Chapitre 16 : Intégrales curvilignes, formes différentielles

Ici, $p = 2$ ou 3.

I Intégrale curviligne le long d'une courbe

Soit $\gamma\colon \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, de support C.

Soit $f\colon C \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On appelle intégrale curviligne de f le long de γ, et on note $\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s$ le réel défini par $\int_\gamma f(M)ds = \int_a^b f(M(t))\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$ (où $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \left\|\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$)

Proposition (admise) :

Si le paramétrage est « raisonnable » (en particulier pas de points doubles autres qu'en des points isolé), cette intégrale ne dépend que de C.

Généralisation aux arcs continus et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux,

c'est-à-dire que γ est continu et il existe une subdivision $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \gamma_{|[a_{i-1},a_i]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(On généralise par addition…)

Interprétation s étant une abscisse curviligne, $\mathrm{d}s$ représente « le déplacement élémentaire sur C ».

Ainsi, $\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(M(t_i))(s(t_i) - s(t_{i-1}))$ (admis)

où, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$ (subdivision régulière de $[a,b]$).

Utilité

Exemple :

Un fil dont la forme est donné par la courbe paramétrée γ, de densité linéique $p\colon M \to p(M)$ (fonction continue de M) a pour masse totale $\int_\gamma p(M)\,\mathrm{d}s$.

II Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

A) Définition

Une forme différentielle sur Ω est une application de Ω dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Si par exemple $p=3$, on sait que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ (dual de $\mathbb{R}^3$) est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, dont une base naturelle est constituée des 3 projecteurs : $(x,y,z)\mapsto x$, $(x,y,z)\mapsto y$ et $(x,y,z)\mapsto z$, qu'on a notés en analyse $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$.

Ainsi, une forme différentielle ω sur Ω s'écrit :

$\omega = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}z$ où A, B, C sont 3 applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit :

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \omega(x,y,z) = A(x,y,z)\,\mathrm{d}x + B(x,y,z)\,\mathrm{d}y + C(x,y,z)\,\mathrm{d}z$.

On dit que ω est de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque A, B, C le sont.

De même si $p=2$, une forme différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ s'écrit :

$\omega = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y$ où A et B sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemples

- ω définie par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}, \omega(x,y) = (2x+1)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ est une forme différentielle continue sur Ω.

B) Formes différentielles exactes

Définition :

Soit ω une forme différentielle continue sur Ω. On dit que ω est exacte lorsqu'il existe f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

Autrement dit, avec $p=2$ par exemple :

La forme différentielle ω définie par $\forall(x,y)\in\Omega, \omega(x,y) = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y$ (où A et B sont continues) est exacte si et seulement si il existe f, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall(x,y)\in\Omega, A(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $B(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

C) Intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe

Soit $\begin{array}{rccl}\gamma\colon & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & t & \longmapsto & M(t)\end{array}$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ et de support C.

On prend les notations habituelles :

On pose $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(M(t))(\vec{v}(t))\,\mathrm{d}t$.

Attention : $\omega\in\mathscr{F}(\Omega,\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}))$, $\omega(M(t))\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ et $\omega(M(t))(\vec{v}(t))\in\mathbb{R}$.

Autrement dit, dans le cas $p=2$:

Si $\forall(x,y)\in\Omega, \omega(x,y) = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y$, alors :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[A(x(t),y(t))x'(t) + B(x(t),y(t))y'(t)\right]\,\mathrm{d}t \tag{16.1}$$

Théorème (Admis) :

Si le paramétrage est « raisonnable », cette intégrale ne dépend que de C et de l'orientation de C définie par ce paramétrage (l'intégrale est changée en son opposée si la paramétrisation inverse l'orientation de C).

Lien avec les intégrales curvilignes de fonctions

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(M(t))(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\vec{T}(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \omega(M(t))(\vec{T}(t))\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \omega(M)(\vec{T}(M))\,\mathrm{d}s \tag{16.2}$$

On peut ici encore généraliser aux arcs continus et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, par addition.

Théorème :
Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^p$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de support contenu dans Ω.

Alors $\int_\gamma \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$, où A est le point de γ de paramètre a, B celui de paramètre b.

En particulier, si γ est fermé (c'est-à-dire $A = B$), $\int_\gamma \mathrm{d}f = 0$.

Cas où ω est exacte

Démonstration :

Avec les notations précédentes, dans le cas $p = 2$ par exemple :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right]}_{\text{dérivée en } t \text{ de } t \mapsto f(x(t),y(t))}\,\mathrm{d}t = [f(x(t),y(t))]_a^b = f(B) - f(A) \tag{16.3}$$

III Circulation d'un champ de vecteurs

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et soit $\vec{F}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^0$.

On a : $\forall (x,y,z) \in \Omega, \vec{F}(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$

Soit ω la forme différentielle $\omega = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$.

Alors $\int_\gamma \omega$ est aussi noté $\int_\gamma \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$, appelé circulation de $\vec{F}$ le long de γ.

Justification, interprétation

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b \left[X(M(t))x'(t) + Y(M(t))y'(t) + Z(M(t))z'(t)\right]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \vec{F}(M) \cdot \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(M(t_i)) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}\end{aligned} \tag{16.4}$$

Où $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $M_i = M(t_i)$.

(La dernière égalité est admise, mais intuitivement claire)

Ainsi, le théorème du paragraphe précédent s'écrit aussi :

$\int_\gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}_M f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = f(B) - f(A)$ (circulation d'un champ dérivant d'un potentiel)

où $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.