Chapitre 2 : Suites réelles

I Définition

A) Généralités

Définition :

Soit E un ensemble.

Soit K un intervalle de $\mathbb{N}$ (du type $[\![n_0, n_1]\!], n_0 \leqslant n_1$ ou $\{n \in \mathbb{N}, n > n_0\}$) non vide.

Une suite d'éléments de E indexée par K est une application $u \colon \begin{array}{rcl} K & \longrightarrow & E \\ k & \longmapsto & u_k \end{array}$.

L'ensemble des suites d'éléments de E indexées par K est noté E^K (c'est aussi $\mathscr{F}(K, E)$).

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de suites à valeurs réelles, ou suites réelles. Si $E = \mathbb{C}$, on parle alors de suites complexes.

Pour $u \in E^K$, l'ensemble des valeurs de la suite est $\{u_k, k \in K\}$. On dit qu'une suite est infinie si elle est indexée par un ensemble infini. u_k est le terme de rang k.

On s'intéresse dans ce chapitre à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

B) Opérations sur les suites réelles

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $u + v$ désigne la suite réelle w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n$
- $u \times v$ désigne la suite réelle h définie par $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = u_n \times v_n$
- $\lambda \cdot u$ désigne la suite réelle u' définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = \lambda \cdot u_n$
  « $\cdot$ » : loi de composition à opérateur externe : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda \cdot u \end{array}$
- $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ (ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté) désigne la suite réelle dont tous les termes sont nuls : $\forall n \in \mathbb{N}, 0_n = 0$. (de même, $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ ou 1 si il n'y a pas d'ambiguïté)

Remarque :

Il n'y a pas intégrité, c'est-à-dire :

$$\text{non}(\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u \times v = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \implies u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \text{ ou } v = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})) \tag{2.1}$$

Exemple :

On prend les suites définies par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors $u \times v = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, mais $u \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ et $v \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

C) Divers modes de définition de suites

- Définition explicite : donnée, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, de u_n en fonction de n (de façon plus ou moins complexe, avec éventuellement des sommes ou des conditions…)
- Définition récurrente :
  - ◇ récurrence « simple » : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que :

$$\begin{cases} u_0 = \dots \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \tag{2.3}$$

    (Problème de définition éventuelle, dépend de f. On peut résoudre ce problème par récurrence)
  - ◇ récurrence « double » :

$$\begin{cases} u_0 = \dots \\ u_1 = \dots \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases} \tag{2.4}$$

- Définition implicite, par exemple : « pour $n \geqslant 2$, u_n est la solution réelle positive de l'équation $x^n = x + 1$ ».

On peut aussi imaginer d'autres modes de définitions de suites, plus complexes…

D) Suite croissante, décroissante…

Définition, proposition :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ est croissante } &\underset{\text{déf}}{\iff} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n \leqslant p \implies u_n \leqslant u_p) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leqslant u_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ est strictement croissante } &\underset{\text{déf}}{\iff} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n < p \implies u_n < u_p) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u_n < u_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ est décroissante } &\underset{\text{déf}}{\iff} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n \leqslant p \implies u_n \geqslant u_p) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u_n \geqslant u_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ est strictement décroissante } &\underset{\text{déf}}{\iff} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n < p \implies u_n > u_p) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u_n > u_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ est constante } &\underset{\text{déf}}{\iff} \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1} \\ &\iff (u_n) \text{ est croissante et } (u_n) \text{ est décroissante} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Démonstration (de la première équivalence pour la croissance) :

- Supposons que $\forall n, p \in \mathbb{N}, (n \leqslant p \implies u_n \leqslant u_p)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n \leqslant n+1$, on a bien $u_n \leqslant u_{n+1}$

- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leqslant u_{n+1})$. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Si $n = p$, on a $u_n \leqslant u_p$. Si $n < p$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant u_p$ (idem si $n > p$).

E) Suite majorée, minorée...

Définition, proposition :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} u \text{ est majorée } &\underset{\text{déf}}{\iff} \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est majoré} \\ &\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} u \text{ est minorée } &\underset{\text{déf}}{\iff} \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est minoré} \\ &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} u \text{ est bornée } &\underset{\text{déf}}{\iff} \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est borné} \\ &\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M \\ &\iff u \text{ est majorée et minorée} \end{aligned} \tag{2.12}$$

F) Propriétés « à partir d'un certain rang »

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemple :

u est croissante à partir du rang 4 si et seulement si $\forall n \geqslant 4, (u_n \leqslant u_{n+1})$.

