Chapitre 10 : Propriétés des fonctions dérivables

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Extremums de fonctions dérivables

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $a \in I$.

Si f présente un extremum local, et si f est dérivable en a et si $a \in \mathring{I}$, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration :

Supposons que f présente un maximum local en a.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[, f(x) \leqslant f(a)$.

Comme a est intérieur à I, on peut supposer ε assez petit pour que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$.

En effet : Il existe déjà β tel que $]a-\beta, a+\beta[\subset I$, et donc avec $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \beta)$, on aura $]a-\varepsilon', a+\varepsilon'[\subset I$ et $\forall x \in I \cap]a-\varepsilon', a+\varepsilon'[, f(x) \leqslant f(a)$. On notera ε pour ε' dans la suite.

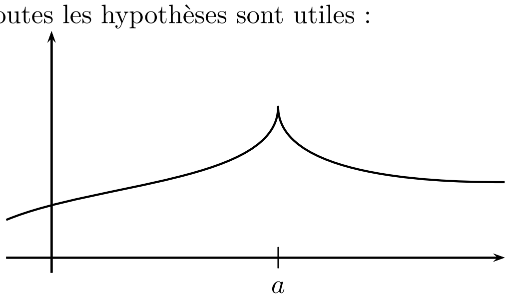
On a alors : $\forall x \in]a-\varepsilon, a[, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$.

Le passage à la limite quand $x \to a$ donne $f'(a) \geqslant 0$

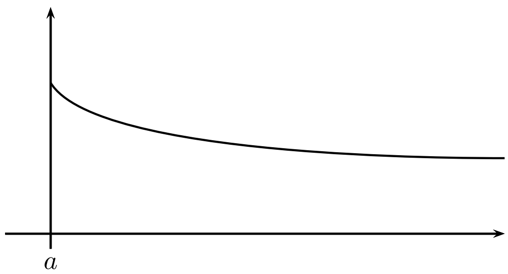
Mais on a aussi $\forall x \in]a, a+\varepsilon[, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. Donc $f'(a) \leqslant 0$

Donc $f'(a) = 0$.

Toutes les hypothèses sont utiles :



Maximum en a, mais f non dérivable en a



Maximum en a, f dérivable en a, mais $a \notin \mathring{I}$

La réciproque est fausse :

L'application $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'admet pas de maximum, même local, en 0.

II Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

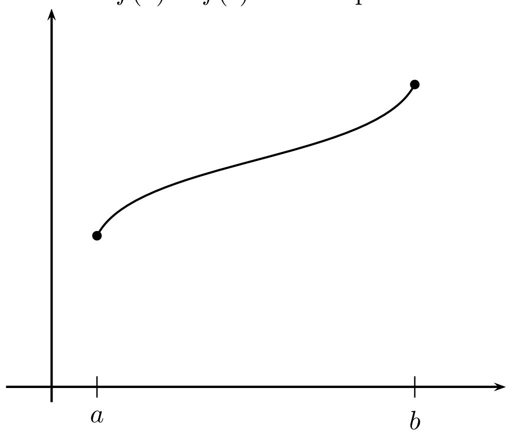
Théorème (Théorème de Rolle) :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ au moins, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :
Supposons f continue sur $[a, b]$. Alors l'image par f de ce segment est un segment, disons $[m, M]$ avec $m \leqslant M$

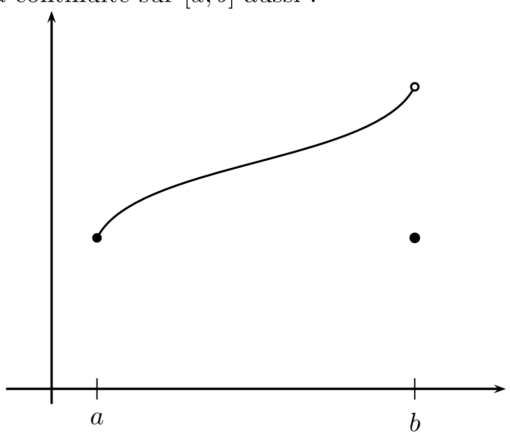
- Si $m = M$, c'est-à-dire si f est constante sur $[a, b]$, alors f' est nulle sur $]a, b[$ (on a le choix)
- Si $m < M$, l'un des deux est nécessairement différent de $f(a)$ (et donc aussi de $f(b)$), disons par exemple M (le raisonnement est le même pour m). De plus, celui-ci est le maximum de f sur $[a, b]$ (puisque f est continue sur le segment, donc atteint ses bornes). Il existe donc $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$. Alors déjà $c \neq a$ et $c \neq b$, car $M \neq f(a)$. Donc $c \in]a, b[$. Donc f est dérivable en c, et f atteint un maximum en c, donc $f'(c) = 0$.

