Chapitre 5 : Définitions relatives aux fonctions à valeurs réelles

I Fonctions à valeurs réelles

Soit A un ensemble non vide. $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}$.

A) Somme, produit, produit par un réel

Définition :

Pour $f,g\in\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit :

$$f+g\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad , \quad fg\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \quad , \quad \lambda f\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \tag{5.1}$$

Si de plus g ne s'annule pas sur A, on pourra naturellement définir $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$.

II Autres définitions

Définition :

Pour $f,g\in\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$, on définit :

$$\sup(f,g)\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup(f(x),g(x)) \end{array} \quad , \quad \inf(f,g)\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf(f(x),g(x)) \end{array} \tag{5.2}$$

Remarque :

ces fonctions peuvent aussi bien être notées $\max(f,g)$ ou $\min(f,g)$.

Définition :

Pour $f\in\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$, on définit aussi :

$$f^+\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup(f(x),0) \end{array} \quad , \quad f^-\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup(-f(x),0) \end{array} \quad , \quad |f|\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array} \tag{5.3}$$

Proposition :

$$|f| = f^+ + f^- \quad \text{et } f = f^+ - f^- \tag{5.4}$$

Démonstration :

Soit $x\in A$.

Si $f(x) \geqslant 0$, alors $f^+(x) = \sup(f(x), 0) = f(x)$ et $f^-(x) = \sup(-f(x), 0) = 0$.
Donc $(f^+ - f^-)(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$
Et $(f^+ + f^-)(x) = f^+(x) + f^-(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)| = |f|(x)$.

Si $f(x) \leqslant 0$, alors $f^+(x) = \sup(f(x), 0) = 0$ et $f^-(x) = \sup(-f(x), 0) = -f(x)$.
Donc $(f^+ - f^-)(x) = f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$
Et $(f^+ + f^-)(x) = f^+(x) + f^-(x) = 0 - f(x) = -f(x) = |f(x)| = |f|(x)$.

Donc $\forall x \in A$, $|f|(x) = (f^+ + f^-)(x)$ et $f(x) = (f^+ - f^-)(x)$.
Soit $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

A) Inégalités sur les fonctions

Définition :

Pour $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, on pose :

$$f \leqslant g \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in A, (f(x) \leqslant g(x)) \tag{5.5}$$

La relation $\leqslant$ définie ainsi sur $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ est une relation d'ordre partiel.

La notation $f < g$ signifie : $\forall x \in A, (f(x) < g(x))$.

Attention, si $f \leqslant g$ et $f \neq g$, on a pas nécessairement pour autant $f < g$.

B) Fonctions majorées, minorées

Définition :

Soit $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$. On rappelle que $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \operatorname{Im} f$.

On a les équivalences :

- $$\begin{aligned} f \text{ est majorée } &\underset{\text{déf}}{\iff} f(A) \text{ est majoré} \\ &\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leqslant M \end{aligned} \tag{5.6}$$

- $$\begin{aligned} f \text{ est minorée } &\underset{\text{déf}}{\iff} f(A) \text{ est minoré} \\ &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leqslant f(x) \end{aligned} \tag{5.7}$$

- $$\begin{aligned} f \text{ est bornée } &\underset{\text{déf}}{\iff} f(A) \text{ est borné} \\ &\iff f \text{ est majorée et minorée} \\ &\iff |f| \text{ est bornée} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Si f est majorée, on peut introduire le réel $\sup f$, qu'on définit comme étant $\sup(f(A))$ (l'ensemble $f(A)$ admet bien une borne supérieure puisque c'est un ensemble de réels non vide et majoré).

Si l'ensemble $f(A)$ est non seulement majoré, mais admet un maximum, on l'appellera le maximum de f et on le notera $\max f$. On aura alors bien sûr $\max f = \sup f$, et on dira alors que la borne supérieure de f est atteinte (puisqu'il existe alors $a \in A$ tel que $f(a) = \max f = \sup f$).