On définit de même pour les autres propriétés.

Une suite constante à partir d'un certain rang est dite stationnaire.

G) Suite extraite

Définition :

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que v est extraite de u lorsqu'il existe une application $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple :

Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Alors les suites suivantes en sont extraites :

- La suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est constante et égale à 1.
- La suite $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est constante égale à -1.
- La suite $h = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à 0 associe 0 et à $n \in \mathbb{N}^*$ associe le n-ième nombre premier est stationnaire à partir du rang 2.
- La suite $v' = (u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la suite u.

II Suites convergentes

A) Définition

Définition :

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente lorsqu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \implies |u_n - l| < \varepsilon)$.

Remarque :

On a les équivalences :

$$|u_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \iff u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\tag{2.13}$$

« Aussi petit que soit ε strictement positif, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ ».

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $l, l' \in \mathbb{R}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et l', alors $l = l'$.

Démonstration :

Supposons $l \neq l'$, par exemple $l < l'$.

Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{l'-l}{2}$ (ce qui est possible car $\frac{l'-l}{2} > 0$).

Alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \tag{2.14}$$

et

$$\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N', l' - \varepsilon < u_n < l' + \varepsilon \tag{2.15}$$

Si on prend $n \geqslant \max(N, N')$, on aura alors :

$$l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \tag{2.16}$$

et

$$l' - \varepsilon < u_n < l' + \varepsilon \tag{2.17}$$

Donc $l' - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$, soit $l' - \varepsilon < l + \varepsilon$, c'est-à-dire $2\varepsilon > l' - l$, ce qui est en contradiction avec le choix de ε.

Conséquence :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, l'unique réel l tel que $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$ est appelé la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note $l = \lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim u$, ou $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (attention aux notations : dans les deux premières égalités, on a des suites en argument, dans la troisième, on a un terme).

Pour dire « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge », on peut dire aussi « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle ».

Exemple :

- Soit a un réel. La suite constante égale à a converge vers a.

En effet : Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\forall n \geqslant 0$, $|u_n - a| < \varepsilon$ puisque $|u_n - a| = 0$. On a donc trouvé N (à savoir 0) tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - a| < \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - a| < \varepsilon$.

- La suite $\begin{cases} \text{de terme général } u_n = \frac{1}{n} \quad (n \geqslant 1) \\ u = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ n \mapsto \dfrac{1}{n} \end{cases}$ converge vers 0.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$. Or, $|u_n| = \frac{1}{n}$ donc $|u_n| < \varepsilon$. Donc la suite converge vers 0.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff |u_n - l| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{2.18}$$

En effet : on a, par définition

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon \tag{2.19}$$

$$u_n - l \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |(u_n - l) - 0| < \varepsilon \tag{2.20}$$

$$|u_n - l| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, ||u_n - l| - 0| < \varepsilon \tag{2.21}$$

Exemple :

La suite $n \mapsto 2 - \dfrac{1}{n}$ converge vers 2.

B) Convergence et suite bornée

Théorème :

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Démonstration :

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons l sa limite.

Selon la définition de la convergence vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - l| < 3$. Donc $\forall n \geqslant N$, $|u_n| = |u_n - l + l| \leqslant |u_n - l| + |l| \leqslant 3 + |l|$.

Ainsi, en posant $M = \max\left(|l| + 3, |u_0|, |u_1|, \ldots |u_N|\right)$, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

Contraposée :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors elle ne converge pas (elle diverge).

Attention : la réciproque est fausse, par exemple $u \colon n \mapsto (-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

Démonstration :

Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors il n'existe aucun N tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - l| < \varepsilon$.

En effet, supposons qu'il en existe.

Alors $|u_N - l| < \varepsilon$ et $|u_{N+1} - l| < \varepsilon$.

Donc $|u_{N+1} - u_N| = |u_{N+1} - l - (u_N - l)| \leqslant |u_{N+1} - l| + |u_N - l| < 2\varepsilon \leqslant 1$. Contradiction car $|u_{N+1} - u_N| = 2$.

C) « La notion de limite ne dépend pas des premiers termes »

Proposition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont égales à partir d'un certain rang, alors elles sont de même nature (convergente ou divergente), et si elles convergent, c'est vers la même limite.

