Chapitre 1 : Les réels

I Préliminaires

1. Supposé connu : l'ensemble $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$, les opérations $+$, $\times$, ...
2. Supposé connue : la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ qui constitue un ordre total :
   - La relation $\leqslant$ est compatible avec $+$, c'est-à-dire :

     $$\forall(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, (x_1\leqslant x_2 \text{ et } x_3\leqslant x_4) \implies (x_1+x_3\leqslant x_2+x_4) \tag{1.1}$$

     Il en résulte que $\forall x\in\mathbb{R},\ x\leqslant 0 \iff -x\geqslant 0$:
     Soit $x\in\mathbb{R}$.
     Supposons $x\leqslant 0$. Comme $-x\leqslant -x$, on a : $x+(-x)\leqslant 0+(-x)$, soit $-x\geqslant 0$.
     Supposons $-x\geqslant 0$. Comme $x\leqslant x$, on a : $x+(-x)\geqslant 0+x$, soit $0\geqslant x$.
   - La relation $\leqslant$ n'est pas compatible avec $\times$, sauf restreinte à $\mathbb{R}_+$:

     $$\forall(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}_+^4, (x_1\leqslant x_2 \text{ et } x_3\leqslant x_4) \implies (x_1\times x_3\leqslant x_2\times x_4) \tag{1.2}$$

     Il en résulte que $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \forall a\in\mathbb{R}_+, x_1\leqslant x_2 \implies ax_1\leqslant ax_2$:
     Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $a\in\mathbb{R}_+$.
     Supposons $x_1\leqslant x_2$. Alors $0\leqslant x_2-x_1$.
     De plus, $0\leqslant a$. Donc $0\times 0\leqslant a(x_2-x_1)$, soit $ax_1\leqslant ax_2$.
3. Supposé connu : $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
4. Théorème fondamental, admis :

Théorème (de la borne supérieure) :
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

II Répartition des entiers et des rationnels dans $\mathbb{R}$.

A) Partie entière d'un réel

Lemme :
Pour tout réel x, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $x<n$.

Démonstration :
Supposons qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ x\geqslant n$. Alors $\mathbb{N}$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ donc $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure α (théorème fondamental). Alors $\alpha-1$ étant strictement plus petit que α, il ne majore pas $\mathbb{N}$. Il existe donc $n\in\mathbb{N}$ tel que $\alpha-1<n$. Donc $\alpha<n+1$, ce qui est contradictoire, puisque $n+1\in\mathbb{N}$.

Théorème, définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des éléments k de $\mathbb{Z}$ tels que $k \leqslant x$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{E} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$, admet un plus grand élément. Ce plus grand élément est la partie entière de x, notée $[x]$, $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $\mathscr{E} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$. Alors :

- $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{Z}$.
- $\mathscr{E}$ est non vide : selon le lemme, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-x < n$. Alors $-n < x$, donc $-n \in \mathscr{E}$.
- $\mathscr{E}$ est majorée en tant que partie de $\mathbb{Z}$: selon le lemme, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x < m$. Alors $\forall k \in \mathscr{E}, k \leqslant x < m$, donc m majore $\mathscr{E}$.

On retiendra :

- La partie entière de x est le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x.
- On a donc, pour tout $p \in \mathbb{Z}$: $p = [x] \iff p \leqslant x < p + 1$

Remarque :

le lemme peut être oublié :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < [x] + 1 \tag{1.3}$$

B) Répartition des rationnels dans $\mathbb{R}$.

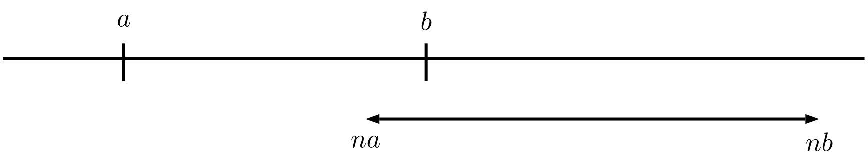
Théorème :

Entre deux réels distinct, il y a toujours un rationnel ou encore :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \qquad a < b \iff \exists r \in \mathbb{Q}, a < r < b \tag{1.4}$$

Démonstration :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $a < b$.



- On peut introduire $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nb - na > 1$ (prendre par exemple $n = 1 + \left[\frac{1}{b-a}\right]$). Ainsi, $n > \frac{1}{b-a}$
- Comme $nb - na > 1$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $na < p < nb$ (par exemple $p = [na] + 1$, puisque $[na] \leqslant na < \underbrace{[na] + 1}_{p} \leqslant na + 1 < nb$)
- Ainsi, $a < \frac{p}{n} < b$, et $\frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$.

Conséquence :

Entre deux réels distincts, il y a une infinité de rationnels.

