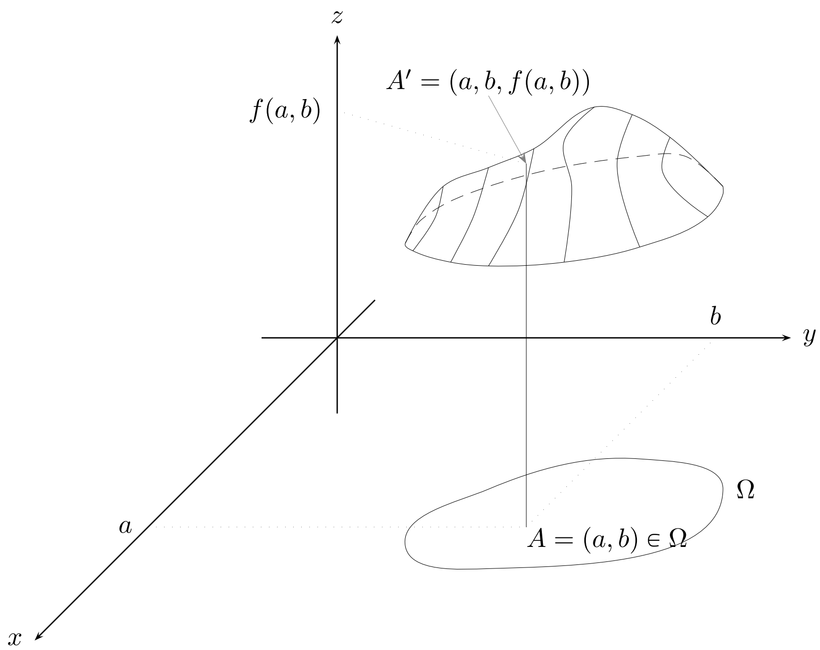
Chapitre 14 : Éléments de calcul différentiel

- On va s'attacher ici au cas des fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. (On peut adapter les résultats à d'autres cas si nécessaire)
- Les éléments de $\mathbb{R}^2$ seront vus parfois comme points ($A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$) ou d'autres fois comme vecteurs ($\vec{u} = (h,k) \in \mathbb{R}^2$)
- $\| \ \|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$.
- Visualisation :

  Si $f\colon \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$, on peut visualiser la situation en se représentant l'ensemble S des $(x,y,f(x,y))\,,(x,y) \in \Omega$, qui est une surface de $\mathbb{R}^3$: c'est la nappe d'équation $z = f(x,y), (x,y) \in \Omega$.



  S est à f ce qu'une courbe est à une fonction d'une variable dans $\mathbb{R}$.

I Dérivées partielles

A) Dérivées (éventuelles) partielles premières par rapport à chaque variable

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, soit $A = (a,b) \in \Omega$.

On pose $\Omega_{A,1} = \{x \in \mathbb{R}, (x,b) \in \Omega\}$, et $\varphi_{A,1}\colon \begin{array}{ccc} \Omega_{A,1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,b) \end{array}$

Si $\varphi_{A,1}$ est dérivable en a, on dit que f admet une dérivée partielle première en A par rapport à la première variable, qui n'est autre que $\varphi'_{A,1}(a)$, qu'on note : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(A) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} D_1(f)(A) \\ D_1(f)(a,b) \end{cases}$.

De même, sous réserve d'existence : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(A) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{cases}$ ou $\begin{cases} D_2(f)(A) \\ D_2(f)(a,b) \end{cases}$ est la dérivée en b de l'application $\varphi_{A,2}\colon y \mapsto f(a,y)$, laquelle application est définie sur $\Omega_{A,2} = \{y \in \mathbb{R}, (a,y) \in \Omega\}$.

Remarque :

Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\Omega_{A,1}$ et $\Omega_{A,2}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\Omega_{A,1}$ est un voisinage de a, $\Omega_{A,2}$ un voisinage de b.

La notion de dérivabilité ne dépendant que de $\varphi_{A,1}$ (ou $\varphi_{A,2}$) au voisinage de a (ou de b), la notion de dérivée partielle de f en A est elle aussi locale.

Exemple :

- $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+xy+y \end{array} \tag{14.1}$$

  Alors f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, et :

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 + y_0 \tag{14.2}$$

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0 + 1 \tag{14.3}$$

- $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \tag{14.4}$$

  Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors, comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert (complémentaire d'un singleton), c'est un voisinage de (x_0,y_0). L'étude des dérivées partielles de f en (x_0,y_0) ne dépend que de f sur ce voisinage, et sur ce voisinage on a $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

  D'où on tire l'existence des dérivées partielles premières, et :

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{y_0(x_0^2+y_0^2) - x_0y_0(2x_0)}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{y_0^3 - y_0x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \tag{14.5}$$

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{x_0^3 - x_0y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \tag{14.6}$$

  Étude en $(0,0)$:

  L'application partielle $x \mapsto f(x,0)$ est nulle, donc dérivable et de dérivée nulle en 0. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

  De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

  Attention, f n'est pas pour autant continue en $(0,0)$.

