Chapitre 9 : Dérivation

Dans tout ce chapitre, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
I et J désignent des intervalles infinis de $\mathbb{R}$.

I Dérivabilité en un point

A) Définition

Définition :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $p_a\colon \begin{array}{rcl} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée la dérivée de f en a, notée $f'(a)$.

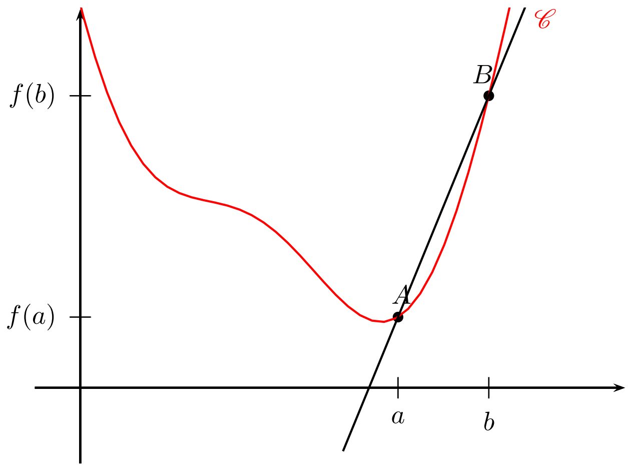
Interprétation :

Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Soient $a \in I, b \in I$ avec $a \neq b$.

Soient $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$ (points de $\mathcal{C}$ d'abscisses a et b respectivement).

Alors $p_a(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite (AB) ou encore le taux d'accroissement de f entre a et b :



Si cette pente admet une limite finie quand b tend vers a, on dit que f est dérivable en a, et cette limite est notée $f'(a)$.

La droite passant par A de pente $f'(a)$ est appelée la tangente à $\mathcal{C}$ en A / au point d'abscisse a.

Rappel :

Pour $A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $A_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, la pente de la droite (A_0A_1) est $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$.

Équation (dans $\mathbb{R}$) de la droite passant par A_0 de pente p : $y - y_0 = p \times (x - x_0)$.

Ainsi :

La droite (AB) a pour équation $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

La tangente à $\mathcal{C}$ en a a pour équation $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Définition :

(Si a n'est pas un maximum de I)

Si $\begin{array}{rccc} p_a\colon & I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ a une limite finie à droite en a, on dit que f est dérivable à droite en a et cette limite est notée $f'_d(a)$. La tangente à droite est alors la demi-droite d'équation

$$\begin{cases} y - f(a) = f'(a)(x-a) \\ x \geqslant a \end{cases}$$

On a la même définition à gauche lorsque a n'est pas un minimum de I.

Proposition :

Si $a \in \mathring{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Et si f est dérivable en a, $f'(a)$ est la valeur commune de $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.

Démonstration :

On sait que :

$$p_a \text{ a une limite en } a \iff p_a \text{ a une limite à droite et à gauche en } a \text{ et qui sont égales}$$

Enfin, si $a = \max(I)$, la notion de dérivabilité coïncide avec la notion de dérivée à gauche. De même si $a = \min(I)$.

Extension :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$.

Si p_a admet une limite infinie en a, f n'est pas dérivable en a, cependant on dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale en $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$.

B) Propriétés

Théorème :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ (autrement dit ε est nulle et continue en a)
2. $\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$

Démonstration :

Soit $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \tag{9.1}$$

Alors 2 est vraie (...)

Et on a bien $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, car $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$.

Vocabulaire :

Écrire 2, et le fait que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, c'est écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en a.

Énoncé équivalent (retour à 0) :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

Si f est dérivable, alors :

Il existe une fonction η, définie sur $V = \{h \in \mathbb{R}, a + h \in I\}$ telle que :

- $\eta(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $\forall h \in V, f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\eta(h)$

Théorème (Réciproque) :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

S'il existe un réel λ et une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\lambda + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{et } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0, \tag{9.2}$$

alors f est dérivable en a et $\lambda = f'(a)$.

