Chapitre 4 : Rudiments de topologie (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

I Notion de boule ouverte, fermée

Dans $\mathbb{C}$: Soit $a \in \mathbb{C}$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La boule ouverte de centre a et de rayon ε est l'ensemble $B(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < \varepsilon\}$.

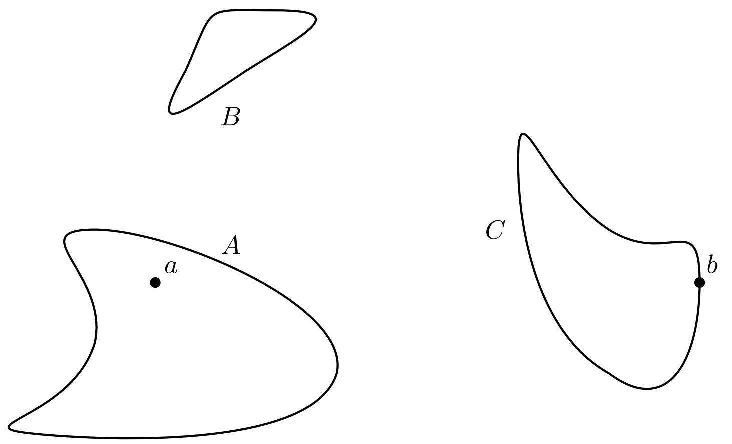
Dans $\mathbb{R}$: Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La boule ouverte de centre a et de rayon ε est l'ensemble $B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| < \varepsilon\}$.

On définit aussi la boule fermée de centre a et de rayon ε comme étant :
Dans $\mathbb{C}$: $\bar{B}(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| \leqslant \varepsilon\}$.
Dans $\mathbb{R}$: $\bar{B}(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| \leqslant \varepsilon\}$.
On étend la définition de boules : $\bar{B}(a,0) = \{a\}$ et $B(a,0) = \varnothing$.

II Notion de voisinage

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (au choix)

Définition :
Soit A une partie de $\mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que A est un voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$.



Sur le dessin :
A est un voisinage de a, B n'est pas un voisinage de a, mais $A \cup B$ en est un.
C n'est pas un voisinage de b : il faut qu'une boule ouverte soit incluse dans C.

Propriétés :

Soit $a \in \mathbb{K}$.

On note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

- $V(a)$ est stable par extension, c'est-à-dire :
  Si $V \in V(a)$, et si $V \subset W$, alors $W \in V(a)$
- $V(a)$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire :
  Si $V \in V(a)$, et si $W \in V(a)$, alors $V \cap W \in V(a)$.
  Plus généralement, si $V_1, V_2, \dots V_n \in V(a)$, alors $V_1 \cap V_2 \cap \dots V_n \in V(a)$.
  Mais ce n'est pas valable pour une infinité : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[0, 1 + \frac{1}{n}[$ est un voisinage de 1, mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1 + \frac{1}{n}[\notin V(1)$.
  En effet : Soient $V, W \in V(a)$.
  Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$, et $\varepsilon' > 0$ tel que $B(a, \varepsilon') \subset W$.
  Alors, pour $\alpha = \min(\varepsilon, \varepsilon')$, on a $B(a, \alpha) \subset V \cap W$.
- Séparabilité de voisinages : Soient $a, a' \in \mathbb{K}$, avec $a \neq a'$. Il existe alors $V \in V(a)$, $W \in V(a')$ tels que $V \cap W = \varnothing$.
  Démonstration :
  $|a' - a| > 0$. On peut choisir ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{|a'-a|}{2}$.
  Alors $B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) = \varnothing$ et $B(a, \varepsilon) \in V(a)$, $B(a', \varepsilon) \in V(a')$. D'où l'existence.

III Les ouverts, les fermés

A) Les ouverts

Définition :
Soit $\Omega \subset \mathbb{K}$. On dit que Ω est ouvert lorsque Ω est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire lorsque $\forall a \in \Omega, \Omega \in V(a)$.

Exemple :

- Les boules ouvertes sont ouvertes.
  Démonstration :
  Pour $B(a, 0)$, on a bien le résultat ($B(a, 0) = \varnothing$!)
  Soit Ω une boule ouverte de centre $a \in \mathbb{K}$ et de rayon $r > 0$.
  Montrons alors que Ω est ouvert.
  Soit $x \in \Omega$.
  Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < r - |a - x|$ (ce qui est possible car $|a - x| < r$).
  Alors $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. En effet, pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$, on a :
  $$|a - x| \leqslant |a - x| + \underbrace{|x - y|}_{<\varepsilon<r-|a-x|} < r \tag{4.1}$$
  Donc $\Omega \in V(x)$. Donc Ω est voisinage de chacun de ses points.
- $\mathbb{K}$ est ouvert.
- Exemples d'ouverts de $\mathbb{R}$:
  $$\varnothing, \quad \mathbb{R}, \quad]a, b[\text{ avec } a < b, \quad]a, +\infty[, \quad]-\infty, a[\text{ avec } a \in \mathbb{R}, \quad]a, b[\cup]c, d[\text{ où } a < b < c < d \tag{4.2}$$

Proposition :

Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

- Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts.

