



# Chapitre 10 : Formules de Taylor

Dans tout ce chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et les fonctions sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ;  $n$  désigne un entier naturel.

## I Préliminaire

- Soient  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Soit  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \lambda_n x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0 = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$$

Alors  $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \qquad P^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^n k \lambda_k x^{k-1} \qquad (10.1)$$

$$P^{(2)}(x) = n(n-1)\lambda_n x^{n-1} + \dots + 2\lambda_2 \qquad P^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)\lambda_n x^{n-3} + \dots + 6\lambda_3 \qquad (10.2)$$

$$\dots \qquad P^{(n)}(x) = n! \lambda_n \qquad (10.3)$$

Et  $P^{(k)}(x) = 0$  pour  $k > n$

En 0 :

$$P^{(0)}(x) = \lambda_0 \qquad P^{(1)}(x) = \lambda_1 \qquad P^{(2)}(x) = 2\lambda_2 \qquad (10.4)$$

$$\dots \qquad P^{(k)}(x) = k! \lambda_k \text{ pour } 0 \leq k \leq n \qquad (10.5)$$

- Plus généralement :

Soient  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Soit  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \lambda_n (x-a)^n + \lambda_{n-1} (x-a)^{n-1} + \dots + \lambda_1 (x-a) + \lambda_0$$

Alors  $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k)\lambda_n (x-a)^k + \dots + k! \lambda_k \text{ pour } 0 \leq k \leq n \qquad (10.6)$$

On a les mêmes dérivées en  $a$  qu'en 0 dans le premier cas.

- Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $a$ .

Soit  $T_n$  le polynôme de degré  $\leq n$  dont les dérivées successives jusqu'à la  $n$ -ième en  $a$  coïncident avec celles de  $f$ , c'est-à-dire, d'après le préliminaire pour les dérivées successives de  $T_n$  en  $a$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (10.7)$$

Pour tout  $x \in I$ , on pose  $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ .

Écrire une formule de Taylor pour  $f$  à l'ordre  $n$  en  $a$ , c'est écrire :

$$\forall x \in I, f(x) = T_n(x) + R_n(x) \qquad (10.8)$$

$T_n(x)$  s'appelle la partie polynomiale,  $R_n(x)$  le reste.

Le but du chapitre est de donner des théorèmes à propos du reste.

## II Inégalité de Taylor–Lagrange

### Théorème :

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un segment  $[a, b]$ . Alors :

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{T_n(b)} + R_n(b), \quad (10.9)$$

avec

$$|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \quad (10.10)$$

(La borne sup. est bien définie car  $f^{(n+1)}$  est définie et continue sur le segment  $[a, b]$ )

C'est l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre  $n$  de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

### Démonstration :

- Le cas où  $a = b$  est trivial.
- Si  $a < b$  : on va montrer que pour tout  $x \in [a, b]$ , on a :

$$-\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \leq f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \quad (10.11)$$

où  $M = \sum_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$ , ce qui établira le résultat en prenant  $x = b$

◇ Montrons la deuxième inégalité :

Soit  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$$

C'est-à-dire  $\forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(x) - T_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

Alors  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$ , et :

$$\forall x \in [a, b], \varphi'(x) = f'(x) - T_n'(x) - \frac{(x-a)^n}{n!}M \quad (10.12)$$

$$\vdots \quad (10.13)$$

$$\forall x \in [a, b], \varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x) - (x-a)M = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - (x-a)M \quad (10.14)$$

$$\forall x \in [a, b], \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - M \leq 0 \text{ car } f^{(n+1)}(x) \leq M \quad (10.15)$$

Donc  $\varphi^{(n)}$  est décroissante, et  $\varphi^{(n)}(a) = 0$ . Donc  $\forall x \in [a, b], \varphi^{(n)}(x) \leq 0$ , donc  $\varphi^{(n-1)}$  est décroissante, et  $\varphi^{(n-1)}(a) = 0$ . Donc...donc  $\varphi$  est décroissante, et  $\varphi(a) = 0$ , donc  $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq 0$ .

Donc  $\forall x \in [a, b], f(x) - T_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \leq 0$ .

Et, en particulier :  $f(b) - T_n(b) \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

◇ Pour la deuxième inégalité :

Soit  $\varphi$  définie par  $\forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(x) - T_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$ .