Attention :

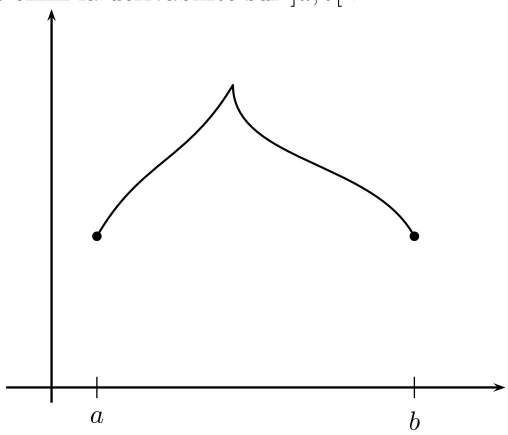
- $f(a) = f(b)$ est indispensable :



- La continuité sur $[a, b]$ aussi :



- Et enfin la dérivabilité sur $]a,b[$:

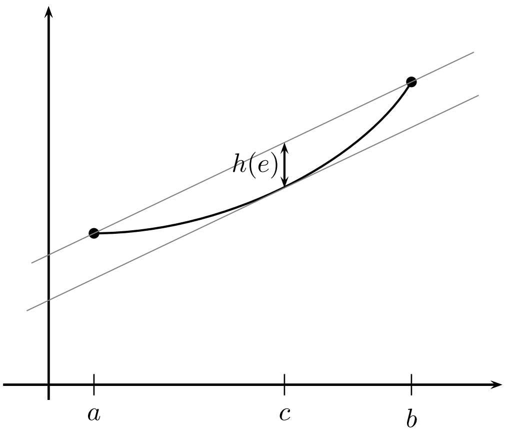


Théorème (des accroissements finis) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ au moins.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.



c est tel que la tangente en c de la courbe est parallèle à la corde AB.

Démonstration :

Soit φ la fonction affine coïncidant avec f en a et en b.

Soit h la fonction définie par : $h\colon \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \varphi(x) \end{array}$.

Alors h est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$ (au moins), car f et φ le sont (φ est même de classe $\mathcal{C}^\infty$)

On a : $h(a) = h(b)$ $(= 0)$

Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Or, $\forall x \in]a,b[, h'(x) = f'(x) - \varphi'(x)$,

et $\forall x \in [a,b], \varphi(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc $\forall x \in]a,b[, h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, soit $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Remarque :

Le théorème de Rolle devient maintenant une conséquence évidente du théorème des accroissements finis.

Autres versions :

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq b$.
  On note $\overleftrightarrow{[a,b]}$ pour $[\min(a,b), \max(a,b)]$, et autres avec les crochets ouverts...
  Soit $f\colon \underleftrightarrow{[a,b]} \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $\underleftrightarrow{[a,b]}$, et dérivable sur $\underleftrightarrow{]a,b[}$, alors il existe $c \in \underleftrightarrow{]a,b[}$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.
  (« Théorème des accroissements finis entre a et b »)

- Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors, pour tous $a, b \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(a + \theta(b-a))$.
  En effet :
  - ◇ Si $a = b$, on choisit $\theta \in]0,1[$ quelconque.
  - ◇ Si $a \neq b$, on peut appliquer la version précédente : f est continue sur $\underleftrightarrow{[a,b]}$, car $\underleftrightarrow{[a,b]} \subset I$, et dérivable sur $\underleftrightarrow{]a,b[}$ car $\underleftrightarrow{]a,b[} \subset \mathring{I}$. Il existe donc $c \in \underleftrightarrow{]a,b[}$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Donc, avec $\theta = \frac{c-a}{b-a} \in]0,1[$ (car $c - a < b - a$), on a bien le résultat voulu.

- Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, où I contient 0, continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors, pour tout $x \in \mathring{I}$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$.
  Démonstration :
  C'est la version précédente entre 0 et x.

Théorème (Inégalité des accroissements finis) :
Soit $f\colon \underleftrightarrow{[a,b]} \to \mathbb{R}$, continue sur $\underleftrightarrow{[a,b]}$, dérivable sur $\underleftrightarrow{]a,b[}$. Si il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \underleftrightarrow{]a,b[}, |f'(x)| \leqslant k$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$.

Démonstration :

On applique le théorème des accroissements finis entre a et b. Il existe donc $c \in \underleftrightarrow{]a,b[}$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Donc $|f(b) - f(a)| = |b-a| \times |f'(c)| \leqslant |b-a| \times k$.

On a aussi :

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, où $a < b$. Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si il existe m et M tels que $\forall x \in]a,b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

III Sens de variation des fonctions dérivables

Théorème :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$. On a les équivalences :

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geqslant 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in \mathring{I}, f'(x) \leqslant 0$
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0$

Démonstration :

Déjà, 2 c'est 1 appliqué à $-f$, et 3 est obtenu avec 1 et 2. Reste à montrer 1 :

Supposons f croissante sur I. Soit $a \in \mathring{I}$, montrons que $f'(a) \geqslant 0$. On a :

$$\forall x \in I \backslash \{a\}, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \tag{10.1}$$

(car f est croissante donc $f(x)-f(a)$ et $x-a$ sont de même signe)

Donc, par passage à la limite, $f'(a) \geqslant 0$.

Réciproquement, supposons que $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geqslant 0$

Soient $x_1, x_2 \in I$, avec $x_1 < x_2$.

Selon le théorème des accroissements finis appliqué à f entre x_1 et x_2 (on peut puisque f est continue sur $[x_1, x_2] \subset I$ et dérivable sur $]x_1, x_2[\subset \mathring{I}$), il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{(x_2-x_1)f'(c)}_{\geqslant 0 \text{ car } c \in \mathring{I} \text{ et } x_1 < x_2}$,

donc $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

Théorème :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$. On a alors l'équivalence :

$$f \text{ est strictement croissante sur } I \iff \begin{cases} \forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geqslant 0 \\ \text{l'ensemble } Z = \left\{x \in \mathring{I}, f'(x) = 0\right\} \text{ vérifie } \mathring{Z} = \varnothing \end{cases}$$

Pour Z, cela signifie que Z ne contient pas d'intervalle ouvert non vide, ou que f' n'est nulle qu'en des points isolés.

Démonstration :

$\Longrightarrow$: Déjà, si f est strictement croissante sur I, alors f est croissante sur I, donc $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geqslant 0$.

Supposons $\mathring{Z} \neq \varnothing$. Il existe donc un ouvert du type $]\alpha, \beta[\subset Z$ (où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Alors f' est nulle sur $]\alpha, \beta[$, donc f est constante sur $]\alpha, \beta[$, ce qui est impossible car f est strictement croissante. Donc $\mathring{Z} = \varnothing$.

$\Longleftarrow$: Supposons que $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geqslant 0$, et $\mathring{Z} = \varnothing$.

Déjà, f est croissante d'après la première condition. Elle l'est de plus strictement, car sinon il existerait $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

On aurait alors $\forall x \in]x_1, x_2[, f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, puisque f est croissante.

C'est-à-dire qu'on aurait $\forall x \in]x_1, x_2[, f(x) = \text{cte} = f(x_1)$, donc f' est nulle sur $]x_1, x_2[$, d'où $\mathring{Z} \neq \varnothing$ (puisqu'il contiendrait au moins $]x_1, x_2[$) ce qui est impossible.

Donc f est strictement croissante.

