Chapitre 12 : Fonctions circulaires réciproques

I La fonction Arcsin

A) Étude

Soit $f\colon \begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$.

Alors f est continue et strictement croissante, de plus $f(-\frac{\pi}{2})=-1$ et $f(\frac{\pi}{2})=1$.

Donc f est une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$.

B) Définition

Définition :

Arcsin est la fonction de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ qui est la réciproque de la bijection $f\colon \begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$.

On a ainsi :

$$\boxed{\forall x\in[-1,1],\forall y\in\mathbb{R},(y=\operatorname{Arcsin}(x)\iff y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\text{ et }\sin y=x)} \tag{12.1}$$

Ou :

Arcsin(x) est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x.

C) Propriétés de la fonction Arcsin

Elles résultent des propriétés de la fonction $x\mapsto\sin x$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et des théorèmes portant sur les fonctions réciproques des bijections continues et strictement monotones sur un intervalle :

- $\forall x\in[-1,1],-\frac{\pi}{2}\leqslant\operatorname{Arcsin}(x)\leqslant\frac{\pi}{2}$
- Arcsin est continue
- Arcsin est strictement croissante
- Arcsin est impaire (car $x\mapsto\sin x$ l'est sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$)

  En effet : Soit $x\in[-1,1]$.

  Alors $-\operatorname{Arcsin}(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, et $\sin(-\operatorname{Arcsin}(x))=-\sin(\operatorname{Arcsin}(x))=-x$, donc $-\operatorname{Arcsin}(x)$ est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est $-x$, c'est-à-dire que $-\operatorname{Arcsin}(x)=\operatorname{Arcsin}(-x)$.
- Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et de plus :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,(\operatorname{Arcsin})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{12.2}$$

En effet : Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\alpha = \operatorname{Arcsin}(x)$. Alors $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\sin\alpha = x$

Comme sin est dérivable en α, et $(\sin)'(\alpha) = \cos(\alpha) \neq 0$, Arcsin est dérivable en x et $(\operatorname{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Mais $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, et $\cos\alpha > 0$.

Donc $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, et de plus $\sin\alpha = x$ donc $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$

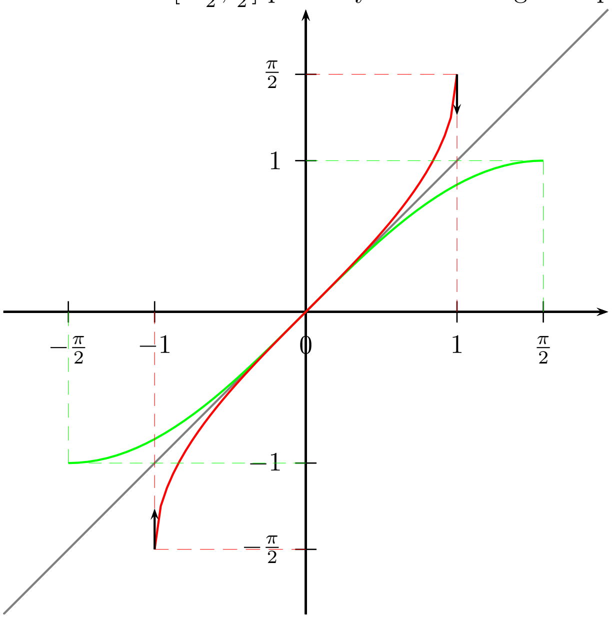
Donc finalement $(\operatorname{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Donc Arcsin est bien dérivable sur $]-1,1[$, et sa dérivée sur $]-1,1[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Donc Arcsin est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

- Arcsin n'est pas dérivable en -1 ni en 1, mais sa courbe présente aux points d'abscisses -1 et 1 une demi tangente verticale. En effet, Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et $(\operatorname{Arcsin})'$ a une limite à gauche en 1 (respectivement à droite en -1) qui est $+\infty$, d'où le résultat avec le théorème liant limite de la dérivée et limite du taux d'accroissement.

- Enfin, la courbe représentative de Arcsin dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ se déduit de celle de sin restreint à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :



La courbe est elle-même un résultat de cours, elle résume l'essentiel des points précédents. Noter aussi la position de la courbe par rapport à la tangente à l'origine.