De même, lorsque f est minorée, on peut introduire $\inf f$, qu'on note $\min f$ lorsque la borne inférieure est atteinte.

Enfin, lorsque f est bornée, on s'intéresse à $\sup |f|$

Notation :

Sous réserve d'existence, $\sup f$ est aussi noté $\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf f$ noté $\inf_{x \in A} f(x)$ ...

III Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Il s'agit maintenant des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies sur une partie non vide de $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

A) Fonctions monotones

Définition :

Soit $f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$.

$$f \text{ est croissante} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')). \tag{5.9}$$

$$f \text{ est strictement croissante} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x < x' \implies f(x) < f(x')). \tag{5.10}$$

$$f \text{ est décroissante} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x \leqslant x' \implies f(x') \leqslant f(x)). \tag{5.11}$$

$$f \text{ est strictement décroissante} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x < x' \implies f(x') < f(x)). \tag{5.12}$$

$$f \text{ est monotone} \underset{\text{déf}}{\iff} f \text{ est croissante ou } f \text{ est décroissante.} \tag{5.13}$$

$$f \text{ est strictement monotone} \underset{\text{déf}}{\iff} f \text{ est strictement croissante/décroissante.} \tag{5.14}$$

Remarque :

Dans le cas où $D = \mathbb{N}$, on retrouve les définitions données dans le cadre des suites réelles.

Proposition :

Toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.

Démonstration :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone.

Soient $x, x' \in D$, supposons que $f(x) = f(x')$.

Alors $x = x'$, car sinon :

- Soit $x < x'$, et alors $f(x) < (x')$ ou $f(x') < (x)$ car f est strictement monotone, ce qui est impossible (car $f(x) = f(x')$).
- Soit $x' < x$, et alors $f(x') < (x)$ ou $f(x) < (x')$ car f est strictement monotone, ce qui est aussi impossible (car $f(x) = f(x')$).

Donc $x = x'$.

Donc f est injective.

Proposition :

Soient $f, g \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$. Alors :

Si f et g sont monotones de même sens, alors $f + g$ l'est aussi, et de même sens.

Si f est monotone, alors $-f$ est monotone de sens contraire. Si f et g sont positives et monotones de même sens, alors fg aussi.

Si f est strictement positive et monotone, alors $\frac{1}{f}$ est monotone de sens contraire.

Démonstration :

- Supposons f et g monotones de même sens. Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons que $x \leqslant x'$. On a alors :
  - ◇ Soit $f(x) \leqslant f(x')$ et $g(x) \leqslant g(x')$ si f et g sont croissantes,

  - ◇ Soit $f(x') \leqslant f(x)$ et $g(x') \leqslant g(x)$ si f et g sont décroissantes.

  Donc soit $f(x)+g(x) \leqslant f(x')+g(x')$, c'est-à-dire $(f+g)(x) \leqslant (f+g)(x')$, soit $f(x')+g(x') \leqslant f(x)+g(x)$, c'est-à-dire $(f+g)(x') \leqslant (f+g)(x)$. Donc $f+g$ est aussi monotone, et de même sens que f et g.

- Supposons f monotone.
  Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons que $x \leqslant x'$. On a alors : $f(x) \leqslant f(x')$ si f est croissante, $f(x') \leqslant f(x)$ si f est décroissante.
  Donc $(-f)(x') \leqslant (-f)(x)$ ou $(-f)(x) \leqslant (-f)(x')$.
  Donc $-f$ est monotone, de sens contraire à f dans les deux cas.

- Supposons f et g positives et monotones de même sens.
  Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons que $x \leqslant x'$. On a alors :
  $0 \leqslant f(x) \leqslant f(x')$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant g(x')$ si f et g sont croissantes,
  ou $0 \leqslant f(x') \leqslant f(x)$ et $0 \leqslant g(x') \leqslant g(x)$ si f et g sont décroissantes.
  D'où on tire que $0 \leqslant (fg)(x) \leqslant (fg)(x')$ si f et g sont croissantes, ou $0 \leqslant (fg)(x') \leqslant (fg)(x)$ si f et g sont décroissantes.
  Ainsi, fg est monotone et de même sens que f et g.

