire  $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$   
On a les équivalences :

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \iff e^{2y} + 1 - 2xe^y = 0 \iff e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad (13.30)$$

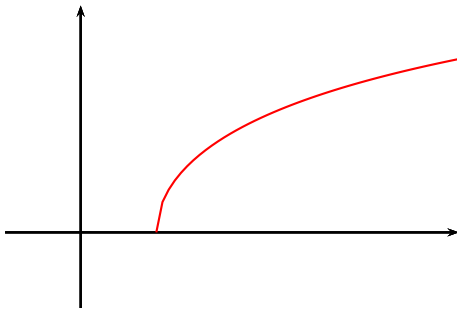
Or,  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq x \geq 1$  et  $x - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1$  (car  $(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$ )

De plus,  $y \geq 0$  donc  $e^y \geq 1$

Donc en reprenant les équivalences :

$$\begin{aligned} e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} &\iff e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ &\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned} \quad (13.31)$$

Ainsi,  $\forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

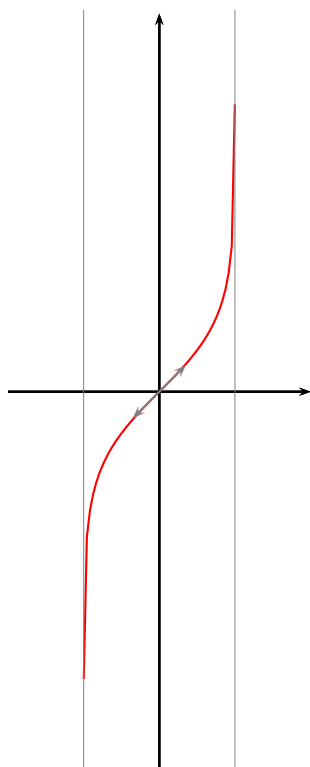


### C) Argth (Argument tangente hyperbolique)

Argth est définie sur  $] -1, 1[$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , strictement croissante, et est impaire.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Argth} x = +\infty, \quad \operatorname{Argth} 0 = 0, \quad \operatorname{Argth} x \underset{0}{\sim} x \quad (13.32)$$

$$\forall x \in ] -1, 1[, \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{Argth} x)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{Argth} x)} = \frac{1}{1 - x^2} \quad (13.33)$$



**Expression logarithmique :**

On peut faire par résolution de l'équation  $x = \text{th } y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$ ...

**Autre méthode :**

Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \quad (13.34)$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$  est donc  $x \mapsto \frac{1}{2} (\ln|1+x| - \ln|1-x|)$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{2} (\ln|1+x| - \ln|1-x|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad (13.35)$$

Donc  $\text{Argth } x$  et  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  ne diffèrent que d'une constante. Or, elles sont toutes deux nulles en

0, donc  $\forall x \in ]-1, 1[, \text{Argth } x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ .

## IV Arcoth (Argument cotangente hyperbolique)

Arcoth est définie sur  $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \text{Arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (13.36)$$

**Expression logarithmique :**

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \text{Arcoth } x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \text{cte} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \quad (13.37)$$