  Montrons que $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est un ouvert.

  Soit $a\in\bigcup_{i\in I}\Omega_i$. Alors il existe $j\in I$ tel que $a\in\Omega_j$. Donc Ω_j est voisinage de a.

  Comme $\Omega_j\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i$, $\bigcup_{i\in I}\Omega_i\in V(a)$.

  Donc $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est voisinage de tous ses points. C'est donc un ouvert.

- Soient Ω, Ω' deux ouverts.

  Soit $a\in\Omega\cap\Omega'$.

  Donc $\Omega\in V(a)$, et $\Omega'\in V(a)$. Donc $\Omega\cap\Omega'\in V(a)$.

  C'est valable pour tout $a\in\Omega\cap\Omega'$. Donc $\Omega\cap\Omega'$ est un ouvert.

B) Les fermés

Soit $F\subset\mathbb{K}$. On dit que F est fermée lorsque $C_{\mathbb{K}}F$ est ouvert.

Exemple :

$\varnothing$ est fermé, $\mathbb{K}$ est fermé, les boules fermées sont fermées.

Démonstration (pour les boules fermées) :

Soient $a\in\mathbb{K}, r\in\mathbb{R}_+$.

- Dans $\mathbb{R}$: facile, $\bar{B}(a,r)=[a-r,a+r]$.

- Dans $\mathbb{K}$:

  Soit $F=\bar{B}(a,r)$. Soit $b\in C_{\mathbb{K}}F$, c'est-à-dire tel que $|b-a|>r$.

  Prenons alors ε tel que $0<\varepsilon<|b-a|-r$.

  Alors $B(b,\varepsilon)\subset C_{\mathbb{K}}F$:

  Pour tout $x\in B(b,\varepsilon)$, $|b-a|\leqslant|b-x|+|x-a|$, soit $|x-a|\geqslant|b-a|-\underbrace{|b-x|}_{<\varepsilon<|b-a|-r}>r$.

  Donc $C_{\mathbb{K}}F$ est ouvert, donc F est fermé.

- Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont fermés Les intervalles fermés sont $[a,b]$, où $a<b$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$.

IV Intérieur et adhérence d'une partie

A) Intérieur

Définition :

Soit $A\subset\mathbb{K}$. Soit $a\in\mathbb{K}$. On dit que a est intérieur à A lorsque A est voisinage de a, c'est-à-dire lorsque :

$\exists\varepsilon>0, B(a,\varepsilon)\subset A$.

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, appelé « l'intérieur de A ».

Proposition :

$\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A, et c'est le plus grand des ouverts contenus dans A, au sens de l'inclusion.

Démonstration :

- Déjà, il est évident que $\mathring{A} \subset A$.
- $\mathring{A}$ est ouvert :

  Soit $x \in \mathring{A}$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

  Soit alors $y \in B(x, \varepsilon)$. Montrons que $y \in \mathring{A}$:

  $B(x, \varepsilon)$ est ouverte. Elle est donc voisinage de chacun de ses points.

  Or, $B(x, \varepsilon) \subset A$. Donc A est voisinage de y, donc $y \in \mathring{A}$.

  Ainsi, $B(x, \varepsilon) \subset \mathring{A}$. Donc $\mathring{A}$ est ouvert.
- Montrons que c'est le plus grand :

  Soit Ω un ouvert inclus dans A. Montrons qu'alors $\Omega \subset \mathring{A}$.

  Soit $x \in \Omega$. Ω est ouvert, donc $\Omega \in V(x)$. Mais $\Omega \subset A$. Donc $A \in V(x)$. Donc $x \in \mathring{A}$. D'où l'inclusion.

Exemple :

- Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur d'un intervalle $\vdots\alpha, \beta\vdots$ où $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$ est $]\alpha, \beta[$.
- $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$: si Ω est un ouvert non vide, alors Ω contient un intervalle du type $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, avec $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Or, cet intervalle contient des irrationnels. Donc $\Omega \not\subset \mathbb{Q}$.
- L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon.

B) Adhérence (dans $\mathbb{K}$) d'une partie de $\mathbb{K}$

Définition :

Soient $A \subset \mathbb{K}$, et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est adhérent à A lorsque tout voisinage de a rencontre A, c'est-à-dire lorsque $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \varnothing$.

La définition revient à dire que a est adhérent à A lorsque $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

En effet : Si $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \varnothing$, alors « en particulier », $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, puisque les boules ouvertes de centre a et de rayon non nul sont des voisinages de a.

Inversement, tout voisinage de a contient une boule ouverte de centre a.