B) Définitions

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

- Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont définies en tout $(x,y) \in \Omega$, on note :

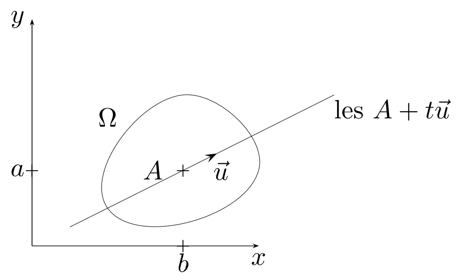
$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}.$$

- Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur Ω, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

C) Dérivées partielles premières selon un vecteur

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Soit $\vec{u} = (h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



Soit $A \in \Omega$, et $D = \{t \in \mathbb{R}, A + t\vec{u} \in \Omega\}$.

Si la fonction $\psi : \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(A+t\vec{u}) \end{array}$ est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée partielle première en A selon le vecteur $\vec{u}$ qui n'est autre que $\psi'(0)$. On la note $D_{A,\vec{u}}(f)$.

Remarque :

- Ici encore, la notion est locale…

- L'éventuelle dérivée partielle première en A selon $\vec{i} = (1,0)$ correspond à l'éventuelle dérivée partielle première en A selon la première variable.

Ainsi, sous réserve d'existence : $D_{A,\vec{i}}(f) = D_1(f)(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)$

Et de même $D_{A,\vec{j}}(f)(A) = D_2(f)(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A)$

En effet, sous réserve d'existence, $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ est la dérivée en a de $x \mapsto f(x,b)$ et $D_{A,\vec{i}}(f)(A)$ la dérivée en 0 de $t \mapsto f((a,b) + t(1,0)) = f(a+t,b)$.

Exemple :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.7}$$

Existe-t-il une dérivée partielle première en $(0,0)$ selon le vecteur $\vec{u} = (1,1)$?

$f(O + t\vec{u}) = f(t,t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, donc f n'est pas dérivable selon $\vec{u}$.

II Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

A) Le théorème

Théorème :
Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $A = (a,b) \in \Omega$.

Alors il existe une fonction ε, définie sur l'ensemble $V = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 A + \vec{u} \in \Omega\right\}$ telle que ε tend vers 0 en $(0,0)$ et pour tout $\vec{u} \in V$, $f(A+\vec{u}) = f(A) + h\frac{\partial f}{\partial x}(A) + k\frac{\partial f}{\partial y}(A) + \|\vec{u}\|\varepsilon(\vec{u})$, où on a noté $\vec{u} = (h,k)$. Cette expression s'appelle le DL de f à l'ordre 1 en A.

Ou encore : $\forall (h,k) \in V, f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$ où $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$.

Démonstration (hors programme) :
On pose, pour tout $\vec{u} \in V$, $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\left(f(A+\vec{u}) - f(A) - h\frac{\partial f}{\partial x}(A) - k\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$, et $\varepsilon(\vec{u}) = 0$ sinon.

Alors ε vérifie bien l'expression ; reste à montrer que ε tend vers 0 en $(0,0)$.

Comme Ω est ouvert, il existe $\mu > 0$ tel que $B_\infty(A,\mu) \subset \Omega$, où on a noté $B_\infty(\ ,\ )$ une boule ouverte pour $\|\ \|_\infty$. Posons $W = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2, A + \vec{u} \in B_\infty(A,\mu)\right\}$. (Alors déjà $W \subset V$)

Alors pour tout $\vec{u} = (h,k)$ de W et tout $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,1]$, $A + (th,\theta k) \in B_\infty(A,\mu)$.

En effet, soit $\vec{u} = (h,k) \in W$, et soit $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,1]$.

Alors $\|(th,\theta k)\|_\infty = \max(|th|,|\theta k|) = \max(t|h|,\theta|k|) \leqslant \max(|h|,|k|) = \|\vec{u}\|_\infty$.

Or, $\vec{u} \in W$. Donc, si on note $B = A + \vec{u}$, on a $\|\overrightarrow{AB}\|_\infty < \mu$. Donc $\|(th,\theta k)\|_\infty \leqslant \|\overrightarrow{AB}\| < \mu$.

Donc $A + (th,\theta k) \in B_\infty(A,\mu)$.

Maintenant :

Soit $\vec{u} \in W$, on note $\vec{u} = (h,k)$:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) + f(a+h,b) - f(a,b) \tag{14.8}$$

($(a+h,b)$ est bien dans Ω, comme on vient de le voir, avec $(t,\theta) = (1,0)$)

On note $\psi\colon y \mapsto f(a+h,y)$ (donc ψ est une fonction réelle d'une variable réelle, c'est la deuxième application partielle associée à f en $(a+h,b+k)$), définie et dérivable sur $[b,b+k]$.