Démonstration :

Pour $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda + \varepsilon(x)$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \lambda$

(L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en a est équivalente à la dérivabilité en a)

Théorème :

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration :

Si f est dérivable en a, il existe une fonction ε tel que $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$ et $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \underbrace{(x-a)f'(a)}_{\to 0} + \underbrace{(x-a)\varepsilon(x)}_{\to 0}$

Donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} a$

Remarque :

Les propriétés s'adaptent facilement pour $f_{|I\cap[a,+\infty[}$, d'où les résultats :

- si f est dérivable à droite en a, il existe un développement limité d'ordre 1 à droite en a.
- Si f est dérivable à droite en a, alors f est continue à droite en a.

De même à gauche pour $f_{|I\cap]-\infty,a]}$

C) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

Théorème :

Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $a \in I$, on suppose que f et g sont dérivables en a. Alors :

1. λf est dérivable en a, et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
2. $f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. Si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a, et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$
5. Si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a, et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

Démonstration (des points 3 et 4 seulement, les autres en découlant ou étant montrés selon le même pri

- 3 : pour tout $x \in I\setminus\{a\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \frac{g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\ &= \underbrace{g(x)}_{\to g(a)}\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)}+f(a)\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)}\end{aligned} \tag{9.3}$$

- 4 : Déjà, g est continue en a et $g(a) \neq 0$, donc g ne s'annule pas au voisinage de a, donc déjà $\frac{1}{g}$ est bien définie au voisinage de a, disons sur V.

  Alors, pour $x \in V\setminus\{a\}$:

$$\frac{(\frac{1}{g})(x)-(\frac{1}{g})(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \underbrace{\frac{1}{g(a)g(x)}}_{\to\frac{1}{(g(a))^2}}\underbrace{\frac{g(a)-g(x)}{x-a}}_{\to -g'(a)} \tag{9.4}$$

Conséquence :

- Si $f_1, f_2, \dots f_n$ sont n fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en a, alors $f_1f_2\dots f_n$ est dérivable en a et :

$$\begin{aligned}(f_1f_2\dots f_n)'(a) &= f_1'(a)f_2(a)\dots f_n(a)+f_1(a)f_2'(a)\dots f_n(a)+\dots+f_1(a)f_2(a)\dots f_n'(a)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f_1(a)f_2(a)\dots f_i'(a)\dots f_n(a)\end{aligned} \tag{9.5}$$

  (Démonstration par récurrence, en utilisant le théorème précédent)

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si f est dérivable en a, alors f^n est aussi dérivable en a et $(f^n)'(a) = nf'(a)(f(a))^{n-1}$. (Cas particulier du précédent, ou autre démonstration par récurrence)

Théorème :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, et soit $g\colon J \to \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$.

Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a, et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a, et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Démonstration :

Comme g est dérivable en $f(a)$, il existe $\varepsilon\colon J \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $f(a)$ telle que $\forall x \in I\setminus\{a\}, g(f(x)) - g(f(a)) = (f(x)-f(a))g'(f(a)) + (f(x)-f(a))\varepsilon(f(x))$.

Donc $\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} g'(f(a)) + \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)\in\mathbb{R}} \underbrace{\varepsilon(f(x))}_{\substack{\to 0 \text{ car } f(x)\xrightarrow[x\to a]{} f(a)\\ \text{et } \varepsilon(u)\xrightarrow[u\to f(a)]{} 0}}$

Donc $\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)g'(f(a))$, d'où la dérivabilité de $g \circ f$ en a et sa valeur.

Théorème :

Soit f continue et strictement monotone sur I.

(Ainsi, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et $f^{-1}\colon J \to I$ est continue sur J)

Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a, et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$, et on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \tag{9.6}$$

(Si f est dérivable en a et que $f'(a) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$, mais la courbe de f^{-1} présente au point d'abscisse $f(a)$ une tangente verticale).

