Chapitre 17 : Intégrale double

Ici, $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne naturelle.

I Sous-ensemble quarrable de $\mathbb{R}^2$, aire

A) Aire d'un pavé borné de $\mathbb{R}^2$

Soit P un pavé borné de $\mathbb{R}^2$, $P = I_1 \times I_2$ où I_1 et I_2 sont des intervalles bornés de R, d'extrémités respectives a_1, b_1 et a_2, b_2 (avec $a_1 \leqslant b_1$ et $a_2 \leqslant b_2$)

L'aire de P est par définition $m(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

L'intérieur de P est $\mathring{P} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$.

B) Partie pavable

Soit $X \subset \mathbb{R}^2$.

On dit que X est pavable lorsque X est une réunion finie de pavés bornés.

On peut démontrer, et c'est intuitivement clair, que si $X \subset \mathbb{R}^2$ est pavable, alors X peut s'écrire $X = \bigcup_{i\in I} P_i$, où I est fini, où chaque P_i est un pavé borné, et où les $\mathring{P}_i$ sont disjoints deux à deux, et que le réel $\sum_{i\in I} m(P_i)$ ne dépend que de X.

Ce réel est appelé l'aire de X, et est noté $m(X)$.

C) Partie quarrable

Définition :

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

Soit $m_+(A)$ la borne inférieure des aires des ensembles pavables contenant A.

Soit $m_-(A)$ la borne supérieure des aires des ensembles pavables contenus dans A.

On dit que A est quarrable lorsque $m_-(A) = m_+(A)$.

L'aire de A est alors, par définition, $m(A) = m_-(A) = m_+(A)$.

(Cette définition a bien un sens, car on vérifie immédiatement que les bornes en questions existent bien)

Propriétés (admises) :

- Si A et B sont quarrables, alors $A \cup B, A \cap B, B\backslash A, \mathring{A}, \bar{A}$ sont quarrables, et :

$$m(A) = m(\mathring{A}) = m(\bar{A}) \tag{17.1}$$

  Si A et B sont disjoints, $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

  Et dans tous les cas $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

- m est invariant par isométrie

- Une partie bornée du plan dont la frontière (c'est-à-dire $\bar{A}\backslash\mathring{A}$) est le support d'un arc paramétré continu et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est quarrable.

II Définition de l'intégrale double d'une fonction continue et bornée

A) Subdivision d'une partie quarrable

Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$.

Une subdivision de D est une famille finie $(\Delta_i)_{i\in I}$ de parties quarrables telle que $D = \bigcup_{i\in I}\Delta_i$, les Δ_i étant non vides et disjoints deux à deux.

Le pas de cette subdivision est le maximum des diamètres des Δ_i

(Le diamètre de Δ_i est $\delta(\Delta_i) = \sup_{x,y\in\Delta_i}\|x-y\|$)

B) Définition

Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, soit $f\colon D \to \mathbb{R}$.

On dit que f est « en escalier » sur D lorsqu'il existe une subdivision $(\Delta_i)_{i\in I}$ de D telle que f soit constante sur chaque Δ_i.

Définition :

Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ en escalier.

On peut définir l'intégrale (double) de f sur D par : $\iint_D f = \sum_{i\in I} a_i m(\Delta_i)$, où $(\Delta_i)_{i\in I}$ est une subdivision de D telle que $f = \text{cte} = a_i$ sur chaque Δ_i (la définition est indépendante du choix d'une telle subdivision)

Théorème, définition (admis) :

Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

On peut définir $I^-(f) = \sup\left\{\iint_D \varphi, \varphi \text{ en escalier sur } D \text{ et } \varphi \leqslant f\right\}$

Et $I^+(f) = \inf\left\{\iint_D \psi, \psi \text{ en escalier sur } D \text{ et } f \leqslant \psi\right\}$

Alors $I^+(f) = I^-(f)$, et ce réel est appelé l'intégrale (double) de f sur D et est noté $\iint_D f$ ou $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

III Premières propriétés de l'intégrale double

Dans ce paragraphe, les domaines sont supposés quarrables, et les fonctions continues et bornées.