Selon le théorème des accroissements finis appliqué à ψ entre b et $b+k$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $\psi(b+k) - \psi(b) = k\psi'(b+\theta k)$, c'est-à-dire :

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) = k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta k) \tag{14.9}$$

De même, il existe $t \in]0,1[$ tel que $f(a+h,b) - f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b)$

Donc :

$$\forall \vec{u} \in W, \exists (t,\theta) \in]0,1[^2, f(a+h,b+k) - f(a,b) = k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta k) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b) \tag{14.10}$$

Or, $k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta k) = k(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \alpha(h,k))$ où $\lim_{(0,0)} \alpha = 0$ car $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$, et de même, $h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th,b) = h(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \beta(h,k))$ où $\lim_{(0,0)} \beta = 0$.

Donc $f(a+h,b+k) = f(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h\beta(h,k) + k\alpha(h,k)$

Et pour tout $\vec{u} = (h, k) \in W \setminus \{(0,0)\}$:

$$\varepsilon(h,k) = \frac{h\beta(h,k) + k\alpha(h,k)}{\|(h,k)\|_\infty} = \underbrace{\frac{h}{\max(|h|,|k|)}}_{\in[-1,1]}\beta(h,k) + \underbrace{\frac{k}{\max(|h|,|k|)}}_{\in[-1,1]}\alpha(h,k) \xrightarrow[(0,0)]{} 0 \tag{14.11}$$

Donc ε tend vers 0 en $(0,0)$, d'où le résultat.

B) Conséquences

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors elle est continue sur Ω.

   En effet, pour tout $A = (a,b) \in \Omega$, on a :

   $$\forall (h,k) \in V, f(a+h, b+k) = f(a,b) + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)}_{\to 0} \tag{14.12}$$

   Donc $f(a+h, b+k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} f(a,b)$, donc f est continue en A.

2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $A \in \Omega$, $D_{A,\vec{u}}(f)$ est définie, et l'application $A \mapsto D_{A,\vec{u}}(f)$ est continue.

   En effet :

   Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors, pour tout $A = (a,b) \in \Omega$, on a :

   $$\forall (h,k) \in V, f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k) \tag{14.13}$$

   Soit alors $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + t\vec{u} \in \Omega$, c'est-à-dire tel que $t\vec{u} \in V$, on a :

   $$f(A + t\vec{u}) = f(A) + t\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(A) + t\beta\frac{\partial f}{\partial y}(A) + |t|\|\vec{u}\|\varepsilon(t\vec{u}) \tag{14.14}$$

   Donc $t \mapsto f(A + t\vec{u})$ est dérivable en 0, de dérivée $\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(A) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(A)$

   (puisque $\frac{f(A+t\vec{u}) - f(A)}{t-0} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(A) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(A) + \underbrace{\frac{|t|}{t}\|\vec{u}\|\varepsilon(t\vec{u})}_{\to 0}$)

C) Divers

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

On vient de voir que pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $A \in \Omega$, $D_{A,\vec{u}}(f)$ existe et vaut $\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(A) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ lorsque $\vec{u} = (\alpha, \beta)$.

Pour A fixé dans Ω, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} = (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, on la note $\mathrm{d}f_A$, différentielle de f en A. Ainsi, $\mathrm{d}f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

On introduit alors le vecteur $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ tel que cette forme linéaire soit $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{n}$ (pour $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne naturelle)

Ce vecteur est appelé $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_A f$, gradient de f en A.

Ainsi : $\forall \vec{u} = (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f_A(\vec{u}) = h\frac{\partial f}{\partial x}(A) + k\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \underbrace{D_{A,\vec{u}}(f)}_{\text{si } \vec{u} \neq (0,0)} = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}_A f) \cdot \vec{u}$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_A f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$.

On note $\mathrm{d}f_A = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\,\mathrm{d}y$.

C'est-à-dire que $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont les formes linéaires $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto & h\end{array}$ et $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto & k\end{array}$.

On peut considérer l'application $\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & \mathrm{d}f_A\end{array}$.

Cette application est notée $\mathrm{d}f$, et s'appelle la différentielle de f.

Ainsi, $\mathrm{d}f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))$, et on peut noter $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$.

Récapitulatif $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \in \mathscr{F}(\Omega, \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))$, différentielle de f.

$\mathrm{d}f_A = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\,\mathrm{d}y \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, différentielle de f en A.

$$\mathrm{d}f_A(\vec{u}) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)h + \frac{\partial f}{\partial y}(A)k \in \mathbb{R} \tag{14.15}$$

Le DL à l'ordre 1 en A s'écrit alors :

$$f(A+\vec{u}) = f(A) + \underbrace{\mathrm{d}f_A(\vec{u})}_{(\overrightarrow{\mathrm{grad}}_A f)\cdot\vec{u}} + \|\vec{u}\|\varepsilon(\vec{u}) \qquad \text{où } \varepsilon(\vec{u}) \xrightarrow[\vec{u}\to(0,0)]{} 0 \tag{14.16}$$

Ainsi, $\mathrm{d}f_A(\vec{u})$ est une approximation linéaire de la différence $f(A+\vec{u}) - f(A)$

III Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

A) Sommes, produits...