Autre énoncé du théorème (avec les mêmes hypothèses) :

Soit $b \in J$. Si f est dérivable en $f^{-1}(b)$, et si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et on a : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Démonstration :

Soit $a \in I$, posons $b = f(a)$.

Supposons f strictement monotone sur I, f dérivable en a, et que $f'(a) \neq 0$.

Soit $x \in J \subset \{b\}$. Alors :

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} = \frac{f^{-1}(x) - a}{f(f^{-1}(x)) - f(a)} \tag{9.7}$$

Or, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to b]{} a$, puisque f^{-1} est continue en b.

Donc par composition, $\frac{f(f^{-1}(x)) - f(a)}{f^{-1}(x) - a} \xrightarrow[x \to b]{} f'(a)$.

Donc $\frac{f^{-1}(x) - a}{f(f^{-1}(x)) - f(a)} \xrightarrow[x \to b]{} \frac{1}{f'(a)}$ (on a supposé $f'(a) \neq 0$)

C'est-à-dire $\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} \xrightarrow[x \to b]{} \frac{1}{f'(a)}$.

Donc $(f^{-1})'(b)$ existe et vaut $\frac{1}{f'(a)}$

II Fonctions dérivées

Définition :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable (sur I) lorsque f est dérivable en tout point de I. On note alors f' la fonction : $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$. f' est appelée la fonction dérivée de f.

On trouve aussi d'autres notations pour f' :

$$f^{(1)}, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \qquad D(f) \tag{9.8}$$

Il résulte de la section précédente les théorèmes suivants :

Théorème :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Théorème :
Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables, alors :

- λf est dérivable, et $(\lambda f)' = \lambda f'$
- $f+g$ est dérivable, et $(f+g)' = f' + g'$
- fg est dérivable, et $(fg)' = f'g + fg'$
- Si g ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est dérivable, et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
- Et, toujours si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable, et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Théorème :
Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$. Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(f \circ g)' = f' \times (g' \circ f)$

Théorème :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et strictement monotone sur I, et si f' ne s'annule pas sur I, alors la réciproque f^{-1} de f, définie sur $J = f(I)$, est dérivable sur J et $\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, autrement dit $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

III Dérivées successives

A) Définition

Définition :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$.
Si f est dérivable au voisinage de a (c'est-à-dire sur $]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$ où $\alpha > 0$), et si f' est dérivable en a, on dit que f est deux fois dérivable en a et on note $f''(a)$ la valeur de $(f')'(a)$.
Si f est deux fois dérivable en tout point de I, on dit que f est deux fois dérivable (sur I), et on note f'' ou $f^{(2)}$ l'application : $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f''(x) \end{array}$.
Plus généralement, on a la définition récurrente suivante :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

1. On note $f^{(0)} = f$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f^{(n)}$ est définie au voisinage de a, et si $f^{(n)}$ est dérivable en a, on dit que f est $n+1$ fois dérivable en a et on note $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$; si f est $n+1$ dérivable en tout point de I, on dit que f est $n+1$ dérivable sur I, et on note $f^{(n+1)}\colon \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f^{(n+1)}(x) \end{array}$

Autres notations pour $f^{(n)}$: $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ ou $D^n(f)$ (pour $n \geqslant 1$)

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée n-ième est continue (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ qui sont continues).

Une fonction appartenant à $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Ainsi, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur I, et $\mathcal{D}^0(I, \mathbb{R}) = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

Proposition :

Soient $f: I \to \mathbb{R}$, et $n \geqslant 1$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) &\iff f \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{R}) \text{ et } f^{(n-1)} \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \\ &\iff f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \text{ et } f' \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{9.9}$$

Et lorsque $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, on a $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = (f')^{(n-1)}$

Démonstration :

La première équivalence et la première égalité résultent de la définition.

La deuxième équivalence et la deuxième égalité se montrent par récurrence à partir de la première.