Démonstration :

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n = v_n$. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l :

Soit $\varepsilon > 0$. On peut introduire $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N', |u_n - l| < \varepsilon$.

Alors, si on pose $P = \max(N, N')$, on a $\forall n \geqslant P, |v_n - l| = |u_n - l| < \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant P, |v_n - l| < \varepsilon$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Étant donnés les rôles symétriques joués par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc l'équivalence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; donc, par contraposée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\iff$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

D) Convergence et suite extraite

Lemme :

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \geqslant k$.

Démonstration (par récurrence) :

On a $\varphi(0) \geqslant 0$ car $\varphi(0) \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\varphi(k) \geqslant k$.

Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k) \geqslant k$, donc $\varphi(k+1) > k$, donc $\varphi(k+1) \geqslant k+1$, ce qui achève la récurrence.

Théorème :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite converge vers l.

Démonstration :

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Alors pour tout $k \geqslant N$, on a $\varphi(k) \geqslant k \geqslant N$, donc $|u_{\varphi(k)} - l| < \varepsilon$.

Ainsi, on a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant N, |v_k - l| < \varepsilon$.

Application :

On l'utilise généralement pour la contraposée.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. On a $\begin{cases} \lim(u_{2n}) & = 1 \\ \lim(u_{2n+1}) & = -1 \end{cases}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. On a $\begin{cases} \lim(u_{2n}) & = 0 \\ \lim(u_{4n+3}) & = -1 \\ \lim(u_{4n+1}) & = 1 \end{cases}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition :
Si $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.

Démonstration :
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant K, |u_{2k} - l| < \varepsilon$.
Soit $K' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant K', |u_{2k+1} - l| < \varepsilon$.
Alors $\forall n \geqslant \max(2K, 2K'+1), |u_n - l| < \varepsilon$.
En effet : soit $n \geqslant \max(2K, 2K'+1)$.
Si n est pair, n s'écrit sous la forme $n = 2k$, et comme $n \geqslant 2K$, on a $k \geqslant K$, donc $|u_{2k} - l| < \varepsilon$, soit, comme $n = 2k$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Il en est de même si n est impair.
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$.

III Convergence et inégalités

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et si I est un intervalle ouvert contenant l, alors il existe un rang à partir duquel les termes sont dans I.

Démonstration :
Il est clair que si I est ouvert, et si $l \in I$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset I$. Soit alors un tel $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\forall n \geqslant N, u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset I$.

Théorème (passage à la limite dans une inégalité) :
Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l, l' respectivement, et si il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$, alors $l \leqslant l'$.

Démonstration (par l'absurde) :
Avec les hypothèses du théorème, supposons que $l > l'$.
Soit alors ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{l-l'}{2}$. Ainsi, $l' + \varepsilon < l - \varepsilon$.
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.
Et aussi $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N', l' - \varepsilon < v_n < l' + \varepsilon$.
Alors, pour $n \geqslant \max(N, N', n_0)$, on a $v_n < l' + \varepsilon < l - \varepsilon < u_n$. Contradiction, car $u_n \leqslant v_n$.

Remarque :

Les inégalités strictes ne se conservent pas par passage à la limite.

Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 - \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{n}$, mais $\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$.

Cas particulier :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a$, alors $\lim(u_n) \leqslant a$.

Théorème (des gendarmes) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$, et si il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.

Et aussi $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N', l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon$.

Alors, pour $n \geqslant \max(N, N', n_0)$, on a $l - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < l + \varepsilon$.

On a donc trouvé M tel que $\forall n \geqslant M, l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant M, |v_n - l| < \varepsilon$.

Cas particulier :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Plus généralement, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

IV Convergence et opérations sur les suites

Proposition :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Attention : La réciproque est fausse, sauf si $l = 0$

Proposition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $l' \in \mathbb{R}$, alors :

- $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.
- $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \times l'$.

Démonstration :

- Soit $\varepsilon > 0$.

  Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon/2$ (car $\varepsilon/2 > 0$),

  Et $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N', |v_n - l'| < \varepsilon/2$.

  Alors, pour $n \geqslant \max(N, N')$, $|u_n + v_n - (l + l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon$.

  Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant M, |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$.

  Donc $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.

- Si $\lambda = 0$, la suite nulle converge bien vers 0.

  Sinon, soit $\varepsilon > 0$.

  Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon/|\lambda|$ (car $\varepsilon/|\lambda| > 0$).