A) Additivité par rapport au domaine d'intégration

Si $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, alors $\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

B) Propriétés relatives à la fonction

- Linéarité : l'application $f \mapsto \displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est linéaire.

- Croissance : si $\forall (x,y) \in D, f(x,y) \leqslant g(x,y)$, alors :

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{17.2}$$

- $$\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m(D) \tag{17.3}$$

- $$(\inf_D f) \times m(D) \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant (\sup_D f) \times m(D) \tag{17.4}$$

- $$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{17.5}$$

- Si D est ouvert, et si f est positive,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \implies \forall (x,y) \in D, f(x,y) = 0 \tag{17.6}$$

  Attention, c'est vrai parfois quand D n'est pas ouvert, mais le résultat est faux en général. Par exemple, $\iint_{\{\Omega\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ mais on peut très bien avoir $f(\Omega) \neq 0$.

IV Formules de Fubini (admises)

f désigne une fonctions continue et bornée sur un domaine D.

1. Cas où $D = [a,b] \times [a',b']$ (avec $a < b, a' < b'$) – D est alors quarrable.

   Alors :
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{a'}^{b'} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{a'}^{b'} \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y \tag{17.7}$$

   Cas particulier :

   Si $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h\colon [a',b'] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, alors :

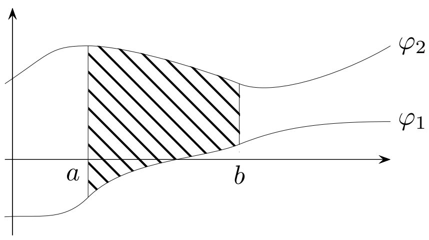
$$\iint\limits_D g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a'}^{b'} \left(\int_a^b g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{a'}^{b'} h(y)\,\mathrm{d}y\right) \tag{17.8}$$

2. Cas où il existe deux fonctions continues φ_1, φ_2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

   $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$ (Ainsi, D est quarrable)

   Alors $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$

   Cas particulier où $f = \text{cte} = 1$: on retrouve l'aire de D : $m(D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,\mathrm{d}x$



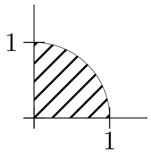
3. Résultat analogue en échangeant les rôles :
S'il existe deux fonctions continues ψ_1, ψ_2 définies sur $[a,b]$ telles que $\psi_1 \leqslant \psi_2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant y \leqslant b \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$, alors D est quarrable, et :
$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$.

Remarque :

En général, on a le choix entre l'application du 2. et du 3., et l'un peut être plus judicieux qu'un autre (il vaut mieux commencer par exemple par l'intégrale la plus simple).

Exemple :

Si D est le quart de cercle de centre O, de rayon 1 :



On veut calculer $I = \iint_D xy\sqrt{x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Comme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$, on a :
$I = \int_0^1 x\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+4y^2}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$.
On pose $J_x = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+4y^2}\,\mathrm{d}y$.
En faisant le changement de variable $\begin{cases} u = x^2+4y^2 \\ \mathrm{d}u = 8y\,\mathrm{d}y \end{cases}$, on obtient $J_x = \frac{1}{8}\int_{x^2}^{x^2+4(1-x^2)} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$
Soit $J_x = \frac{1}{12}\left((4-3x^2)\sqrt{4-3x^2} - x^3\right)$.
Donc $I = \frac{1}{12}\left(\int_0^1 (4-3x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x\right) \underset{\substack{u=4-3x^2 \\ \mathrm{d}u=-6x\,\mathrm{d}x \\ \text{(première} \\ \text{intégrale)}}}{=} \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\int_1^4 u^{3/2}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x\right)$
Et, après calcul et simplification, $I = \frac{7}{45}$.