Proposition :

Soient $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors les fonctions $\lambda f, f+g$, fg sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et : $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}$. Idem pour $\frac{\partial}{\partial y}$.

Démonstration :

Immédiat

Par exemple, pour fg :

Soit $(x_0,y_0) \in \Omega$. Les fonctions $\begin{cases} x \mapsto f(x,y_0) \\ x \mapsto g(x,y_0)\end{cases}$ sont dérivables en x_0, de dérivées $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\end{cases}$. Donc $x \mapsto f(x,y_0)\times g(x,y_0)$ est dérivable en x_0, et sa dérivée en x_0 est :

$$f(x_0,y_0) \times \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) + g(x_0,y_0) \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{14.17}$$

Donc $\frac{\partial(fg)}{\partial x}$ est définie en tout point (x_0,y_0) de Ω, et $\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}$.

Or, f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, g et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont continues, donc $\frac{\partial(fg)}{\partial x}$ est continue sur Ω.

De même pour $\frac{\partial(fg)}{\partial y}$, donc fg est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition :

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit D un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soient u, v deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que $\forall t \in D, (u(t), v(t)) \in \Omega$.

Alors la fonction $F\colon \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(u(t), v(t)) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\forall t \in D, F'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) \tag{14.18}$$

Démonstration :

Soit $t_0 \in D$. On étudie $\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}$ pour $h \neq 0$ tel que $t_0 + h \in D$. On a :

$$\begin{aligned} F(t_0+h) - F(t_0) &= f(u(t_0+h), v(t_0+h)) - f(u(t_0), v(t_0)) \\ &= \underbrace{(u(t_0+h) - u(t_0))}_{H}\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) \\ &\quad + \underbrace{(v(t_0+h) - v(t_0))}_{K}\frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0)) + \|(H,K)\|\varepsilon(H,K) \text{ où } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0 \\ &= (hu'(t_0) + h\alpha(h))\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) + (hv'(t_0) \\ &\quad + h\beta(h))\frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0)) + \|(H,K)\|\varepsilon(H,K) \end{aligned} \tag{14.19}$$

Où $\alpha, \beta \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} &= (u'(t_0) + \alpha(h))\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) + (v'(t_0) + \beta(h))\frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0)) \\ &\quad + \underbrace{\frac{|h|}{h}\underbrace{\|(u'(t_0) + \alpha(h), v'(t_0) + \beta(h))\|}_{\to(u'(t_0),v'(t_0))}}_{\text{borné}}\varepsilon(H,K) \end{aligned} \tag{14.20}$$

Et $\varepsilon(H,K) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

car $H = u(t_0+h) - u(t_0) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $K = v(t_0+h) - v(t_0) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et d'après le théorème de composition de limites.

Donc F est dérivable en t_0, et on a bien la formule voulue, qui montre en plus que F' est continue (car u, v, u', v', $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont...), donc que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soient u, v deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & f(X,Y \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que $\forall (x,y) \in U, (u(x,y), v(x,y)) \in \Omega$.

On peut donc considérer $F\colon \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(u(x,y), v(x,y)) \end{array}$.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et, pour tout $(x,y) \in U$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial X}(u(x,y), v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial Y}(u(x,y), v(x,y)) \tag{14.21}$$

De même, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial X}(u(x,y), v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial Y}(u(x,y), v(x,y))$.

Démonstration :

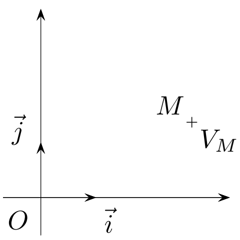
Soit $(x_0, y_0) \in D$. Alors $x \mapsto F(x, y_0)$, c'est-à-dire $x \mapsto f(u(x, y_0), v(x, y_0))$, est du type traité dans la proposition précédente.

Cette fonction est donc dérivable en x_0, de dérivée :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial X}(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial Y}(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) \tag{14.22}$$

D'où la première formule, et de même la deuxième et ainsi la classe de F.

Exemple (Gradient en coordonnées polaires) :



On peut introduire la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ est la valeur (en Volt) du potentiel au point M de coordonnées cartésiennes (x, y).

On peut aussi introduire $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $F(\rho, \theta)$ est la valeur (en Volts) du potentiel au point M de coordonnées polaires (ρ, θ).

Ainsi, pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

On a $\overrightarrow{\text{grad}}_M V = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}$ où $M(x, y)$.

On a, pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) & (14.23a) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) & (14.23b) \end{cases}$$

Donc :

$$\rho\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) \qquad (\rho\cos\theta\ (14.23a) - \sin\theta\ (14.23b)) \tag{14.24}$$

Et

$$\rho\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \cos\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) \qquad (\rho\sin\theta\ (14.23a) - \cos\theta\ (14.23b)) \tag{14.25}$$

Pour $M \neq O$, de coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}_M V &= \left[\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta)\right]\vec{i} + \left[\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta)\right]\vec{j} \\ &= \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta)\vec{u}(\theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta)\vec{v}(\theta) \end{aligned} \tag{14.26}$$

Avec $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$, $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\frac{\pi}{2} - \theta)$.