Proposition :

Soit $n \geqslant 1$. On a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(I, \mathbb{R}) \tag{9.10}$$

En effet : la première inclusion résulte de la définition de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$. Pour la deuxième inclusion : si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, alors $f^{(n-1)}$ est définie et dérivable (sur I), donc $f^{(n-1)}$ est définie et continue sur I, donc $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$.

Pour les autres inclusions, reprendre l'argument pour continuer…

Remarque :

Les inclusions sont même strictes, par exemple :

La fonction $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dans $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet : La continuité et la dérivabilité pour $x \neq 0$ ne pose pas de problème. En 0 :

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin \frac{1}{x}$. Or, $x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. (donc f est aussi continue en 0)

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrons maintenant que f' n'est pas continue en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{9.11}$$

C'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Or, $x \mapsto \cos\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, donc f' non plus. En effet, supposons que f' a une limite l en 0. Or, $2x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc $\cos\frac{1}{x} = f'(x) - 2x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} l$ ce qui est impossible. Donc f' n'a pas de limite en 0, donc f n'est pas continue en 0.

B) Propriétés

Théorème :

Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a \in I$. On suppose que f et g sont n fois dérivables en a. Alors :

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est n fois dérivable en a, et $(\lambda f)^{(n)}(a) = \lambda f^{(n)}(a)$
- $f+g$ est n fois dérivable en a, et $(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$
- fg est n fois dérivable en a, et $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$ (Formule de Leibniz).

Démonstration :

Les deux premiers points sont immédiats par récurrence. Pour le troisième :

Soit I un intervalle.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$, où $P(n)$ signifie :

> « pour toutes fonctions f, g définies sur I, pour tout $a \in I$, si f et g sont n fois dérivables en a, alors fg est aussi n fois dérivable en a et on a $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$ »

Pour $n = 0, n = 1$ on a déjà vu le résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.

Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. On suppose f et g $n+1$ fois dérivables en a. Déjà, f et g sont n fois dérivables au voisinage de a, disons sur V.

En appliquant $P(n)$, on obtient :

$$\forall x \in V, (fg)^{(n)}(x) \text{ existe, et } (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \tag{9.12}$$

Mais les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ ($k \in [\![0, n]\!]$) sont toutes définies sur V et dérivables au moins une fois en a.

Donc, selon les théorèmes de dérivabilité en un point et d'opérations sur les fonctions, $(fg)^{(n)}$, définie sur V, est dérivable en a, et la dérivée en a vaut :

$$\begin{aligned}
\left((fg)^{(n)}\right)'(a) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(a)g^{((n+1)-(k+1))}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}(a)g^{((n+1)-k)}(a) \\
&= \underbrace{C_n^0}_{=C_{n+1}^0} f^{(0)}(a)g^{(n+1)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)}_{=C_{n+1}^k} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) \\
&\quad + \underbrace{C_n^n}_{=C_{n+1}^{n+1}} f^{(n+1)}(a)g^{(0)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Comme c'est valable pour tout f, g $n+1$ fois dérivables en a, on a bien $P(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

C) Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème (1) :
Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors :

1. λf et $f+g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$
2. fg est de classe C^n
3. Si f ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

Théorème (2) :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, et g est de classe $\mathcal{C}^n$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Théorème (3) :
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et strictement monotone sur I. Elle réalise donc une bijection de I dans $J = f(I)$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \geqslant 1$, et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Démonstration :

- Théorème 1 :
  1. Par récurrence :

     Pour $n = 0$, ok (la somme de deux fonction continues est continue, idem pour le produit par un scalaire)

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour toutes fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et tout réel λ, $f+g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\lambda f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

Soient alors f, g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $f+g$ est dérivable (car f et g le sont au moins une fois), et $(f+g)' = f'+g'$.

Or, f' et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$, donc $f'+g'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (hypothèse de récurrence), soit $(f+g)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Donc $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

D'autre part, λf est dérivable (même raison), et $(\lambda f)' = \lambda f'$

Or, f' est toujours de classe $\mathcal{C}^n$, donc $\lambda f'$ est de classe $\mathcal{C}^n$, soit $(\lambda f)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$, donc λf est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

Ce qui achève la récurrence.