Le théorème est valable aussi si f est dérivable sur I, et on a alors l'équivalence :

$$f \text{ est croissante sur } I \iff f' \text{ est positive sur } I.$$

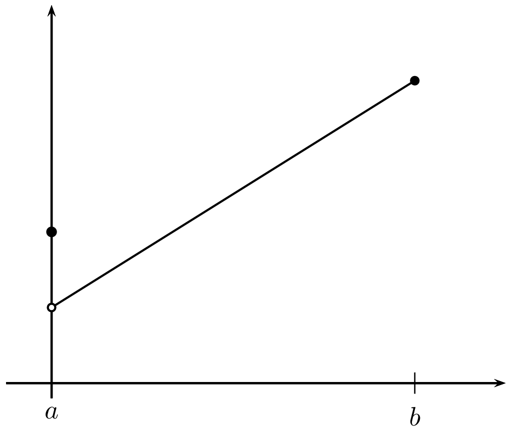
Attention : • Le fait que I soit un intervalle est indispensable. Par exemple :

$f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2} \leqslant 0$.

Mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

En revanche, elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

- Si f n'est dérivable que sur $\mathring{I}$, la continuité sur I est indispensable :



f' est positive sur $]a,b]$, donc f est croissante sur $]a,b]$, mais pas sur $[a,b]$.

Diverses idées fausses :

- Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et même de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f admet un minimum absolu (non local) en 0. On pourrait croire qu'il existe $\alpha > 0$ de façon qu'on ait le tableau de variations suivant :

x	$-\alpha$	0	α
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

C'est faux !! par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{10.2}$$

f est manifestement continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

f est dérivable en 0. En effet :

$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}})}_{\text{borné}}$, donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

On voit que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) > 0$, car $\forall x \in \mathbb{R}^*, 2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}} \in [1,3]$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}) \in [x^2, 3x^2]$, soit $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}) > 0$.

Donc f atteint un minimum absolu en 0.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = 2x(2+\sin\frac{1}{\sqrt{x}}) + x^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}(\underbrace{2\sqrt{x}(2+\sin\frac{1}{\sqrt{x}})}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}) \tag{10.3}$$

(f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque f' est continue même en 0)

Pour α assez petit, $2\sqrt{x}(2+\sin\frac{1}{\sqrt{x}})$ est compris entre 0 et $\frac{1}{4}$ pour $x \in]0,\alpha[$.

Mais $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ prend la valeur $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sur tout intervalle du type $]0,\alpha[$ où $\alpha > 0$.

Donc f' n'est pas de signe constant sur $]0,\alpha]$, et ce quel que soit $\alpha > 0$.

Donc f n'est pas croissante sur $]0,\alpha]$.

- On peut croire que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et si $f'(0) > 0$, alors f' est croissante au voisinage de 0. C'est vrai, mais pas si on suppose f seulement de classe $\mathcal{D}^1$ sur $\mathbb{R}$.

IV Le théorème « sans nom »

Théorème :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$, soit $l \in \bar{\mathbb{R}}$.
Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et si $f'(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} l$, alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} l \tag{10.4}$$

Par conséquent :

- Si $f'(x)$ a une limite finie l lorsque $x \to a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)$, donc en plus f' est continue en a.
- Si $f'(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a, mais la courbe de f présente une tangente verticale au point d'abscisse a.
- Si f' n'a pas de limite lorsque $x \to a$, le théorème de permet pas de conclure.

Démonstration :
Soit $x \in I \setminus \{a\}$.
Selon le théorème des accroissements finis appliqué à f entre a et x (ce qui est possible car f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[\subset I \setminus \{a\}$), il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = (x - a) f'(c_x)$.
Mais $c_x \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} a$ car $|c_x - a| \leqslant |x - a|$ puisque $c_x \in]a, x[$.
De plus, $f'(u) \xrightarrow[u \neq a]{u \to a} l$.
Donc, d'après le théorème de composition de limite, $f'(c_x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} l$
Or, $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} l$.

Exemple :
Prenons $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ (déjà vu), et est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0.
Cependant, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$
(c'est simplement le cas où f est de classe $\mathcal{D}^1$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$)