V Changement de variable (admis)

A) Préliminaire

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Un difféomorphisme de U sur V est une application de U sur V, bijective et de classe $\mathcal{C}^1$, dont la réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Étant donnée une application de classe $\mathcal{C}^1$ $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$, pour que φ soit un difféomorphisme de U sur son image $\varphi(U)$, il faut et il suffit que φ soit injective et que le jacobien de φ ne s'annule pas sur U.

Où, par définition, le jacobien de φ en $(x,y) \in U$ est :

$$J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} \qquad \text{où } \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \tag{17.9}$$

B) Théorème

Soit K un compact quarrable de $\mathbb{R}^2$.

(Ne pas chercher à savoir ce que signifie « compact de $\mathbb{R}^2$ », savoir seulement que les domaines définis dans les hypothèses de Fubini – tels que définis au paragraphe précédent – sont des compacts quarrables, et que pour de tels domaines K, l'intérieur de K est le domaine admettant la même définition mais avec des inégalités strictes)

Soit φ une application définie sur un ouvert U contenant K, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi_{|\mathring{K}}$ définisse un difféomorphisme de $\mathring{K}$ sur son image.

Alors $\varphi(K)$ est un compact quarrable de $\mathbb{R}^2$, et pour toute fonction f continue sur $\varphi(K)$, on a :

$$\iint_{\varphi(K)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{K} f(\varphi(u,v))|J_\varphi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{17.10}$$

Remarque :

Selon le préliminaire, pour vérifier que $\varphi_{|\mathring{K}}$ définit un difféomorphisme sur son image, il suffit de vérifier que $\varphi_{|\mathring{K}}$ est injective et que J_φ ne s'annule pas sur $\mathring{K}$.

Remarque :

Toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée.

C) Exemple important : changement de variable affine

1. On suppose ici que φ est une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ bijective.

   Soit alors $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la partie linéaire de φ (A est inversible car φ, et donc sa partie linéaire, est bijective).

   Soient φ_1, φ_2 les applications composantes de φ (c'est-à-dire définies par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$).

   Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $\begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, où on a noté $\varphi(0,0) = (x_0, y_0)$.

   Alors on voit immédiatement que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, donc $J_\varphi(x,y) = \det A \neq 0$

   Et la restriction de φ à n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^2$ définit un difféomorphisme de cet ouvert sur son image (d'après le préliminaire)

   Ainsi, pour tout compact quarrable K de $\mathbb{R}^2$ et toute application continue f de $\varphi(K)$ dans $\mathbb{R}$, on a :

   $$\iint_{\varphi(K)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{K} f(\varphi(u,v))|\det A|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{17.11}$$

2. Applications :

   - Si φ est une isométrie, on a $|\det A| = 1$, et on obtient alors :

     $$\iint_{\varphi(K)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{K} f(\varphi(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{17.12}$$

   - Cela permet d'utiliser les symétries :

     Si par exemple $\forall (x,y) \in K, (-x,y) \in K$ et $f(-x,y) = f(x,y)$

Alors $\iint_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{K'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $K' = K \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

En effet, avec le changement de variable correspondant à $\varphi(x,y) = \varphi(-x,y)$ (symétrie orthogonale par rapport à Oy), on voit que $\iint_{K''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{K'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (où $K'' = K\backslash K'$)

De même pour d'autres symétries.

- Calcul de l'aire délimitée par l'ellipse E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

  Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application affine laissant $O = (0,0)$ invariant, transformant $\vec{i} = (1,0)$ en $a\vec{i}$ et $\vec{j} = (0,1)$ en $b\vec{j}$.

  Le jacobien de φ est $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$, et φ transforme le cercle C d'équation $x^2+y^2 = 1$ en l'ellipse $\mathscr{E}$, et bien sûr la surface délimitée par C en la surface délimitée par $\mathscr{E}$.