2. Par récurrence : Pour $n=0$, ok (le produit de deux fonctions continues est continu).

   Pour $n=1$: soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

   On sait déjà que $fg \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$, et que $(fg)' = f'g+fg'$.

   Or, $f'g+fg'$ est continue car f, g, f', g' le sont. Donc $(fg)'$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I, donc $fg \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\forall f, g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}), fg \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

   Soient $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$.

   Alors $fg \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ (car f et g sont dérivables), et $(fg)' = f'g+fg'$.

   Or, $f, g, f', g' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$. Donc, par hypothèse de récurrence, $f'g, fg' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

   Donc $f'g+fg' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$. Donc $(fg)' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, soit $fg \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$.

   Ce qui achève la récurrence.

3. Encore par récurrence :

   Pour $n=0$, ok puisque f ne s'annule pas sur I.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ ne s'annulant par sur I, $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

   Soit alors f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, ne s'annulant pas sur I.

   Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable (car f l'est et ne s'annule pas sur I), et $(\frac{1}{f})' = \frac{-f'}{f^2}$

   Or, f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. De plus, f^2 est aussi de classe $\mathcal{C}^n$, d'après le point précédent, et donc $\frac{1}{f^2}$ aussi par hypothèse de récurrence puisque f^2 ne s'annule pas sur I. Donc, encore d'après les points précédents, $-f' \times \frac{1}{f^2}$, soit $(\frac{1}{f})'$, est de classe $\mathcal{C}^n$. Donc $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   Ce qui achève la récurrence.

- Théorème 2 : par récurrence.

  Pour $n=0$, ok (la composée de deux fonctions continues, quand elle est définie, est continue)

  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, pour tout g de classe $\mathcal{C}^n$ sur J tel que $f(I) \subset J$, $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

  Soient alors $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, où J est tel que $f(I) \subset J$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

  Alors, comme f et g sont dérivables, $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

  Or, f et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$ (au moins), donc par hypothèse de récurrence $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

  De plus, f' est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.

  Donc $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ d'après le point précédent.

  Donc $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Ce qui achève la récurrence.

- Théorème 3 : par récurrence.

  Pour $n = 1$:

  Pour $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ de dérivée ne s'annulant pas (donc strictement monotone puisque cette dérivée est continue), on a vu que f^{-1} est dérivable et que $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, qui est continue car f^{-1} est continue et f' aussi.

  Soit $n \geqslant 1$, supposons que pour toute fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ de dérivée ne s'annulant pas, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J (où $J = f(I)$).

  Soit alors $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, de dérivée ne s'annulant pas.

  Alors f^{-1} est dérivable, et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

  Or, $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ par hypothèse de récurrence, et $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Donc d'après le théorème précédent, $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur J.

D) Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Définition :

Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsque f admet sur I des dérivées de tout ordre.

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Ainsi, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Justification de la deuxième égalité :

Une première inclusion vient du fait que si $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}))$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ existe, et est continue puisque $f^{(n+1)}$ existe, donc $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

L'autre inclusion est immédiate, puisque une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{D}^n$ pour tout n.

E) Les fonctions usuelles

- Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.
- Les fonctions $\sin, \tan, \cos, \text{cotan}, \exp, \ln, x \mapsto a^x$ $(a > 0), x \mapsto \log_a(x)$ $(a > 0)$ sont aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine.
- Les fonctions $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Et en plus :

  Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, elles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

  Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, elles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

  Enfin, pour $\alpha \in \mathbb{Q}_+$, elles sont prolongeables en 0, mais non dérivables en 0 en général.

Démonstration :

Par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ (dans la récurrence : supposer la fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, sa dérivée est alors de classe $\mathcal{C}^n$, et reconnaître la même fonction ou une autre fonction qu'on sait de classe $\mathcal{C}^{n+1}$...)