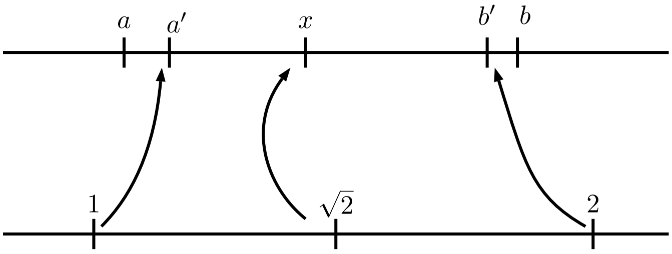
Théorème :

Entre deux réels distincts, il y a toujours un irrationnel ou encore :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad a < b \iff \exists x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, a < x < b \tag{1.5}$$

Démonstration :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $a < b$.



- Déjà, on introduit $(a', b') \in \mathbb{Q}^2$ tels que $a < a' < b' < b$
- On introduit ensuite $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$ avec $\alpha > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a' \\ 2\alpha + \beta = b' \end{cases} \tag{1.6}$$

  (il en existe : $\alpha = b' - a'$ et $\beta = 2a' - b'$ conviennent).
- Alors, comme $1 < \sqrt{2} < 2$, on a $\alpha + \beta < \alpha\sqrt{2} + \beta < 2\alpha + \beta$, soit $a' < \alpha\sqrt{2} + \beta < b'$. Et de plus $\alpha\sqrt{2} + \beta \notin \mathbb{Q}$ (Si $\alpha\sqrt{2} + \beta = M \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \frac{M-\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}$), d'où le résultat.

Conséquence :

Entre deux réels distincts, il y a une infinité d'irrationnels.

III Le théorème de la borne supérieure

Rappel :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, l un réel. Dire que l est la borne supérieure de A, c'est dire que l est le plus petit majorant de A. Ou encore :

$$\begin{aligned} l = \sup(A) &\iff \begin{cases} l \text{ est un majorant de } A \\ \text{et c'est le plus petit} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant l \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, \quad (\forall x \in A, x \leqslant z) \implies l \leqslant z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant l \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, \quad z < l \implies \exists x \in A, z < x \end{cases} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Exemple :

1. Soit $A =]0,1[$, montrons que 1 est la borne supérieure de A.

   Déjà, $\forall x \in A, x \leqslant 1$, donc 1 majore A.

   Soit $z < 1$, montrons qu'alors z ne majore pas A :

   - si $z \leqslant 0$, z ne majore pas A, car par exemple $\frac{1}{2} \in A$ et $z < \frac{1}{2}$.

- si $z > 0$, alors le réel $y = \frac{z+1}{2}$ est tel que $0 < z < y < 1$. Donc $y \in A$ et $z < y$, donc z ne majore pas A.

Donc 1 est la borne supérieure de A.

2. Soit $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, montrons que A admet 0 comme borne inférieure.
Déjà, 0 minore A. De plus, 0 est le plus grand minorant de A. En effet, soit $a > 0$. On peut alors introduire $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{a}$ (par exemple $n = \left[\frac{1}{a}\right] + 1$). Alors $\frac{1}{n} \in A$, et $\frac{1}{n} < a$. Donc a ne minore pas A. Donc 0 est la borne inférieure de A.

Théorème :
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démonstration :
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide. Supposons A minorée. Notons alors $B = \{-x, x \in A\}$. Alors : (1) B est majorée et (2) non vide. Donc B admet une borne supérieure l, (3) et donc $-l$ est la borne inférieure de A. En effet :

1. Soit m un minorant de A. Donc $\forall x \in A, x \geqslant m$, donc $\forall x \in A, -x \leqslant -m$. Comme $\forall x \in A, -x \in B$, on a $\forall x \in B, x \leqslant -m$. Donc $-m$ majore B.
2. Soit $a \in A$. Comme $A \subset \mathbb{R}$, $-a$ existe, et, par définition de B, $-a \in B$. Donc B est non vide.
3.

$$\begin{cases} \forall x \in B, x \leqslant l \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, \quad z < l \implies \exists x \in B, z < x \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in B, -l \leqslant -x \\ \text{et } \forall z \in \mathbb{R}, \quad -l < -z \implies \exists x \in B, -x < -z \end{cases} \tag{1.8}$$

Remarque :
L'ensemble des majorants de $\mathbb{R}$ est $\varnothing$. $\varnothing$ n'a pas de plus petit élément, donc $\mathbb{R}$ n'a pas de borne supérieure.
L'ensemble des majorants de $\varnothing$ est $\mathbb{R}$. (puisque pour tout $l \in \mathbb{R}$, on a « $\forall x \in \varnothing, x \leqslant l$ »). $\mathbb{R}$ n'a pas de plus petit élément, donc $\varnothing$ n'a pas de borne supérieure.

Rappel :
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que A a une borne supérieure. Alors A admet un plus grand élément si et seulement si $\sup(A) \in A$. Dans ce cas, $\sup(A) = \max(A)$.

IV Valeur absolue

A) Généralités

Définition :
Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x| \underset{\text{déf}}{=} \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \in R_+$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$.

