Chapitre 15 : Champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$

Définition, rappels Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Un champ de vecteurs sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}^3$.

C'est donc une application $\vec{F}\colon \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z) \end{array}$ où X, Y, Z (applications coordonnées) sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

On dira que $\vec{F}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque chaque application coordonnée est de classe $\mathcal{C}^k$.

Si $\vec{F}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$), on définit :

$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(x,y,z) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial Z}{\partial x}(x,y,z)\right)$, et de même pour les dérivées partielles par rapport à y et z, et pour les dérivées partielles d'ordre supérieur.

On conserve les notations dans la suite du chapitre.

I Divergence d'un champ de classe $\mathcal{C}^1$

Si $\vec{F}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ est un champ de classe $\mathcal{C}^1$, et si $M = (x,y,z) \in \Omega$, on appelle divergence de $\vec{F}$ en M, et on note $\mathrm{Div}_M(\vec{F})$ le réel défini par :

$$\mathrm{Div}_M(\vec{F}) = \frac{\partial X}{\partial x}(M) + \frac{\partial Y}{\partial y}(M) + \frac{\partial Z}{\partial z}(M) \tag{15.1}$$

Et on note aussi $\mathrm{Div}(\vec{F})$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à M associe $\mathrm{Div}_M(\vec{F})$.

II Rotationnel d'un champ de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $\vec{F}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $M = (x,y,z) \in \Omega$.

Le rotationnel de $\vec{F}$ en M, noté $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F})$, est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \mathrm{Div}_M(\vec{F} \wedge \vec{u}) = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F}) \cdot \vec{u}$, $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure euclidienne naturelle.

Cette définition a bien un sens, puisqu'on vérifie immédiatement que l'application $\vec{u} \mapsto \mathrm{Div}_M(\vec{F} \wedge \vec{u})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Expression du rotationnel Posons $\vec{u} = (a,b,c)$.

Alors $(\vec{F} \wedge \vec{u}) = (cY - bZ, aZ - cX, bX - aY)$.

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}_M(\vec{F} \wedge \vec{u}) &= c\frac{\partial Y}{\partial x}(M) - b\frac{\partial Z}{\partial x}(M) + a\frac{\partial Z}{\partial y}(M) - c\frac{\partial X}{\partial y}(M) + b\frac{\partial X}{\partial z}(M) - a\frac{\partial Y}{\partial z}(M) \\ &= a\left[\frac{\partial Z}{\partial y}(M) - \frac{\partial Y}{\partial z}(M)\right] + b\left[\frac{\partial X}{\partial z}(M) - \frac{\partial Z}{\partial x}(M)\right] + c\left[\frac{\partial Y}{\partial x}(M) - \frac{\partial X}{\partial y}(M)\right] \end{aligned} \tag{15.2}$$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}(M) - \frac{\partial Y}{\partial z}(M), \frac{\partial X}{\partial z}(M) - \frac{\partial Z}{\partial x}(M), \frac{\partial Y}{\partial x}(M) - \frac{\partial X}{\partial y}(M)\right)$

On note $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}(\vec{F})$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à M associe $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}_M(\vec{F})$.

III Expressions symboliques

Si on note $\vec{\nabla}$ (Nabla) le « vecteur » $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, on a symboliquement :

$\text{Div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ et $\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$

Et aussi, si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a, toujours symboliquement : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$.

IV Potentiels scalaires

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs sur Ω, et soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel scalaire f, ou encore que f est un potentiel scalaire de $\vec{F}$ lorsque $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

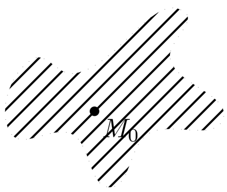
C'est-à-dire : $\forall M \in \Omega, \vec{F}(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Théorème :
Si $\vec{F}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et dérive d'un potentiel, alors le rotationnel de $\vec{F}$ est nul. Autrement dit, si $f\colon \Omega \to \mathcal{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\forall M \in \Omega, \overrightarrow{\text{Rot}}_M(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$

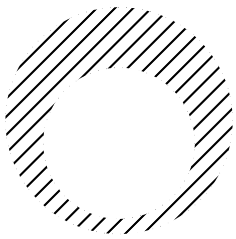
Démonstration :
$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Donc $\overrightarrow{\text{Rot}}_M(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \vec{0}$ d'après le théorème de Schwarz.

Réciproque (admise) sur un ouvert étoilé Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire tel qu'il existe $M_0 \in \Omega$ tel que $\forall M \in \Omega, [M_0, M] \subset \Omega$:



Ouvert étoilé



Pas un ouvert étoilé

Soit $\vec{F}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de classe $\mathcal{C}^1$ dont le rotationnel est nul. Alors $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire.

V Formules

1. Linéarité : les opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, Div et $\overrightarrow{\text{Rot}}$ sont linéaires.
2. Composition :

   Si f est de classe $\mathcal{C}^2$:

   $\overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$, $\text{Div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$ (Laplacien de f)

   Si $\vec{F}$ est de classe $\mathcal{C}^2$: $\text{Div}(\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F}) = 0$ (démonstration avec Schwarz)

3. Produits : démonstrations par simple calcul...

   Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$, $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}g + g\overrightarrow{\text{grad}}f$

   Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\vec{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\text{Div}(f\vec{F}) = f\,\text{Div}(\vec{F}) + (\overrightarrow{\text{grad}}f)\cdot\vec{F} \tag{15.3}$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(f\vec{F}) = f\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{F}) + (\overrightarrow{\text{grad}}f)\wedge\vec{F} \tag{15.4}$$

Symboliquement, les formules donnent :

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f) = \vec{0} \tag{15.5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f \tag{15.6}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) = 0 \tag{15.7}$$

$$\vec{\nabla}(fg) = f(\vec{\nabla}g) + (\vec{\nabla}f)g \tag{15.8}$$

$$(\vec{\nabla}f\vec{F}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) + (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{F} \tag{15.9}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(f\vec{F}) = f(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) + (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{F} \tag{15.10}$$