  Donc, en notant K le disque délimité par C, l'aire délimitée par l'ellipse est :

$$\iint\limits_{\varphi(K)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{K} ab\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi ab \tag{17.13}$$

  (Car $\iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$, connu et montré dans la suite)

D) Autre exemple important : passage en coordonnées polaires

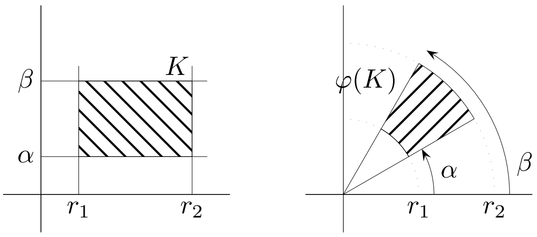
Soit $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$.

Alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et en tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, le jacobien de φ vaut :

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{17.14}$$

1) Premier cas

Soit K défini par $K = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, r_1 \leqslant r \leqslant r_2 \text{ et } \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\right\}$, où r_1, r_2, α, β sont tels que $0 \leqslant r_1 < r_2$ et $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$.



On voit que l'intérieur de K est $\overset{\circ}{K} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, r_1 < r < r_2 \text{ et } \alpha < \theta < \beta\right\}$.

On vérifie immédiatement que $\varphi_{|\overset{\circ}{K}}$ est injective.

(Car, pour $(r,\theta) \in \overset{\circ}{K}$, on a $r > 0$ et $\theta \in]\alpha, \alpha+2\pi[$, ce qui évite que deux éléments distincts de $\overset{\circ}{K}$ aient la même image par φ)

De plus, le jacobien de φ sur $\overset{\circ}{K}$ ne s'annule pas.

(Car $\forall (r,\theta) \in \overset{\circ}{K}, J_\varphi(r,\theta) = r$)

Donc le théorème de changement de variables s'applique et donne, pour toute fonction continue f

sur $\varphi(K)$:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\varphi(K)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{K} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{r_1}^{r_2} r \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r\end{aligned} \tag{17.15}$$

En particulier, en prenant $f = 1$, l'aire de $\varphi(K)$ est :

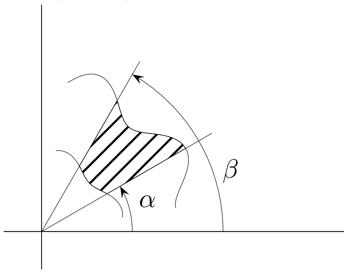
$$m(\varphi(K)) = \int_{r_1}^{r_2} r \left(\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = (\beta - \alpha)\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \tag{17.16}$$

En prenant $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $r_1 = 0$, $r_2 = r$, l'aire du disque de rayon r est πr^2.

2) Deuxième cas, plus général

K est défini par $K = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \text{ et } \varphi_1(\theta) \leqslant r \leqslant \varphi_2(\theta)\right\}$

Où α et β sont tels que $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$ et où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues sur $[\alpha, \beta]$ telles que $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2$. Voici alors l'allure de $\varphi(K)$:



Le même raisonnement que précédemment donne alors :

$$\iint\limits_{\varphi(K)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \tag{17.17}$$

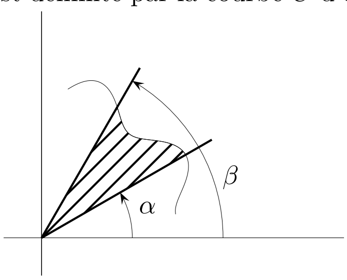
Cas particulier :

Aire d'un secteur délimité par une courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$:

On suppose ici que f est continue sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$. Soit D le domaine défini par :

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant f(\theta)\} \tag{17.18}$$

D est délimité par la courbe C d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ et par les « rayons » d'angles polaires α et β.