  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda||u_n - l| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est donc bornée.

  On introduit alors $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M$.

  On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n v_n - l'l| = |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \leqslant |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l| \leqslant \underbrace{M|v_n - l'|}_{\to 0} + \underbrace{|l'||u_n - l|}_{\to 0} \tag{2.22}$$

  Donc, d'après le théorème des gendarmes, $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l'l$.

Proposition :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.

En effet : on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leqslant M|v_n|$ où M est une borne de u (voir démonstration précédente)

Proposition :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{1}{l}$.

Démonstration :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l| > 0$.

Soit alors α tel que $0 < \alpha < |l|$. Il existe donc $P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant P, |u_n| > \alpha$.

Donc $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie au moins à partir de P.

Montrons que $\lim\left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{l}$.

Pour tout $n \geqslant P$, on a : $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{1}{|u_n||l|}|u_n - l| \leqslant \underbrace{\frac{1}{\alpha|l|}|u_n - l|}_{\to 0}$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{l}$.

Proposition (démontrée plus tard) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$.

Si f est une fonction continue définie sur I, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$

V Limites dans $\bar{\mathbb{R}}$

On note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On prolonge la loi $+$ et la relation $\leqslant$ sur $\bar{\mathbb{R}}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (-\infty) + x = -\infty, \qquad (+\infty) + x = +\infty \tag{2.23}$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty, \qquad +\infty + (+\infty) = +\infty \tag{2.24}$$

(Prolongation partielle)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < x \tag{2.25}$$

$$-\infty < +\infty \tag{2.26}$$

(Prolongation totale)

Remarque :

$\bar{\mathbb{R}}$ admet un maximum $(+\infty)$ et un minimum $(-\infty)$.

Définition :

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A$.

« étant donné n'importe quel réel, il y a un rang à partir duquel on le dépasse ».

Proposition :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$, alors elle n'en a qu'une.

Démonstration :

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l, l' \in \bar{\mathbb{R}}$, avec $l' < l$.

- premier cas : $l, l' \in \mathbb{R}$, déjà vu.
- deuxième cas : $l' = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$.
  Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n \in]l'-1, l'+1[$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $A < l' - 1$.
  Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N', u_n \leqslant A$.
  On a une contradiction lorsque $n \geqslant \max(N, N')$
- Autres cas ($l' \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$ ou $l' = -\infty$, $l = +\infty$) : procéder de même que pour le deuxième cas.

Vocabulaire :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une limite dans } \bar{\mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{c} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l \in \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \pm\infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ \left. \begin{array}{c} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite dans } \bar{\mathbb{R}} \end{array} \right\} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge} \end{array} \tag{2.27}$$

Proposition :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \pm\infty$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$.
(même démonstration que pour $l \in \mathbb{R}$)
Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite tend aussi vers l.

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

(prendre $A > 0$ dans la définition)

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l \in \bar{\mathbb{R}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l' \in \bar{\mathbb{R}}$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$, alors $l \leqslant l'$.

Théorème :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$, et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty$, et si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant u_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty$.

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \pm\infty$, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \pm\infty$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \mp\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$

Démonstration :
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, M \leqslant v_n$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, M + u_n \leqslant v_n + u_n$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n \geqslant A - M$.
Alors $\forall n \geqslant N, u_n + v_n \geqslant A$.

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$ et si il existe $a > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, $v_n \geqslant a$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$.

La démonstration est identique à celle de la proposition précédente.

Proposition :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir de ce rang et tend vers $+\infty$.

VI Suite arithmétique – géométrique

A) Suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr \tag{2.28}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_r}{2} \tag{2.29}$$

- Si $r = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \text{cte}$.
- Si $r > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
- Si $r < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

B) Suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n \tag{2.30}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases} \tag{2.31}$$

Si $q = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 1.
Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Pour $q \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, étude de la suite géométrique de terme général $u_n = q^n$ $(u_0 = 1)$:

- Si $q > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $q < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Démonstration :
Pour les deux premiers : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \underbrace{q^n}_{>0} \underbrace{(q-1)}_{\substack{>0 \text{ si } q>1 \\ <0 \text{ si } 0<q<1}}$
Pour le troisième : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \underbrace{q^n}_{\text{signe alterné}} \underbrace{(q-1)}_{\text{signe constant}}$
Pour les limites :

- Si $q > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
- Si $q \leqslant -1$, pas de limite.