IV Généralisations

On a vu le cas des $\begin{cases} f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$

On peut aisément adapter au cas $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, et même plus généralement à $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

On a vu aussi le cas des $\begin{array}{rccl} f\colon & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & (f_1(t), f_2(t) \dots f_n(t)) \end{array}$, où « tout va bien » composantes par composantes (sauf pour le théorème des accroissements finis, et donc la démonstration du théorème pour les développements limités – qui est quand même vrai, mais admis pour l'instant)

On peut donc parler des fonctions $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ où « tout va bien » sur les composantes de l'arrivée.

Cas particulier :
Champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$:

C'est une fonction $\begin{array}{rccl} F\colon & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)) \end{array}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si X, Y, Z le sont, et :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial Z}{\partial x}(x,y,z) \right) \tag{14.27}$$

On a alors le théorème : Toute composée bien définie de fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et formules à adapter…

Exemple :
Si $G(r,\theta,z) = F(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, alors :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial r}(r,\theta,z) = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + \sin\theta \frac{\partial F}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + 0 \times \frac{\partial F}{\partial z}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \\ &\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z) = -r\sin\theta \frac{\partial F}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + r\cos\theta \frac{\partial F}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \\ &\frac{\partial G}{\partial z}(r,\theta,z) = \frac{\partial F}{\partial z}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{aligned} \tag{14.28}$$

De même, si $H(r,\theta,\varphi) = F(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r}(r,\theta,\varphi) &= \sin\theta\cos\varphi \frac{\partial F}{\partial x}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ &\quad + \sin\theta\sin\varphi \frac{\partial F}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ &\quad + \cos\theta \frac{\partial F}{\partial z}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ \frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) &= r\cos\theta\cos\varphi \frac{\partial F}{\partial x}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ &\quad + r\cos\theta\sin\varphi \frac{\partial F}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ &\quad - r\sin\theta \frac{\partial F}{\partial z}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) &= -r\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial F}{\partial x}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ &\quad + r\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial F}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \end{aligned} \tag{14.29}$$

V Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition :

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.

- Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie au voisinage de (x_0, y_0), et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est dérivable par rapport à x ($1^{\text{ère}}$ variable) en ce point, la dérivée $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x_0, y_0)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0, y_0)$.
- De même, sous réserve d'existence, $\frac{\partial^2 f}{(\partial y)(\partial x)}(x_0, y_0) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x_0, y_0)$,
- Et $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)(\partial y)}(x_0, y_0) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x_0, y_0)$
- Et $\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Généralisation récurrente Soit $p \geqslant 2$.

Sous réserve d'existence, les dérivées p-ièmes de f en (x_0, y_0) sont les deux dérivées premières de chacune des dérivées $(p-1)$-ièmes de f en (x_0, y_0).

Définition :

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Si les quatre dérivées partielles secondes de f sont définies et continues sur Ω, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Plus généralement, si les 2^k dérivées partielles d'ordre k sont définies et continues sur Ω, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition :

Pour $k \geqslant 1$, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ (où $\mathcal{C}^0$ signifie « f est continue »)

En effet : Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors les dérivées partielles $(k-1)$-ièmes de f ont leurs dérivées partielles premières continues (puisque ce sont les dérivées partielles k-ièmes de f), et sont donc de classe $\mathcal{C}^1$. Donc ces dérivées partielles $(k-1)$-ièmes sont continues, donc f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Théorème (Théorème de Schwarz – admis) :

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, alors $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)(\partial y)} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)(\partial x)}$.
- Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω, alors les dérivées partielles d'ordre k ne dépendent que du nombre de dérivations par rapport à chaque variable.

On peut élargir aisément les définitions aux fonctions de Ω, ouvert de $\mathbb{R}^p$, dans $\mathbb{R}^n$, où le théorème de Schwarz reste encore vrai.

Et de plus les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sont toujours valables...

Remarque :

On n'a besoin que de la composition :

Par exemple, si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$F\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), g(x,y)) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $S\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $S \circ F$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a $S \circ F = f + g$.

VI Extremums

Théorème :

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $A = (a, b) \in \Omega$.

Si f présente un extremum (local) en A, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

La réciproque reste ici encore fausse (exemple : configuration en col, ou $(x, y) \mapsto xy$)

Démonstration :