Alors l'aire de D est :

$$\iint\limits_{D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{0}^{f(\theta)} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \tag{17.19}$$

VI Extension aux intégrales triples

Toutes les notions et théorèmes vus pour les intégrales doubles sont adaptables aux intégrales triples (qu'on note $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$), voire multiples…

Pour adapter la définition du jacobien :

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^p$, soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, et soit $A \in \Omega$.

La matrice jacobienne de f en A, c'est la matrice de la différentielle de f en A (c'est-à-dire de $\mathrm{d}f_A$, qui est linéaire) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

(Et le jacobien est le déterminant de cette matrice)

VII Intégrale de surface

L'intégrale de surface est aux nappes paramétrées ce que l'intégrale curviligne est aux arcs paramétrés.

Tout est admis dans ce paragraphe.

Soit S une nappe paramétrée simple, régulière (c'est-à-dire que $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}$ ne s'annule pas) de classe $\mathcal{C}^1$ définie par une paramétrisation :

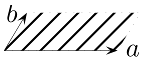
$$\begin{array}{ccl} \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array} \tag{17.20}$$

Où Δ est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$.

L'application $(u,v) \mapsto \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v) \right\|$ est alors continue, et on suppose de plus qu'elle est bornée sur Δ.

Alors l'aire de S est $\iint_\Delta \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Très intuitivement, le plan tangent au point $M(u,v)$ de S est dirigé par $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v)$, « l'aire élémentaire » est $\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, noté $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$

A rapprocher du fait que l'aire du parallélogramme 

est $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\||\sin(\vec{a},\vec{b})|$.

Si φ est une fonction numérique définie et continue sur le support de la nappe S, l'intégrale de φ sur S est l'intégrale (dite intégrale de surface) :

$$\iint\limits_S \varphi(M)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_\Delta \varphi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{17.21}$$

Intérêt : si φ représente par exemple la densité surfacique, cette intégrale donne la masse de la nappe.

VIII Masses, centres et moments d'inertie

A) Pour un arc dans le plan ou l'espace

Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ et de support C.

Soit $\rho\colon C \to \mathbb{R}_+$, continue (densité linéique)

(Le cas des arcs plans est bien entendu un cas particulier : avec la troisième composante nulle).

- La masse de C est $m = \int_\gamma \rho(M)\,\mathrm{d}s$

- Le centre de gravité est $G \in \mathbb{R}^3$ tel que $m\overrightarrow{OG} = \int_\gamma \rho(M)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}s$

  C'est-à-dire que $G = (x_G, y_G, z_G)$ où $\begin{cases} mx_G = \int_\gamma \rho(M)x_M\,\mathrm{d}s \\ my_G = \int_\gamma \rho(M)y_M\,\mathrm{d}s \\ mz_G = \int_\gamma \rho(M)z_M\,\mathrm{d}s \end{cases}$
- Δ étant un point ou une droite, le moment d'inertie de C par rapport à Δ est :

  $\int_\gamma \rho(M)d(M,\Delta)^2\,\mathrm{d}s$ (où $d(M,\Delta)$ est la distance de M à Δ)

B) Pour une surface dans le plan $\mathbb{R}^2$

Avec des notations évidentes :

- Masse : $m = \iint_S \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- Centre de gravité G tel que $m\overrightarrow{OG} = \iint_S \rho(x,y)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- Moment d'inertie par rapport à Δ : $\iint_S \rho(x,y)d(M,\Delta)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

C) Pour une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Même chose, mais avec des intégrales de surface :

- Masse : $m = \iint_S \rho(M)\,\mathrm{d}\sigma$
- Centre de gravité G tel que $m\overrightarrow{OG} = \iint_S \rho(M)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}\sigma$
- Moment d'inertie par rapport à Δ : $\iint_S \rho(M)d(M,\Delta)^2\,\mathrm{d}\sigma$

D) Pour un volume dans $\mathbb{R}^3$

Comme pour une surface dans $\mathbb{R}^2$ avec des intégrales triples :