En effet : pour $q > 1$, $q^n = (1 + (q-1))^n = 1 + n(q-1) + \cdots \geqslant 1 + n(q-1)$ et $1 + n(q-1)$ tend vers $+\infty$, donc q^n tend vers $+\infty$.
Pour $|q| < 1$ et $q \neq 0$, $|\frac{1}{u_n}| = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \to +\infty$. Donc $(|u_n|) \to 0$, soit $(u_n) \to 0$.

VII Comparaison de suites

A) Suite négligeable devant une autre

Définition :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ lorsqu'il existe une suite ε qui tend vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u \ll v$.

Exemple :
$\frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n}$ puisque $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$.

Proposition (définition équivalente dans le cas courant) :
Si la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors on a l'équivalence :

$$u \ll v \iff \frac{u}{v} \text{ tend vers } 0 \tag{2.32}$$

Ou encore :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{2.33}$$

Démonstration :
Si v ne s'annule pas à partir du rang q,
Supposons que $u \ll v$. Il existe alors $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant p, u_n = \varepsilon_n v_n$.
Alors $\forall n \geqslant \max(p, q)$, $\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n$ qui tend vers 0.
Supposons inversement que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors, $\forall n \geqslant q, u_n = \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\to 0} v_n$. Donc $u \ll v$.

Proposition :
La relation $\ll$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est transitive, compatible avec la multiplication, mais pas avec l'addition.

Démonstration :

- Si $u \ll v$ et $v \ll w$, alors $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang, et $v_n = \varepsilon'_n w_n$ à partir d'un certain rang.
  Alors, à partir du plus grand des deux rangs, $u_n = \underbrace{\varepsilon_n \varepsilon'_n}_{\to 0} w_n$. Donc $u \ll w$.
- Si $u \ll v$ et $u' \ll v'$, alors $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang, et $u'_n = \varepsilon'_n v'_n$ à partir d'un certain rang. Donc $u_n u'_n = \underbrace{\varepsilon_n \varepsilon'_n}_{\to 0} v_n v'_n$. Donc $uu' \ll vv'$
- Contre-exemple pour l'addition :

$$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad \frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\ll} -\frac{1}{n}, \quad \text{mais } \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\not\ll} \frac{1}{n^2} \quad \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right) \tag{2.34}$$

Cependant, si $u \ll v$ et $u' \ll v$, alors $u + u' \ll v$.

En effet : $u_n = \varepsilon_n v_n$, $u'_n = \varepsilon'_n v_n$ à partir d'un certain rang, donc $u_n + u'_n = (\varepsilon_n + \varepsilon'_n)v_n$...

B) Comparaisons classiques

Pour les suites qui tendent vers $+\infty$:

- $\ln n \ll_{n\to+\infty} n$

  Plus généralement, $\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, \ln^\alpha n \underset{n\to+\infty}{\ll} n^\beta}$

  (par exemple, $(\ln n)^{10^9} \ll \sqrt{n}$)

  En effet : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ln(n^{\beta/\alpha})}{n^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \underbrace{\left(\frac{\ln(n^{\beta/\alpha})}{n^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha}_{\to 0} \tag{2.35}$$

- $\boxed{n^\alpha \ll n^\beta \text{ lorsque } 0 < \alpha < \beta}$.
- $n \ll a^n$ lorsque $a > 1$.

  En effet : on note $a = 1 + b$, où $b > 0$.

  Alors $a^n = (1+b)^n \geqslant \binom{n}{p} b^p$ si $n \geqslant p$,

  soit $a^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$. Donc $\frac{a^n}{n} \to +\infty$, soit $\frac{n}{a^n} \to 0$

  Plus généralement, $\boxed{\forall \alpha > 0, \forall a > 1, n^\alpha \ll a^n}$

  En effet : $\frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n}\right)^\alpha$. Or, $a^{1/\alpha} > 1$. Donc $\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \to 0$. Comme $\alpha > 0$, on a bien $\left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n}\right)^\alpha \to 0$.
- $\boxed{a^n \ll b^n \text{ si } 1 < a < b}$.
- $\boxed{\forall a > 1, a^n \ll n!}$.