- Supposons f strictement positive et monotone.
  Soient $x \in D, x' \in D$, supposons que $x \leqslant x'$. Alors :
  $0 < f(x) \leqslant f(x')$ si f est croissante, ou $0 < f(x') \leqslant f(x)$ si f est décroissante.
  Donc $\frac{1}{f(x')} \leqslant \frac{1}{f(x)}$ si f est croissante, $\frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{f(x')}$ si f est décroissante.
  Donc $\frac{1}{f}$ est monotone, et de sens contraire à f.

Proposition :
Soient $f \in \mathscr{F}(D,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(D',\mathbb{R})$, où D' est une partie de $\mathbb{R}$ contenant $f(D)$ (donc non vide), de sorte qu'on puisse parler de $g \circ f$.
Si f et g sont monotones de même sens, alors $g \circ f$ est croissante. Si f et g sont monotones de sens contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration :

- Supposons f et g monotones de même sens.
  - ◇ Si f, g sont croissantes :
    Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leqslant x'$. Alors :
    Comme f est croissante, $f(x) \leqslant f(x')$.
    $f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x) \leqslant f(x')$. Donc, comme g est croissante :
    $g(f(x)) \leqslant g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \leqslant (g \circ f)(x')$.
    Donc $g \circ f$ est croissante.
  - ◇ Si f, g sont décroissantes :
    Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leqslant x'$. Alors :
    Comme f est décroissante, $f(x') \leqslant f(x)$. $f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x') \leqslant f(x)$. Donc, comme g est croissante :
    $g(f(x)) \leqslant g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \leqslant (g \circ f)(x')$.
    Donc $g \circ f$ est croissante.

- Supposons f et g monotones de sens contraires.

  ◇ Si f est croissante et g décroissante :
  Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leqslant x'$. Alors :
  Comme f est croissante, $f(x) \leqslant f(x')$.
  $f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x) \leqslant f(x')$. Donc, comme g est décroissante :
  $g(f(x')) \leqslant g(f(x))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x') \leqslant (g \circ f)(x)$.
  Donc $g \circ f$ est décroissante.

  ◇ Si f est décroissante et g croissante :
  Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leqslant x'$. Alors :
  Comme f est décroissante, $f(x') \leqslant f(x)$.
  $f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x') \leqslant f(x)$. Donc, comme g est croissante :
  $g(f(x')) \leqslant g(f(x))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x') \leqslant (g \circ f)(x)$.
  Donc $g \circ f$ est décroissante.

B) Fonctions paires, impaires

Définition :
Soit $f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$.

$$f \text{ est paire} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in D, (-x \in D \text{ et } f(-x) = f(x)). \tag{5.15}$$

$$f \text{ est impaire} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in D, (-x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x)). \tag{5.16}$$

On vérifie immédiatement les propriétés sur les fonctions paires et impaires suivantes :

Propriétés :
Soient $f, g \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$.

- Si f et g sont toutes les deux (im)paires, alors $f + g$ a la même parité que f et g.
- Si f et g ont la même parité, alors fg est paire.
- Si f et g sont de parités contraires, alors fg est impaire.
- Si f est (im)paire, alors $-f$ l'est aussi.
- Soient $f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(D', \mathbb{R})$, où D' est une partie de R contenant $f(D)$.

  ◇ Si f est paire, et g est (im)paire, alors $f \circ g$ est paire.

  ◇ Si f est impaire, et si g est impaire, alors $f \circ g$ est paire.

  ◇ Si g est paire, alors $f \circ g$ est paire.

C) Fonctions périodiques

Définition :

Soit $f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$.