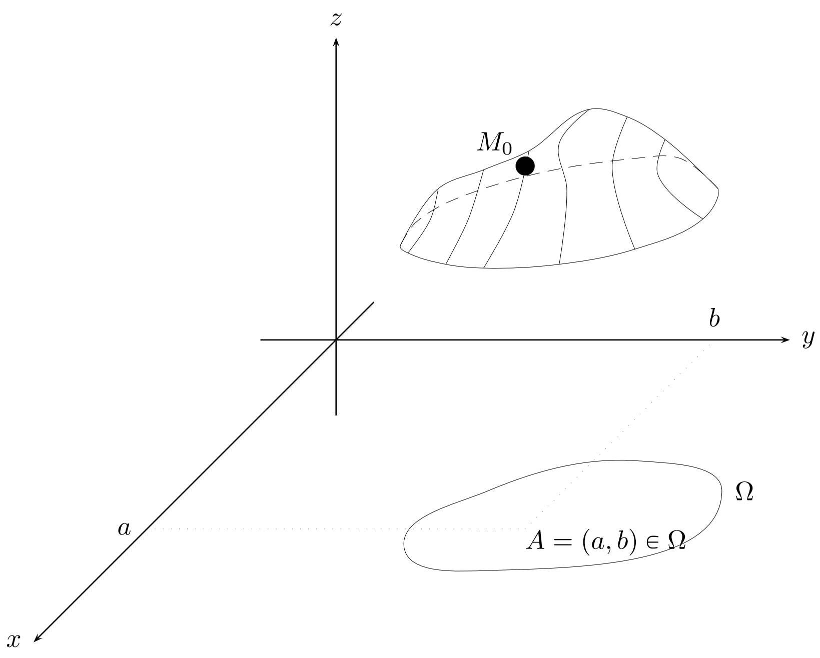
Supposons que f présente un maximum local en A. Il existe alors un voisinage V de A contenu dans Ω (prendre au pire $\Omega \cap V$) tel que $\forall \underbrace{M}_{(x,y)} \in V, \underbrace{f(M)}_{f(x,y)} \leqslant \underbrace{f(A)}_{f(a,b)}$.

On introduit $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset V$.

Alors $x \mapsto f(x, b)$ présente un maximum local en a, et est dérivable sur $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. La dérivée de cette fonction est donc nulle en a, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$.

Et, de même, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

VII Notion de plan tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$



Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, notons S la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Soit $A = (a, b) \in \Omega$, $M_0 = (a, b, f(a, b)) \in S$.

On sait que, pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a :

$$f(x, y) = f(a, b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \|(x-a, y-b)\|\varepsilon(x-a, y-b) \qquad (14.30)$$

où $\varepsilon \xrightarrow[(a,b)]{} 0$.

Par définition, le plan tangent en M_0 à S est le plan d'équation :

$$z = f(a, b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \qquad (14.31)$$

C'est le plan qui approxime le mieux la surface au voisinage du point considéré.

Considérons les deux courbes C_1 et C_2 tracées sur S de la manière suivante : $C_1 = \{(x, b, f(x, b)), x \in \Omega_{A,1}\}$ et $C_2 = \{(a, y, f(a, y)), y \in \Omega_{A,2}\}$

Où $\Omega_{A,1} = \{x \in \mathbb{R}, (x, b) \in \Omega\}$ et $\Omega_{A,2} = \{y \in \mathbb{R}, (a, y) \in \Omega\}$.

C_1 est naturellement paramétrée par $M \left| \begin{array}{c} x = t \\ y = b \\ z = f(t, b) \end{array} \right.$.

Vitesse : $\vec{v}_1(t) \left| \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \frac{\partial f}{\partial x}(t, b) \end{array} \right.$. Et, au point considéré, $\vec{v}_1(a) \left| \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \end{array} \right.$.

De même, sur C_2, $\vec{v}_2(b) \left| \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{array} \right.$

Alors $(\vec{v}_1(a), \vec{v}_2(b))$ forme une base de la direction du plan tangent en M_0, c'est-à-dire du plan vectoriel d'équation $z = x\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + y\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

VIII Courbes de $\mathbb{R}^2$.

On se place ici dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

A) Diverses situations

- En coordonnées cartésiennes :
  1a. $y = f(x)$ (résolue en y)
  2a. $x = f(y)$ (résolue en x)
  3a. $F(x, y) = 0$ où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (non résolue)
  4a. Paramétrique : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in \dots$
- En coordonnées polaires :
  1b. $\rho = f(\theta)$
  2b. $\theta = f(\rho)$
  3b. $F(\rho, \theta) = 0$
  4b. Paramétrique : $\begin{cases} \rho = r(t) \\ \theta = \alpha(t) \end{cases}, t \in \dots$
- Passage d'une situation à une autre :
  - Passage de 1a. à 3a. / 2a. à 3a. : évident. (idem avec b)
  - Passage de 1a. à 4a. / 2a. à 4a. : évident. (idem avec b)
  - Passage de 4b. à 4a. : $\begin{cases} x = r(t)\cos(\alpha(t)) \\ y = r(t)\sin(\alpha(t)) \end{cases}$
  - Pour le passage de 3a. à 1a. ou 2a., on n'a pas de méthode systématique, mais on a un théorème.

B) Théorème des fonctions implicites

Théorème (admis) :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$.