II La fonction Arccos

A) Étude

La fonction $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est une bijection continue et strictement décroissante.

B) Définition

Définition :

Arccos est la fonction de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$ qui est la réciproque de la bijection $\begin{array}{ccc}[0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x\end{array}$.

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \operatorname{Arccos}(x) \iff y \in [0,\pi] \text{ et } \cos y = x)} \tag{12.3}$$

Ou :

Arccos(x) est l'unique arc entre 0 et π dont le cosinus est x.

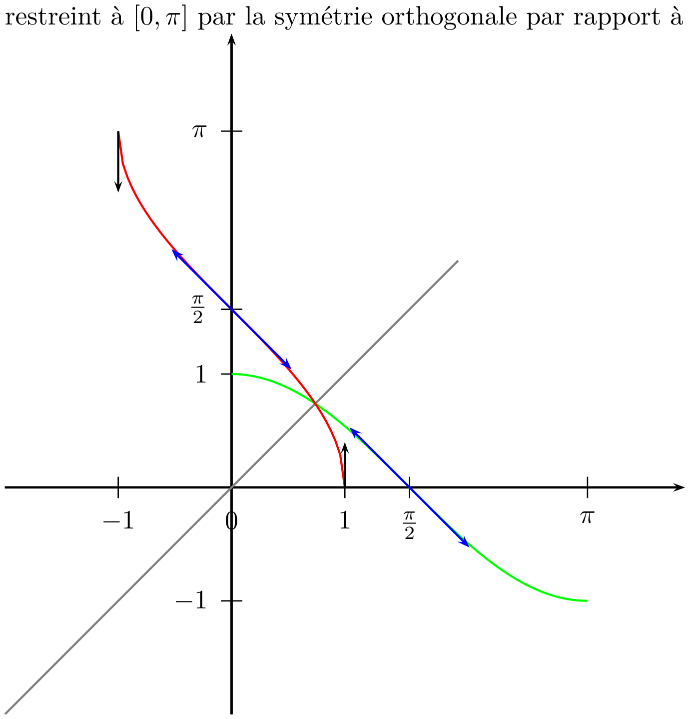
C) Propriétés de la fonction Arccos

- $\forall x \in [-1,1], 0 \leqslant \operatorname{Arccos}(x) \leqslant \pi$
- Arccos est continue
- Arccos est strictement décroissante
- Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et de plus :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, (\operatorname{Arccos})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{12.4}$$

En effet : Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\alpha = \operatorname{Arccos}(x)$. Alors $\alpha \in]0,\pi[$, et $\cos\alpha = x$
Comme cos est dérivable en α, et $(\cos)'(\alpha) = -\sin(\alpha) \neq 0$, Arccos est dérivable en x et $(\operatorname{Arccos})'(x) = \frac{1}{-\sin\alpha} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
D'où, comme pour Arcsin, Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

- Arccos n'est pas dérivable en -1 ni en 1, mais sa courbe présente aux points d'abscisses -1 et 1 une demi tangente verticale.
- La courbe représentative de Arccos dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ se déduit de celle de cosinus restreint à $[0,\pi]$ par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :



- La fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$, mais Arccos n'est pas paire (car cos n'est pas paire sur $[0,\pi]$!)
- En revanche, la courbe présente un centre de symétrie : le point de coordonnées $(0, \frac{\pi}{2})$. Cela se traduit par la formule : $\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$

  Rappel :

  La courbe de f présente un centre de symétrie en $A(x_0, y_0) \underset{\text{déf}}{\iff} I$ est centré en x_0 et $\forall h \in \mathbb{R}, \left((x_0 + h \in I) \implies \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} = y_0\right)$

  Démonstration :

  Soit $x \in [-1,1]$.