  En effet : On a

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \times a \times \cdots \times a}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{p} \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n-p}}{1 \times 2 \times \cdots p \times \underbrace{(p+1) \times \cdots \times n}_{n-p \text{ termes } > p}} \leqslant \frac{a^p}{p!}\left(\frac{a}{p}\right)^{n-p} \tag{2.36}$$

  Si on prend $p > a$, on a, pour tout $n \geqslant p$:

$$0 \leqslant \frac{a^n}{n!} \leqslant \underbrace{\frac{a^p}{p!}\left(\frac{a}{p}\right)^{-p}}_{\text{cte}} \times \underbrace{\left(\frac{a}{p}\right)^n}_{\to 0} \tag{2.37}$$

  Donc $\frac{a^n}{n!} \to 0$.
- $\boxed{n! \ll n^n}$.

  En effet : On a

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n} = \frac{1}{n} \frac{2 \times \cdots \times n}{\underbrace{n \times \cdots \times n}_{\leqslant 1}} \leqslant \frac{1}{n} \tag{2.38}$$

Notation :

Pour dire qu'une suite u est négligeable devant une autre suite v, on note :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \quad (\text{« } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ égale une suite négligeable devant } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ »}) \tag{2.39}$$

Ainsi, $o(v_n)$ (« petit o ») désigne une suite négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C) Suites équivalentes

Définition :

On dit que « u équivaut à v » (et on note $u \sim v$), ou que « u_n est équivalente à v_n en $+\infty$ » (et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$), s'il existe une suite $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 telle que $u_n = h_n v_n$ à partir d'un certain rang.

Définition (simplifiée) :

Si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \tag{2.40}$$

Exemple :

$$n^2 + n \sim n^2 \qquad\qquad \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n} \tag{2.41}$$

Définition (équivalente) :

$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.

Démonstration :

- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = h_n v_n$ à partir d'un certain rang, où $h_n \to 1$. Mais $h_n = 1 + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \to 0$. D'où $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n = v_n + o(v_n)$.
- Inversement : identique.

Proposition :

La relation $\sim$ est transitive, réflexive, symétrique.

Démonstration (de la symétrie, les deux autres étant immédiats) :

Si $u \sim v$, alors $u_n = h_n v_n$ à partir d'un certain rang, où $h_n \to 1$. Mais alors $v_n = \frac{1}{h_n} u_n$ à partir d'un certain rang, et $\frac{1}{h_n} \to 1$, donc $v \sim u$.

Rappel :

Une relation transitive, réflexive, symétrique est une relation d'équivalence.

Une relation transitive, réflexive, antisymétrique est une relation d'ordre.

Proposition :

La relation $\sim$ est compatible avec $\times$, mais pas avec $+$.

La démonstration est la même que pour $\ll$.

Contre-exemple :

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} & \sim \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} & \sim -\frac{1}{n} \end{array}\right\} \text{ mais } \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \not\sim 0. \tag{2.42}$$

Remarque :

$u_n \sim 0$ si et seulement si $u_n = h_n \times 0$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0.

Proposition :

Si $u_n \sim v_n$, et si $u_n \to l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $v_n \to l$.

La réciproque est fausse, sauf si $l \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration :

En effet, $v_n = \underbrace{h_n}_{\to 1} \underbrace{u_n}_{\to l}$ à partir d'un certain rang.

Si $u_n \to l \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim l$. Par transitivité, si $v_n \to l \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim v_n$.

Contre-exemples si $l = 0, \pm\infty$: $n^2 \not\sim n$, $\frac{1}{n^2} \not\sim \frac{1}{n}$.

Divers vrai/faux classiques :

- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$ (compatibilité avec $\times$) : vrai
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ ($u_n = h_n v_n \to \frac{1}{u_n} = \frac{1}{h_n}\frac{1}{v_n}$) : vrai
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (si défini) : vrai.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^n \sim v_n^n$ est fausse en général ($1 + \frac{1}{n} \sim 1$, et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$)
- Si $u_n \sim v_n$, alors $f(u_n) \sim f(v_n)$ est fausse en général.

D) Équivalents usuels

Si $u_n \to 0$, alors :

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ (α indépendant de n)

E) Suite dominée par une autre

Définition :

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite bornée $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = k_n h_n$ à partir d'un certain rang.

Cela revient à dire :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si (et seulement si) il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_n| \leqslant K|v_n|$ à partir d'un certain rang.

Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ (« grand O »)

Exemple :

- $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$
- $n \sin n \not\sim n$, $n \sin n \neq o(n)$, mais $n \sin n = O(n)$

VIII Théorèmes portant sur les suites monotones

A) Le théorème « de la limite monotone » (pour les suites)

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.

- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée, c'est-à-dire que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée.
  Cet ensemble est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$.
  Montrons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors $l - \varepsilon$ ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (puisque l est le plus petit majorant) Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > l - \varepsilon$. Ainsi, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a :

  $$\forall n \geqslant N, l - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant l \quad (< l + \varepsilon) \tag{2.43}$$

  D'où la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l.
- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$. A n'est pas un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Donc, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > A$.
  Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle tend vers sa borne inférieure.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

1. Appliquer le théorème précédent à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Recopier la démonstration précédente en adaptant.

B) Suites adjacentes

Théorème :
Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors elles convergent vers une même limite.

Vocabulaire :
Si deux suites vérifient les hypothèses du théorème (croissance, décroissance et limite nulle), on dit que les suites sont adjacentes.

Démonstration :
Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes.

- Déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
  En effet, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > v_p$, alors, pour tout $n \geqslant p$, $v_n \leqslant v_p < u_p \leqslant u_n$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante),
  soit $u_n - v_n \geqslant u_p - v_n$, et $v_n \leqslant v_p$ donc $u_p - v_n \geqslant u_p - v_p$.
  C'est-à-dire : $\forall n \geqslant p, u_n - v_n \geqslant u_p - v_p$
  D'où, par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $0 \geqslant u_p - v_p$.
  Ce qui est contradictoire puisqu'on a supposé $u_p > v_p$
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
- Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
  Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers $l \in \mathbb{R}$.
  De même, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l' \in \mathbb{R}$.
  Comme $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, et $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l - l'$, on a donc $l - l' = 0$, c'est-à-dire $l = l'$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite.

Exemple :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{2.44}$$

et

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \tag{2.45}$$

Alors :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n!}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$
  Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.
- $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \to 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite e.
Montrons que $e > 2$ et que $e \notin \mathbb{Q}$.

- Déjà, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to e$, et $\forall n \geqslant 2, u_n \geqslant 2 + \frac{1}{2}$.
  Donc en passant à la limite $e \geqslant 2 + \frac{1}{2} > 2$.
- Supposons que $e = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tendent vers e, on a $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, u_n < e < v_n$.

C'est-à-dire, pour tout $n \geqslant 2$,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \tag{2.46}$$

Donc, pour $n = q$ (on peut s'arranger pour que $q \geqslant 2$ puisque la fraction n'est pas nécessairement irréductible) :

$$\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a+1}{q!} \tag{2.47}$$

où a est un entier naturel.

C'est-à-dire $a < p(q-1)! < a+1$, ce qui est impossible car $p(q-1)! \in \mathbb{N}$.

Donc $e \notin \mathbb{Q}$.

C) Théorème des « segments emboîtés »

Théorème :

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments emboîtés de $\mathbb{R}$. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ n'est pas vide, et si, de plus, l'amplitude de S_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ est un singleton.

Démonstration :

- Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_n < b_n \text{ et } S_n = [a_n, b_n]) \tag{2.48}$$

- Comme les S_n sont emboîtés, on a $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \subset S_n$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.
  Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  De plus, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par b_0), et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par a_0).
  Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\beta \in \mathbb{R}$.
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n$. Donc $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n \neq \varnothing$.
- Si de plus l'amplitude de S_n tend vers 0, alors $b_n - a_n \to 0$, donc $\alpha = \beta$
  Donc $\{\alpha\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Mais on a aussi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n \subset \{\alpha\}$. En effet :
  Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$.
  Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant x \leqslant b_n$. D'où, par passage à la limite, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.
  Donc, comme $\alpha = \beta$, $x \in \{\alpha\}$. D'où l'inclusion. Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{\alpha\}$.

D) Un exemple très important : les suites construites par dichotomie

Proposition :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

1. $a_0 \leqslant b_0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, \frac{a_n+b_n}{2}) \\ \text{ou } (\frac{a_n+b_n}{2}, a_n) \end{cases}$

Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$.

Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et convergent vers la même limite.