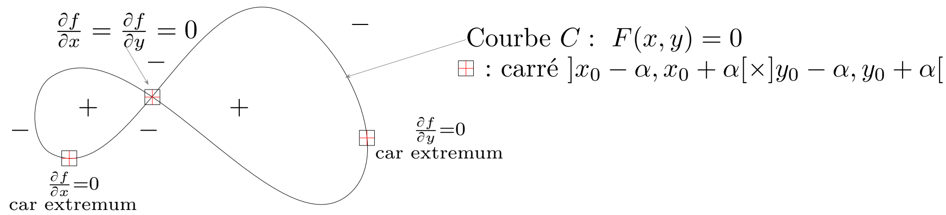
On suppose qu'il existe $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $F(x_0, y_0) = 0$.

Si $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors l'équation $F(x,y) = 0$ définit localement y comme fonction de x, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, il existe un unique $y \in]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$ tel que $F(x,y) = 0$.

Et de plus, si on note $\varphi\colon \begin{array}{ccc}]x_0-\alpha, x_0+\alpha[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \substack{\text{l'unique } y \in]y_0-\alpha, y_0+\alpha[\\ \text{tel que } F(x,y)=0} \end{array}$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0, et $\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$.

On adapte le théorème pour $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$

Visualisation



Justification que $\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$:

On a, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$, $F(x, \varphi(x)) = 0$

Donc, en dérivant : $1\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \underbrace{\varphi(x_0)}_{y_0}) + \varphi'(x_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \underbrace{\varphi(x_0)}_{y_0}) = 0$.

Application :

Tangente à C : $F(x,y) = 0$ en un point (x_0, y_0) où $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont non tous deux nuls. Supposons par exemple $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Ainsi, localement, la courbe se résout en $C\colon y = \varphi(x) \to$.

La tangente en (x_0, y_0) a alors pour équation $(y - y_0) = (x - x_0)\varphi'(x_0)$

C'est-à-dire $(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

Ainsi, si $\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)}F \neq \vec{0}$, alors la tangente à C en (x_0, y_0) existe et est orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)}F$.

C) Passage local de représentation paramétrique à résolu en x ou y

Proposition :
Soit C le support d'un arc paramétré $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}$, $t \in I$ où α, β sont de classe $\mathcal{C}^1$ au moins, et on suppose l'arc régulier (c'est-à-dire que $\vec{v}(t) \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}$ ne s'annule pas)

Soit $t_0 \in I$ (qu'on suppose ouvert). Si par exemple $\alpha'(t_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage V_0 de t_0 tel que le support de l'arc paramétré restreint à V_0, c'est-à-dire l'arc $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, t \in V_0$, admette une équation du type $y = f(x)$.

Démonstration :

α est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\alpha'(t_0) \neq 0$. Il existe donc un voisinage $V =]t_0-\lambda, t_0+\lambda[$ de t_0 tel que $\forall t \in V, \alpha'(t) \neq 0$. Donc α est strictement monotone, et réalise donc une bijection sur un intervalle W dont la réciproque est de même classe que α. Donc l'arc restreint à V admet le paramétrage $\begin{cases} x = \alpha(\alpha^{-1}(u)) \\ y = \beta(\alpha^{-1}(u)) \end{cases}, u \in W$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = u \\ y = f(u) \end{cases}, u \in W$ où $f = \beta \circ \alpha^{-1}$.

D) De paramétré en cartésiennes à paramétré en polaires

Soit C : $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, t \in I$ où α, β sont de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$

On suppose que C ne passe pas par O.

Alors C admet une représentation paramétrique en coordonnées polaires du type $\begin{cases} \rho = r(t) \\ \theta = \lambda(t) \end{cases}, t \in I$, r et λ étant de classe $\mathcal{C}^k$.

En effet, pour tout $t \in I$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j} = \underbrace{\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}}_{r(t)} \underbrace{\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}}\vec{i} + \frac{\beta(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}}\vec{j}\right)}_{\substack{=\cos(\lambda(t))\vec{i}+\sin(\lambda(t))\vec{j} \text{ où } \lambda \text{ est de} \\ \text{classe } \mathcal{C}^k \text{ selon le théorème de relèvement}}} \tag{14.32}$$

(C'est possible car $(\alpha(t), \beta(t)) \neq (0,0)$)

IX Surfaces de $\mathbb{R}^3$

A) Diverses représentations (en coordonnées cartésiennes)

- Équations du type $z = f(x,y)$, $y = f(x,z)$ ou $x = f(y,z)$ (résolues)
- Équations non résolues : $F(x,y,z) = 0$
  Exemple :
  - Plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$
  - Sphère $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$
- Paramétrage de surface :
  $\begin{cases} x = \alpha(t,s) \\ y = \beta(t,s) \\ z = \gamma(t,s) \end{cases}$, (t,s) décrivant un domaine D de $\mathbb{R}^2$, α, β, γ de classe $\mathcal{C}^k, k \geqslant 1$ avec $\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \\ \frac{\partial \beta}{\partial s} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{pmatrix}$ indépendants (sinon on n'obtient pas une surface)

B) Passage local de représentation $F(x,y,z)=0$ à une équation résolue

(Et donc passage ensuite à une représentation paramétrique)

Théorème (Théorème des fonctions implicites) :
Soit F de classe $\mathcal{C}^k, k \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}^3$. Soit $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ tel que $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Si $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\neq 0$, alors, au voisinage de M_0, l'équation $F(x,y,z)=0$ définit z comme fonction de x et y, cette fonction φ est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \tag{14.33}$$

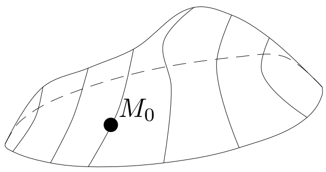
(Même justification pour les dérivées que pour $\mathbb{R}^2$)

C) Plan tangent à une surface

- Soit S : $\begin{cases} x=\alpha(t,s) \\ y=\beta(t,s) \\ z=\gamma(t,s) \end{cases}$, $\quad (t,s)\in\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.