  Alors $\operatorname{Arccos}(x) \in [0,\pi]$ et $\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x$

  Donc $\pi - \operatorname{Arccos}(x) \in [0,\pi]$ et $\cos(\pi - \operatorname{Arccos}(x)) = -\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = -x$

  Donc $\pi - \operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arccos}(-x)$ (car $\pi - \operatorname{Arccos}(x) \in [0,\pi]$)

- On déduit la courbe de Arccos de celle de Arcsin en opérant une symétrie orthogonale par rapport à Ox, puis une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{j}$, ce qui se traduit par la formule : $\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$ ($\operatorname{Arccos}(x) = (-\operatorname{Arcsin}(x)) + \frac{\pi}{2}$)

  Démonstration :

  Soit $x \in [-1,1]$.

  Alors $\operatorname{Arccos}(x) \in [0,\pi]$.

  Donc $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(x)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\operatorname{Arccos}(x)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\operatorname{Arccos}(x)\right) \\ &= 1 \times \cos(\operatorname{Arccos}(x)) - 0 = x\end{aligned} \tag{12.5}$$

  Donc $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$

  Soit $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

III La fonction Arctan

A) Étude

La fonction $\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ est une bijection continue et strictement croissante.

B) Définition

Définition :

Arctan est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui est réciproque de la bijection précédente.

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \left(y = \operatorname{Arctan}(x) \iff y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \tan y = x\right)} \tag{12.6}$$

Ou :

Arctan(x) est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est x.

C) Propriétés de la fonction Arctan

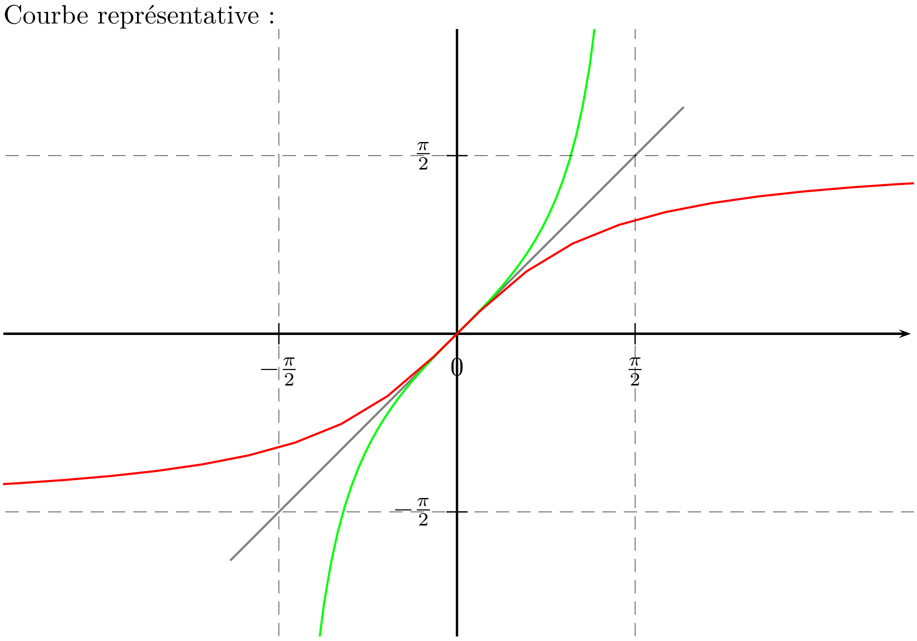
- $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$
- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{-\infty} \mathrm{Arctan} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{+\infty} \mathrm{Arctan} = \frac{\pi}{2}$
- Arctan est impaire.
- Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et de plus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (\mathrm{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}} \tag{12.7}$$

En effet : Soit $x \in \mathbb{R}$, notons $\alpha = \mathrm{Arctan}(x)$. Alors $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan \alpha = x$. Comme tan est dérivable en α et $\tan'(\alpha) = 1 + \tan^2 \alpha \neq 0$, Arctan est dérivable en x, et :

$$(\mathrm{Arctan})'(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{1}{1+x^2} \tag{12.8}$$

- Courbe représentative :



- On a :

$$\forall x > 0, \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \tag{12.9}$$

$$\forall x < 0, \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} \tag{12.10}$$

Démonstration :