Alors  $\varphi \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ , et :

$$\forall x \in [a, b], \varphi'(x) = f'(x) - T_n'(x) + \frac{(x-a)^n}{n!} M \tag{10.16}$$

$$\vdots \tag{10.17}$$

$$\forall x \in [a, b], \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) + M \geq 0 \text{ car } |f^{(n+1)}(x)| \leq M, \text{ soit } f^{(n+1)}(x) \geq -M. \tag{10.18}$$

Donc  $\varphi^{(n)}$  est croissante, et  $\varphi^{(n)}(a) = 0$ . Donc  $\forall x \in [a, b], \varphi^{(n)}(x) \geq 0$ , donc  $\varphi^{(n-1)}$  est croissante, et  $\varphi^{(n-1)}(a) = 0$ . Donc...donc  $\varphi$  est croissante, et  $\varphi(a) = 0$ , donc  $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \geq 0$ .

$$\text{Donc } \forall x \in [a, b], f(x) - T_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} M \geq 0.$$

$$\text{Donc } f(b) - T_n(b) \geq -\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$\diamond \text{ Ainsi, } |f(b) - T_n(b)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|, \text{ soit } |R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

- Si  $a > b$  :

Étant donné  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , en posant  $M = \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$ , on introduit

$$g: [-a, -b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(-x)$$

Alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , et  $\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, \forall x \in [-a, -b], g^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(-x)$ .

Le théorème, montré dans le cas précédent, pour  $g$  entre  $-a$  et  $-b$  donne :

$$g(-b) = g(-a) + (-b+a)g'(-a) + \frac{(-b+a)^2}{2!} g''(-a) + \dots + \frac{(-b+a)^n}{n!} g^{(n)}(-a) + S_n(-b) \tag{10.19}$$

$$\text{avec } |S_n(-b)| \leq \frac{(-b+a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [-a, -b]} |g^{(n+1)}(t)|.$$

On a :

$$g(-a) = f(a) \tag{10.20}$$

$$g(-b) = f(b) \tag{10.21}$$

$$(-b+a)g'(-a) = (-b+a)(-1)f'(a) = (b-a)f'(a) \tag{10.22}$$

$$(-b+a)^2 g''(-a) = (b-a)^2 (-1)^2 f''(a) = (b-a)^2 f''(a) \tag{10.23}$$

$$\dots \tag{10.24}$$

Donc

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + S_n(-b), \tag{10.25}$$

et

$$|S_n(-b)| \leq \underbrace{\frac{(-b+a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{=\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}} \underbrace{\sup_{t \in [-a, -b]} |g^{(n+1)}(t)|}_{=M} \tag{10.26}$$

**Cas particulier (l'inégalité entre 0 et x) :**

Inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et  $x$  pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  :

Soit  $I$  un intervalle contenant 0.

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ .

Alors, pour tout  $x \in I$ , on peut écrire :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x), \tag{10.27}$$

avec

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0, x]} |f^{(n+1)}(t)| \quad (10.28)$$

**Exemple :**

La fonction exponentielle étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , on peut écrire cette inégalité à n'importe quel ordre :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad (10.29)$$

avec

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0, x]} (e^t) \quad (10.30)$$

### III Formule de Taylor–Young

**Théorème :**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ .

Alors il existe une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui tend vers 0 en  $a$  telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad (10.31)$$

« Formule de Taylor–Young à l'ordre  $n$  en  $a$  pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  ».

Autrement dit, au voisinage de  $a$  :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n) \quad (10.32)$$

**Démonstration :**

Soit  $n \geq 1$ .

Pour  $x \in I$ , posons :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \quad (10.33)$$

On a alors déjà l'égalité. Reste à montrer que  $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} 0$ .

Pour cela, on applique l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre  $n-1$  à la fonction  $\varphi : t \mapsto f(t) - T_n(t)$  entre  $a$  et  $x$ , où  $x$  est un élément quelconque de  $I$ .

On a alors :

$$\left| \varphi(x) - \left( \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a) \right) \right| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{t \in [a, x]} |\varphi^{(n)}(t)| \quad (10.34)$$

Mais  $\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(a) = \varphi^{(n)}(a) = 0$ , d'après le préliminaire.

De plus,  $\forall t \in I, \varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \underbrace{T_n^{(n)}(t)}_{=T_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)}$ .

Ainsi,  $|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)|$ .

Donc, pour  $x \neq a$  :

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \quad (10.35)$$

Il reste à montrer que  $\sup_{t \in [a, x]} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

Déjà,  $g: t \mapsto f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)$  est continue sur  $I$  et nulle en  $a$ .

- Soit  $\eta > 0$ .

Comme  $g$  est continue en  $a$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall t \in I, (|t - a| < \alpha \implies |g(t)| < \eta/2)$ .

Alors, pour  $x \in I$  tel que  $|x - a| < \alpha$ , on a :  $\forall t \in [a, x], |g(t)| < \eta/2$

(puisque pour  $t \in [a, x], |t - a| \leq |x - a| < \alpha$ )

Donc  $\forall x \in I, (|x - a| < \alpha \implies \sup_{t \in [a, x]} |g(t)| \leq \eta/2 < \eta)$

- Autre démonstration :

Pour tout  $x \in I$ , on a :

La fonction  $|g|$  est continue sur le segment  $[a, x]$ . Donc, sur ce segment, elle est bien bornée, et elle atteint ses bornes. Il existe donc  $c_x \in [a, x]$  tel que  $\sup_{t \in [a, x]} |g(t)| = |g(c_x)|$ .