Soit $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est T-périodique lorsque :

$$\forall x \in D, (x + T \in D \text{ et } x - T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x)) \tag{5.17}$$

On dit que f est périodique lorsqu'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que f est T-périodique.

Proposition :

La somme ou le produit de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.

De plus, si $\frac{T}{T'} \in \mathbb{Q}$, alors la somme ou le produit d'une fonction T-périodique et d'une fonction T'-périodique est périodique.

Démonstration :

- Soient $f, g \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$, T-périodiques.
  Soit $x \in D$. Alors $x + T \in D$ et $x - T \in D$. De plus, on a :

$$(f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \tag{5.18}$$

  et

$$(fg)(x+T) = f(x+T) \times g(x+T) = f(x) \times g(x) = (fg)(x) \tag{5.19}$$

  Ainsi, $f + g$ et fg sont bien T-périodiques.

- Déjà, pour $f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$, si f est T-périodique, alors f est $-T$-périodique, et une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT-périodique ; ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, f est nT-périodique :
  On a, pour tout $x \in D$:

$$x + (-T) \in D \text{ et } x - (-T) \in D \text{ et } f(x + (-T)) = f((x + (-T)) + T) = f(x) \tag{5.20}$$

  Et, si f est nT-périodique ($n \in \mathbb{N}^*$), alors pour tout $x \in D$:
  $x + nT \in D, x - nT \in D$, donc, comme f est T-périodique (hypothèse de départ) :

$$x + nT + T \in D, \quad (x + nT - T \in D), \quad x - nT - T \in D, \quad (x - nT + T \in D) \tag{5.21}$$

  et

$$f(x + (n+1)T) = f(x + nT + T) = f(x + nT) = f(x) \tag{5.22}$$

  Donc f est $(n+1)T$-périodique.
  Soient maintenant $f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$, T-périodique, et $g \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$, T'-périodique,
  où $\frac{T}{T'} \in \mathbb{Q}$. Soit $(n, p) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{T}{T'} = \frac{n}{p}$.
  Comme g est nT'-périodique et f est pT-périodique – soit aussi nT'-périodique – $f + g$ et fg sont nT'-périodiques (ou pT-périodiques), donc périodiques.

Contre-exemple (dans le cas où $\frac{T}{T'} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) :

On note $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.23}$$

(on l'appelle la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$)

Alors $\chi_{\mathbb{Q}}$ est 1-périodique.

Mais la fonction $f : x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x) + \sin(x)$ n'est pas périodique :

Supposons qu'elle le soit ; soit alors $T \in \mathbb{R}^*$ tel que f soit T-périodique. Alors :

- Supposons que $T \in \mathbb{Q}^*$. Alors $f(T) = f(0)$ soit $\chi_{\mathbb{Q}}(T) + \sin(T) = \chi_{\mathbb{Q}}(0) + \sin(0) = 1$.
  Donc $\sin(T) = 1 - \chi_{\mathbb{Q}}(T) = 0$ car $\chi_{\mathbb{Q}}(T) = 1$. Donc $T \in \pi\mathbb{Z}$, soit $T \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, puisque $T \neq 0$, ce qui est contradictoire puisqu'on avait supposé que $T \in \mathbb{Q}^*$, donc $T \notin \mathbb{Q}^*$
- Donc $T \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
  Donc $\chi_{\mathbb{Q}}(T) + \sin(T) = \chi_{\mathbb{Q}}(0) + \sin(0) = 1$, soit $\sin(T) = 1 - \chi_{\mathbb{Q}}(T) = 1$.
  Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $T = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
  Mais on a aussi $\chi_{\mathbb{Q}}(2T) + \sin(2T) = \chi_{\mathbb{Q}}(0) + \sin(0) = 1$, soit $\sin(2T) = 1$.
  Il existe donc $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $2T = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi$.
  Mais alors $\frac{\pi}{4} + k'\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $\frac{1}{4} + k' = \frac{1}{2} + 2k$ donc $2k - k' = -\frac{1}{4}$, ce qui est contradictoire puisque $2k - k' \in \mathbb{Z}$. Donc $T \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, donc f n'est pas périodique.