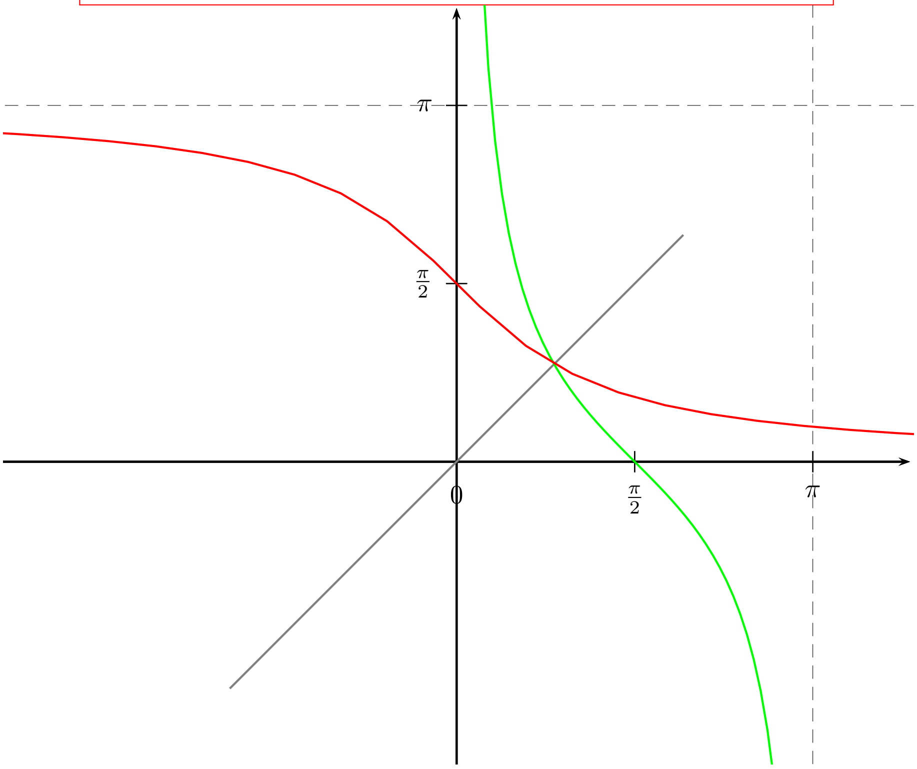
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Notons $\alpha = \mathrm{Arctan}(x)$.

- ◇ Si $x > 0$:
  Alors $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{\pi}{2} - \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$.
  Donc $\frac{\pi}{2} - \alpha = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})$, c'est-à-dire $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
- ◇ Si $x < 0$, alors $-x > 0$,
  donc $\mathrm{Arctan}(-x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{-x}) = \frac{\pi}{2}$, soit $-\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ car Arctan est impaire,
  donc $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

IV La fonction Arccotan

Arccotan est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $]0,\pi[$ qui est la réciproque de la bijection $\begin{array}{rcl}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cotan x \end{array}$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \text{Arccotan}(x) \iff y \in]0,\pi[\text{ et } \cotan y = x)}$



- Arccotan est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{-\infty} \text{Arccotan} = \pi$ et $\lim_{+\infty} \text{Arccotan} = 0$
- Arccotan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (\text{Arccotan})'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}}$
- On a :

$$\forall x > 0, \text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \tag{12.11}$$

$$\forall x < 0, \text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}(\frac{1}{x}) = \frac{3\pi}{2} \tag{12.12}$$

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Notons $\alpha = \text{Arccotan}(x)$

◇ Si $x > 0$:

Alors $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{\pi}{2} - \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et :

$$\cotan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \tan \alpha = \frac{1}{\cotan \alpha} = \frac{1}{x} \tag{12.13}$$

Donc $\frac{\pi}{2} - \alpha = \text{Arccotan}(\frac{1}{x})$, c'est-à-dire $\text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

◇ Si $x < 0$:

Alors $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Donc $\frac{3\pi}{2} - \alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, et :

$$\cotan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} = \tan \alpha = \frac{1}{\cotan \alpha} = \frac{1}{x} \tag{12.14}$$

Donc $\frac{3\pi}{2} - \alpha = \text{Arccotan}(\frac{1}{x})$, soit $\text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}(\frac{1}{x}) = \frac{3\pi}{2}$