La définition équivaut aussi à : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, |x - a| < \varepsilon$.

On note $\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des points de A adhérents à A. On l'appelle « l'adhérence de A dans $\mathbb{K}$ ».

Proposition :

$\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ est un fermé qui contient A, et c'est le plus petit des fermés contenant A, au sens de l'inclusion.

Démonstration :

- Déjà, $A \subset \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$, puisque $\forall a \in A, \forall V \in V(a), a \in A \cap V$.
- Soit $\Omega = C_{\mathbb{K}} \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Montrons que Ω est ouvert :

  Soit $x \in \Omega$. Montrons que $\Omega \in V(x)$.

  Déjà, $x \in \Omega$, donc $x \notin \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Il existe donc $W \in V(x)$ tel que $W \cap A = \varnothing$.

  Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset W$.

Alors $B(x, \varepsilon) \cap A = \varnothing$. Notons $W' = B(x, \varepsilon)$. Alors W' est un ouvert, et il est inclus dans Ω : pour tout $y \in W'$, on a $W' \in V(y)$ (car W' est ouvert), et de plus ce voisinage ne rencontre pas A, donc $y \notin \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$, c'est-à-dire que $y \in \Omega$. D'où l'inclusion. Donc $\Omega \in V(x)$, donc Ω est ouvert, soit $\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermé.

- C'est le plus petit fermé : soit F un fermé contenant A.
  Montrons qu'alors $\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \subset F$.
  Soit $x \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Montrons que $x \in F$.
  Supposons que $x \notin F$. Ainsi, $x \in C_{\mathbb{K}}F$.
  Comme $C_{\mathbb{K}}F$ est ouvert, il existe $V \in V(x)$ tel que $V \subset C_{\mathbb{K}}F$, c'est-à-dire que $V \cap F = \varnothing$. Donc $V \cap A = \varnothing$ (car $A \subset F$), ce qui contredit la définition de x puisque $x \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Donc $x \in F$.
  Donc $\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \subset F$.

Exemple :

L'adhérence de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est $[a, b]$.

L'adhérence dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

$\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(B(a, r)) = \bar{B}(a, r)$

V Les suites et le vocabulaire de la topologie

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, soit $l \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l \iff \forall V \in V(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \in V \tag{4.3}$$

Démonstration :

$\Longrightarrow$: supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $V \in V(l)$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(l, \varepsilon) \subset V$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - l| < \varepsilon$, c'est-à-dire tel que $\forall n \geqslant N, u_n \in B(l, \varepsilon) \subset V$
D'où l'implication puisque ce résultat est valable pour tout $V \in V(l)$.

$\Longleftarrow$: supposons que $\forall V \in V(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \in V$
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $B(l, \varepsilon) \in V(l)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n \in B(l, \varepsilon)$, c'est-à-dire tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$.
D'où l'autre implication.

Proposition :

Définition de l'adhérence avec les suites :

Soit $A \subset \mathbb{K}$, et $a \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$a \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Démonstration :

$\Longrightarrow$: Soit $a \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$. On peut donc choisir $u_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - a| < \frac{1}{n} \tag{4.4}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers a.

$\Longleftarrow$: Soit $a \in \mathbb{K}$. Supposons qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n \in B(a,\varepsilon)$.
Comme $u_N \in A$, on a $A \cap B(a,\varepsilon) \neq \varnothing$. Comme le résultat est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $a \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.

VI Partie dense dans une autre

Définition :

Soient $A, B \subset \mathbb{K}$, avec $A \subset B$.

On dit que A est dense dans B lorsque $B \subset \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.

Ou encore lorsque $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, B(b,\varepsilon) \cap \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \neq \varnothing$.

Ou quand tout point de B est limite d'une suite d'éléments de A.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

VII Compléments (dans $\mathbb{R}$)

Définition :

Un voisinage de $+\infty$, c'est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle du type $]c, +\infty[$, avec $c \in \mathbb{R}$. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle du type $]-\infty, c[$.

Définition :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ on dit que $+\infty$ est adhérent à A lorsque tout voisinage de $+\infty$ rencontre A, c'est-à-dire lorsque $\forall V \in V(+\infty), V \cap A \neq \varnothing$, ce qui revient à dire que $\forall c \in \mathbb{R},]c, +\infty[\cap A \neq \varnothing$, ou encore que A n'est pas majorée.

On définit de même pour $-\infty$.

On note $\mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$ l'ensemble des points de $\bar{\mathbb{R}}$ adhérents à A.

Exemple :

On note $A =]0, 5[\cup]5, +\infty[$. Alors :

$\mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(A) = A \cup \{0, 5\}$

$\mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A) = A \cup \{0, 5, +\infty\}$

Remarque :

Soit $l \in \bar{\mathbb{R}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si $\forall V \in V(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \in V$.

$V(+\infty)$ est stable par extension et par intersection finie.

De même pour $-\infty$.