- Masse : $m = \iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
- Centre de gravité G tel que $m\overrightarrow{OG} = \iiint_V \rho(x,y,z)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
- Moment d'inertie par rapport à Δ : $\iiint_V \rho(x,y,z)d(M,\Delta)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

IX Formule de Green–Riemann (admise)

A) Compact élémentaire, compact simple

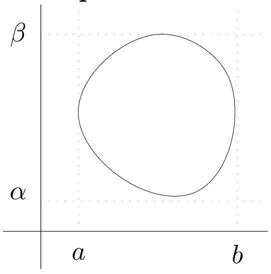
- Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que K est un compact élémentaire lorsqu'il vérifie les hypothèses du théorème de Fubini par rapport aux deux axes, c'est-à-dire :

  K peut être défini par $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \end{cases}$ (où φ_1, φ_2 sont continues sur $[a,b]$)

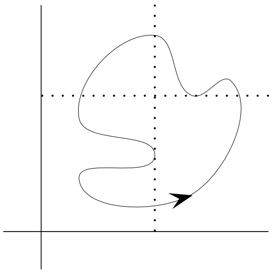
  Et aussi par $\begin{cases} \alpha \leqslant y \leqslant \beta \\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y) \end{cases}$ (où ψ_1, ψ_2 sont continues sur $[\alpha,\beta]$.
- Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^2$ est un compact simple lorsqu'il se découpe, en traçant des parallèles aux axes, en un nombre fini de compacts élémentaires.

  On admet que la frontière ∂K d'un compact simple constitue un arc fermé simple, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et que l'on peut orienter positivement (dans le sens trigonométrique direct)

Exemples



Est un compact élémentaire (donc aussi simple)



Est un compact simple, mais non élémentaire (découpé ici en 6 compacts élémentaires). On a pu ici orienter sa frontière dans le sens direct (trigonométrique direct)

B) Théorème (Green–Riemann)

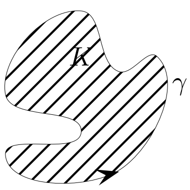
Théorème :
Soit K un compact simple, dont la frontière ∂K est orientée positivement.

Soit $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant K.

Alors $\int_{\partial K} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

C) Application aux calculs d'aires

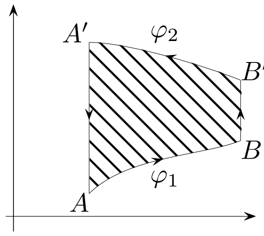
Soit γ un arc fermé simple de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, définissant la frontière, orientée positivement, d'un compact simple K :



L'aire de K est donc $A = \iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\gamma x\,\mathrm{d}y = \underset{\substack{\text{avec } Q=x\\ P=0}}{\int_\gamma x\,\mathrm{d}y} = \underset{\substack{\text{avec } Q=0\\ P=y}}{\int_\gamma -y\,\mathrm{d}x}$

En particulier, si K peut être défini par $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, on retrouve :

$$A = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\gamma y\,\mathrm{d}x \tag{17.22}$$



En effet, $\int_\gamma y\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{AB} y\,\mathrm{d}x}_{\int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x} + \underbrace{\int_{BB'} y\,\mathrm{d}x}_{0} + \underbrace{\int_{B'A'} y\,\mathrm{d}x}_{-\int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x} + \underbrace{\int_{A'A} y\,\mathrm{d}x}_{0}$

Dans tous les cas, l'aire de K est aussi donnée par $A = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$.

Dans le cas où γ est donnée par une équation polaire $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, on a donc, sur γ :

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}, \theta \in [\alpha, \beta] \tag{17.23}$$

D'où $\begin{cases} \mathrm{d}x = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

Donc $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = f(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$ et donc $A = \frac{1}{2}\int_\gamma f(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$ (formule déjà vue)

Ainsi, avec les hypothèses vues plus haut :

$$A = \int_\gamma x\,\mathrm{d}y = -\int_\gamma y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\gamma f(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \tag{17.24}$$