Démonstration :

- Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$.
  C'est vrai pour $n = 0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$.
  Alors $a_0 \leqslant a_n \leqslant \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n \leqslant b_0$.
  Or, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) \\ \text{ou } \left(\frac{a_n+b_n}{2}, a_n\right) \end{cases}$.
  Donc $a_0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_0$, ou $a_0 \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_0$. Soit, dans les deux cas, $a_0 \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_0$, ce qui achève la récurrence.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré que $a_n \leqslant b_n$.
  Donc $a_n \leqslant \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$. Or, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) \\ \text{ou } \left(\frac{a_n+b_n}{2}, a_n\right) \end{cases}$.
  Donc $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, ce qui est valable pour tout n.
  Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
  Donc $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$.

IX Le théorème de Bolzano–Weierstrass

Théorème :

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

On introduit alors $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leqslant b$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, b]$.

- On commence par construire deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :
  - ◇ $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
  - ◇ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_k, b_k]$ est infini.

  Pour cela, on procède par dichotomie :
  - ◇ On prend $a_0 = a$, $b_0 = b$. L'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_0, b_0]$ est infini, puisque c'est $\mathbb{N}$.
  - ◇ En supposant a_k et b_k de sorte que $a_k \leqslant b_k$ et que l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_k, b_k]$ est infini, on construit a_{k+1} et b_{k+1} de la manière suivante :

— Si l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right]$ est infini, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$.

— Sinon, l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right]$ est nécessairement infini, et on pose alors $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ et $b_{k+1} = b_k$.

On a bien alors $a_{k+1} \leqslant b_{k+1}$, et l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ est infini.
La construction dichotomique de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ assure de plus que ces deux suites convergent vers la même limite.

- On construit une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels de sorte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$.
  Pour cela, on fait la construction récurrente suivante :
  - ◇ On prend $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [a_0, b_0]$: il en existe puisque l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_0, b_0]$ est infini.
  - ◇ En supposant n_k construit : comme l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ est infini, il contient nécessairement des entiers strictement plus grands que n_k ; on peut donc trouver $n_{k+1} > n_k$ tel que $u_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$
- Conclusion :
  La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (puisque $k \mapsto n_k$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), et elle converge :
  En effet, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leqslant u_{n_k} \leqslant b_k$. Or, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, donc $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aussi d'après le théorème des gendarmes.

X Compléments

Proposition :
Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Démonstration :
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut introduire un rationnel r_n tel que $a < r_n < a + \frac{1}{n+1}$.
Donc la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

A) Idées pour les suites définies par des relations de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

- Intérêt d'un « intervalle stable par f ».
- Intérêt du graphe de f.
- Intérêt des points fixes de f.
- Intérêt du signe de $f(x) - x$
- Intérêt de la croissance de f sur un intervalle stable contenant u_0 : la suite est monotone.

- Intérêt de la décroissance de f sur un intervalle contenant u_0 : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire.
- Intérêt de majorations du type $\forall x, y, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

B) Développement décimal illimité propre d'un réel

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $D_n = \left\{\frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}\right\}$

Proposition :
Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Alors il existe un unique décimal $d_n \in D_n$ tel que $d_n \leqslant x < d_n + 10^{-n}$.
On l'appelle la valeur décimale approchée par défaut d'ordre n de x.

Démonstration :
Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences :

$$\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a}{10^n} + 10^{-n} \iff a \leqslant 10^n x < a + 1 \iff a = [10^n x] \tag{2.49}$$

D'où l'existence et l'unicité de $d_n \in D_n$ tel que $d_n \leqslant x < d_n + 10^{-n}$, à savoir $d_n = \frac{1}{10^n}[10^n x]$.

Remarque :

- d_0 est la partie entière de x.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x - 10^{-n} \leqslant d_n \leqslant x$, donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Proposition :
Avec les notations précédentes, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 10^n(d_n - d_{n-1})$.
Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \in \{0, 1, \dots 9\}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = d_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}$

Démonstration :
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déjà, α_n est un entier (puisque $10^n d_n$ et $10^{n-1} d_{n-1}$ le sont)
De plus, on a : $x - 10^{-n} < d_n \leqslant x$, et $x - 10^{-n+1} < d_{n-1} \leqslant x$.
Donc $-10^{-n} < d_n - d_{n-1} < -10^{-n+1}$, soit $-1 < \alpha_n < 10$, d'où $\alpha_n \in \{0, 1, \dots 9\}$.
De plus, $d_n = d_0 + \sum_{k=1}^{n}(d_k - d_{k-1}) = d_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{10^k}$.
(On peut montrer de plus par l'absurde que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire à 9).