  La fonction $\vec{P}: \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v)) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k\geqslant 1$ et $\frac{\partial \vec{P}}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial v}(u,v)$ sont indépendants.

  Soit $M_0 \in S$ de paramètre (u_0,v_0).



Courbes tracées sur S passant par M_0 : C_1 : $\begin{cases} x=\alpha(u,v_0) \\ y=\beta(u,v_0) \\ z=\gamma(u,v_0) \end{cases}$, $u\in\Omega_{M_0,1}$ passe par le point M_0 au paramètre $u=u_0$.

C_2 : $\begin{cases} x=\alpha(u_0,v) \\ y=\beta(u_0,v) \\ z=\gamma(u_0,v) \end{cases}$, $v\in\Omega_{M_0,2}$ passe par M_0 au point de paramètre $v=v_0$.

Les deux vecteurs $\vec{v}_1(u_0)\left|\begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial \beta}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0,v_0) \end{array}\right.$ et $\vec{v}_2(v_0)\left|\begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial \beta}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0,v_0) \end{array}\right.$ sont donc indépendants. Le plan tangent à S en M_0 est le plan passant par M_0 et de direction $(\vec{v}_1(u_0),\vec{v}_2(v_0))$ (et de vecteur normal $\vec{v}_1(u_0)\wedge\vec{v}_2(v_0)$, c'est-à-dire $\frac{\partial \vec{P}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\frac{\partial \vec{P}}{\partial v}(u_0,v_0)$)

Remarque :
Les autres courbes tracées sur la surface sont les courbes de la forme C : $\begin{cases} x=\alpha(u(t),v(t)) \\ y=\beta(u(t),v(t)) \\ z=\gamma(u(t),v(t)) \end{cases}$, où

$u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe suffisante.

$$\vec{v}(t) \begin{vmatrix} u'(t)\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ u'(t)\frac{\partial\beta}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial\beta}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ u'(t)\frac{\partial\gamma}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial\gamma}{\partial v}(u(t), v(t)) \end{vmatrix} \tag{14.34}$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, on suppose que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Ainsi, $\vec{v}(t_0) = u'(t_0)\vec{v}_1(u_0) + v'(t_0)\vec{v}_2(v_0)$, donc $\vec{v}(t_0)$ est dans la direction du plan tangent à M_0.

- Cas où $S :\ F(x, y, z) = 0$.

  Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. On suppose que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_0} F \neq \vec{0}$, c'est-à-dire que l'une des dérivées partielles n'est pas nulle.

  Donc selon le théorème des fonctions implicites, on a localement une paramétrisation de S : $\begin{cases} x = \alpha(u, v) \\ y = \beta(u, v) \\ z = \gamma(u, v) \end{cases}$, passant en M_0, disons au point de paramètre (u_0, v_0).

  On a donc un plan tangent de direction $\mathrm{Vect}\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ où $\vec{v}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\beta}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\beta}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$.

  Or, on a $F(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) = 0$. Donc

$$\begin{split} \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v)\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) + \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v)\frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) \\ + \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v)\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) = 0 \end{split} \tag{14.35}$$

  Et

$$\begin{split} \frac{\partial\alpha}{\partial v}(u, v)\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) + \frac{\partial\alpha}{\partial v}(u, v)\frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) \\ + \frac{\partial\alpha}{\partial v}(u, v)\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) = 0 \end{split} \tag{14.36}$$

  Donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_0} F$, et sont indépendants.

  Ainsi, le plan tangent à S en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan passant par M_0 orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_0} F$, c'est-à-dire d'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0 \tag{14.37}$$

  Ou encore $\mathrm{d}F_{M_0}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$.

  Ainsi, par exemple :

  Si $S :\ 2x^2 + 5z^2 + 3y^2 - 3 = 0$, et si $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un point de S.

  Équation du plan tangent à S en M_0 :

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 3 \tag{14.38}$$

$$\mathrm{d}F_{(x,y,z)} = 6x\,\mathrm{d}x + 6y\,\mathrm{d}y + 10z\,\mathrm{d}z \tag{14.39}$$

  (On vérifie en effet immédiatement que l'application $F \mapsto \mathrm{d}F$ est linéaire)

  L'équation du plan tangent est donc $5x_0(x - x_0) + 6y_0(y - y_0) + 10z_0(z - z_0) = 0$.