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Démonstration (des deux dernières propriétés) :

Troisième Si $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$, $|xy| = xy = |x||y|$

Si $x \geqslant 0, y \leqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$, $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$

Si $x \leqslant 0, y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$, $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

(vus les rôles symétriques, le dernier cas se ramène au deuxième)

Quatrième Si $x+y \geqslant 0$, $|x+y| = x+y \leqslant |x|+|y|$ (car $|x| = \max(-x,x)$, donc $x \leqslant |x|$)

Si $x+y \leqslant 0$, $|x+y| = -(x+y) = -x-y \leqslant |x|+|y|$ (idem, $-x \leqslant |x|$)

Conséquence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\sum_{i=1}^n x_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|$

Pour tout $(x,y) \in R^2$, $||x| - |y|| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$

Démonstration :

La première conséquence se montre par récurrence. Pour la deuxième :

- $2^{\text{ème}}$ inégalité :
$$|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y| \tag{1.9}$$
- $1^{\text{ère}}$ inégalité :
$$|x| = |x-y+y| \leqslant |x-y| + |y| \tag{1.10}$$

Donc $|x| - |y| \leqslant |x-y|$.

De même, $|y| - |x| \leqslant |x-y|$, c'est-à-dire $-(|x|-|y|) \leqslant |x-y|$. On a donc deux inégalités de la forme :

$-A \leqslant B$, $A \leqslant B$. Donc $\max(-A, A) \leqslant B$. Donc $|A| \leqslant B$, d'où la deuxième inégalité.

B) Parties bornées de $\mathbb{R}$: compléments

Soient $x, a \in \mathbb{R}$; on a l'équivalence $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$

Proposition :

soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est bornée si et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leqslant m$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leqslant m$. Donc il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A, -m \leqslant x \leqslant m$. Donc $-m$ minore A et m majore A.

Supposons que A est bornée. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, a \leqslant x \leqslant b$. Posons $m = \max(|a|, |b|)$. Alors, pour tout x de A, $-m \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant |b| \leqslant m$, donc $|x| \leqslant m$.

Remarque :

$(\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leqslant m) \iff$ l'ensemble des valeurs absolues des éléments de A est majoré.

V Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que A est convexe lorsque $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leqslant z \leqslant y \implies z \in A)$

Proposition :

Toute intersection de parties convexes de R est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soit K un ensemble quelconque, et $(A_k)_{k\in K}$ une famille de parties convexe de $\mathbb{R}$, indexée par K. Montrons que $A = \bigcap_{k\in K} A_k$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$. (rappel : $\bigcap_{k\in K} A_k = \{x \in \mathbb{R}, \forall k \in K, x \in A_k\}$)

Soient $x, y \in A, z \in \mathbb{R}$, supposons que $x \leqslant z \leqslant y$. Montrons que $z \in A$.

Soit $k \in K$. Alors $x \in A_k, y \in A_k$. Or, A_k est convexe. Donc $z \in A_k$. C'est valable pour tout k, donc $z \in A$.

Théorème :

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les parties du type :

$$\begin{array}{llllll} \varnothing & \{a\} = [a,a] & [a,b] & [a,b[&]a,b] &]a,b[\\ ]-\infty,a] &]-\infty,a[&]a,+\infty[& [a,+\infty[& \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[& \end{array} \tag{1.11}$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Démonstration :

Déjà il est immédiat que les intervalles sont des parties convexes de $\mathbb{R}$.

Soit A une partie convexe de $\mathbb{R}$. Montrons que A est un intervalle.

Si $A = \varnothing$, ok.

Sinon $A \neq \varnothing$: Soit alors $a \in A$, et notons $A_1 = [a, +\infty[\cap A$.

Alors déjà A_1 est intersection de deux convexes, donc est un convexe. On va montrer que A_1 est un intervalle du type $[a, \dots|$:

- A_1 est non vide (il contient a).
- soit A_1 est majoré ; il a alors une borne supérieure b. Montrons que $[a, b[\subset A_1$. Soit $x \in [a, b[$. Alors $x < b$. Or, b est le plus petit majorant de A_1, donc x ne majore pas A_1. Il existe donc $y \in A_1$ tel que $x < y$. Donc $a \leqslant x < y$. Or, $a, y \in A_1$ et A_1 est convexe. Donc $x \in A_1$, d'où l'inclusion. Ainsi, $[a, b[\subset A_1 \subset [a, b]$ (la deuxième inclusion est due au fait que a minore A_1 et b majore A_1).
  Donc $A_1 = [a, b[$ ou $A_1 = [a, b]$.
- Soit A_1 n'est pas majorée ; montrons alors que $A_1 = [a, +\infty[$.
  Déjà, par construction de A_1, $[a, +\infty[\subset A_1$. Montrons l'autre inclusion :
  Soit $x \in [a, +\infty[$. x n'est pas un majorant de A_1, donc il existe $y \in A_1$ tel que $x < y$. Ainsi, $a \leqslant x < y$. Comme A_1 est convexe, $x \in A_1$, d'où l'autre inclusion.

Finalement, A_1 est un intervalle du type $[a, \dots|$.

De même, on peut monter que $A_2 =]-\infty, a] \cap A$ est un intervalle du type $|\dots, a]$. Et, comme $A = A_1 \cup A_2$, on voit que A est un intervalle.

Remarque :

Ne sont pas des intervalles :

$$\mathbb{R}^*, \qquad \mathbb{N}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\text{ où } a < b \tag{1.12}$$