On a :

$\forall x \in I, |c_x - a| \leq |x - a|$  car  $c_x \in [a, x]$ .

Donc  $c_x \xrightarrow{x \rightarrow a} a$ , et  $g$  est continue en  $a$ , donc  $g(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a) = 0$ .

D'où  $\sup_{t \in [a, x]} |g(t)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

Dans le cas où  $n = 0$  :

Le théorème dit :

Si  $f$  est continue sur  $I$  contenant  $a$  :  $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$  où  $\varepsilon \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , ce qui est vrai.

**Cas particulier (Taylor–Young à l'ordre  $n$  en 0) :**

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  contenant 0.

Alors  $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$ .

## IV L'égalité de Taylor–Lagrange (hors programme)

**Théorème :**

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  et de classe  $\mathcal{D}^{n+1}$  sur  $]a, b[$  au moins ( $a < b$ )

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad (10.36)$$

**Démonstration :**

Soit  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A \quad (10.37)$$

Où  $A$  est une constante de sorte que  $\varphi(a) = f(b)$ , c'est-à-dire :

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left( f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \right) \quad (10.38)$$

Alors  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ , et dérivable sur  $]a, b[$ , et  $\varphi(a) = \varphi(b) (= f(b))$ .

Il existe donc  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ .

Or, pour tout  $x \in ]a, b[$  :

$$\varphi'(x) = \underbrace{f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - (b-x)f''(x) + \dots}_{=0} + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} A \quad (10.39)$$

Soit  $\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} (f^{(n+1)}(x) - A)$

Or,  $\varphi'(c) = 0$  et  $c \neq b$ , donc  $f^{(n+1)}(c) = A$ , d'où l'égalité cherchée.

**Remarque :**

De cette égalité, on tire aisément l'inégalité de Taylor–Lagrange.

## V Récapitulation, formules à connaître

Rappel des trois théorèmes à l'ordre  $n$  en 0 :

**Théorème (inégalité de Taylor–Lagrange) :**

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ , où  $I$  contient 0. Alors, pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x), \quad (10.40)$$

avec

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in \overset{\leftrightarrow}{[0, x]}} |f^{(n+1)}(t)| \quad (10.41)$$

**Théorème (Taylor–Young) :**

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ , où  $I$  contient 0. Alors, au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n) \quad (10.42)$$

**Théorème (Égalité de Taylor–Lagrange) :**

Soit  $f$   $n+1$  fois dérivable sur  $I$  contenant 0.

Alors, pour tout  $x \in I \setminus \{0\}$ , il existe  $c_x \in \overset{\leftrightarrow}{]0, x[}$  tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) \quad (10.43)$$

Formule de Taylor–Young des fonctions usuelles en 0 (de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle contenant 0) :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$  (ordre  $n$ )
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$  (ordre  $2n$ )  
Et même  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$  (ordre  $2n+1$ )
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$  (ordre  $2n+1$ )  
Et même  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$  (ordre  $2n+2$ )

- $f_\alpha: x \mapsto (1+x)^\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$ .

$$f_\alpha^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha \qquad f_\alpha^{(1)}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad (10.44)$$

$$f_\alpha^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad \dots \qquad (10.45)$$

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}_{n \text{ termes}} (1+x)^{\alpha-n} \qquad (10.46)$$

$$\text{Donc } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

**Commentaire :**

Le cosinus à l'ordre 2 donne :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \qquad (10.47)$$

$$\text{Donc } \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\text{C'est-à-dire } \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

**Cas particulier (avec  $\alpha = -1$ ) :**

$$\frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n}_{= \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1 - (-x)}} + \underbrace{o(x^n)}_{\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}} \qquad (10.48)$$

**Cas particulier ( $\alpha = p \in \mathbb{N}$ ) :**

On a :

$$(1+x)^p = \underbrace{1}_{C_0^p} + \underbrace{p}_{C_1^p} x + \underbrace{\frac{p(p-1)}{2!}}_{C_2^p} x^2 + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}}_{C_3^p} x^3 \dots + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-p+1)}{p!}}_{C_p^p} x^p \qquad (10.49)$$

(Les termes suivants sont nuls)

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1)}{2} x^2 + o(x^2) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n) \end{aligned} \qquad (10.50)$$

$$\text{Avec } a_n = \frac{1}{n!} \left( \prod_{k=0}^n \frac{1}{2} - k \right) \times \frac{2}{1-2n}$$