D) Fonctions lipschitziennes

Définition :

Soit $f \in \mathscr{F}(D, \mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est k-lipschtzienne (ou lipschitzienne de rapport k) lorsque :

$$\forall x \in D, \forall x' \in D, |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'| \tag{5.24}$$

On dit que f est lipschitzienne lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f est k-lipschitzienne.

Interprétation :

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère plan. Dire que f est lipschitzienne revient à dire que l'ensemble des pentes des cordes tracées entre deux points de $\mathscr{C}$ est borné.

Exemple :

La fonction $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur $[0, 1]$, alors que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne l'est pas.

- En effet, pour tout $x, x' \in [0; 1]$, on a :

  $$|x^2 - x'^2| = |(x + x')(x - x')| = |x + x'||x - x'| \leqslant 2|x - x'| \tag{5.25}$$

  Donc $x \mapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0, 1]$.
- Supposons qu'elle le soit. Soit alors $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \mapsto \sqrt{x}$ soit k-lipschitzienne. On a alors, pour tout $x \in [0; 1]$:

  $$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leqslant k|x - 0| \leqslant (k + 1)|x - 0| \tag{5.26}$$

Donc $\forall x \in [0;1]\,, \sqrt{x} \leqslant (k+1)x$.

Or, pour $x = \frac{1}{2(k+1)^2} \in [0,1]$, on a $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2}(k+1)}$ et $(k+1)x = \frac{k+1}{2(k+1)^2} = \frac{1}{2(k+1)}$, mais $\frac{1}{\sqrt{2}(k+1)} > \frac{1}{2(k+1)}$, on a donc trouvé $x \in [0;1]$ tel que non$(\sqrt{x} \leqslant (k+1)x)$. Donc l'hypothèse de départ est fausse, donc $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

E) Extremum local, global

Définition :

Soit $f \in \mathscr{F}(D,\mathbb{R})$, et soit $a \in D$.

On dit que f présente un maximum (global) en a lorsque $\forall x \in D, f(x) \leqslant f(a)$.

Cela revient à dire que f admet un maximum, et que $\max f = f(a)$.

On dit que f présente un maximum local en a s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in D \cap V, f(x) \leqslant f(a)$.

Cela revient à dire que $f_{|D\cap V}$ présente un maximum (global) en a.

La définition est analogue pour un minimum global ou local en a.

On rappelle que « extremum » signifie : maximum ou minimum.

F) Propriété vraie sur une partie du domaine de définition

Soit P une propriété quelconque qu'une fonction réelle d'une variable réelle est susceptible d'avoir (par exemple « être positive », « être croissante » ...)

Soit $f \in \mathscr{F}(D,\mathbb{R})$

- Soit D' une partie de D.

  On dit que f a la propriété P sur D' lorsque $f_{|D'}$ a la propriété P.

  (Comme dans la sous-section sur les fonctions lipschitziennes pour dire que $x \mapsto x^2$ est k-lipschitzienne sur $[0,1]$).

- Soit a un point de $\bar{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

  On dit que f a la propriété P au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|D\cap V}$ a la propriété P.

Remarque :

Attention aux pièges du langage : une phrase telle que « f n'a pas la propriété P au voisinage de a » est ambiguë :

On peut l'interpréter comme : « non(f a la propriété P au voisinage de a) », qui signifie « quel que soit le voisinage de a, f n'a pas la propriété P sur $D \cap V$ ».

Mais on peut l'interpréter aussi comme « f a la propriété non(P) au voisinage de a », qui signifie « il existe un voisinage V de a tel que f n'a pas la propriété P sur $D \cap V$ ».

C'est en général la première interprétation qui est la bonne, mais c'est surtout le bon sens qui permet de décider.