Chapitre 13 : Espace $\mathbb{R}^n$ Limite et continuité des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls.

I Normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Pour ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$-ev.

A) Norme (rappels)

Définition :

Une norme sur E, c'est une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall x \in E, (N(x) = 0 \implies x = 0) \tag{13.1}$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \tag{13.2}$$

$$\forall x, y \in E, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \tag{13.3}$$

Il résulte aisément des propriétés (13.1), (13.2), (13.3) que si N est une norme sur E, on a :

$$\forall x \in E, (N(x) = 0 \iff x = 0) \tag{13.4}$$

$$\forall x \in E, N(-x) = N(x) \tag{13.5}$$

$$\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) \leqslant N(x) + N(y) \tag{13.6}$$

$$\forall x_1, x_2, \dots x_n \in E, N(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leqslant N(x_1) + N(x_2) + \dots + N(x_n) \tag{13.7}$$

Notation :

Une norme quelconque sur E est souvent notée $\| \ \|$.

B) Distance associée à une norme

On suppose que E est muni d'une norme notée $\| \ \|$. Pour tous x, y de E, on pose :

$$d(x, y) = \|y - x\| \tag{13.8}$$

Alors d est une distance sur E, c'est-à-dire que d est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y \tag{13.9}$$

$$\forall x, y \in E, d(y, x) = d(x, y) \tag{13.10}$$

$$\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \tag{13.11}$$

On dit que d est la distance associée à la norme $\| \ \|$.

C) Exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$.

Pour chaque x de $\mathbb{R}^n$, on notera $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$.

- L'application $\| \ \|_2$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$: c'est la norme naturelle.
- L'application $\| \ \|_\infty$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$ est aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$.

  En effet, $\| \ \|_\infty$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, les propriétés (13.1) et (13.2) sont évidentes, et pour le (13.3) :

  Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$.

  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, d'où $\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

D) Partie bornée, fonction bornée

Soit $\| \ \|$ une norme sur E.

- Étant donnée une partie A de E, on dit que A est bornée pour la norme $\| \ \|$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout x de A, on a $\|x\| \leqslant M$.
- Étant donnée une fonction f à valeurs dans E et définie sur un ensemble quelconque D, on dit que f est bornée pour la norme $\| \ \|$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout x de D, on a $\|f(x)\| \leqslant M$, autrement dit lorsque $\operatorname{Im} f$ est une partie bornée de E pour la norme $\| \ \|$.

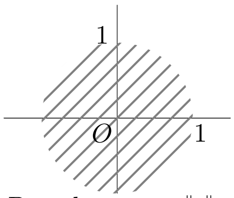
E) Boules

Soit $\| \ \|$ une norme sur E.

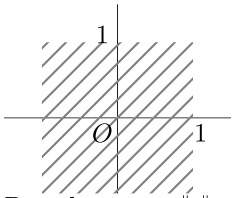
Définition :
Pour tout $A \in E$, et tout $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme $\| \ \|$ la partie $B(a, r)$ définie par $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$.
Et on appelle boule fermée de centre a et de rayon r pour la norme $\| \ \|$ la partie $\bar{B}(a, r)$ définie par $\bar{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leqslant r\}$.

Remarque :
Si $r = 0$, $B(a, r)$ est vide et $\bar{B}(a, r)$ est réduit à $\{a\}$ mais si $r > 0$, $B(a, r)$ n'est pas vide (contient par exemple a)

Exemple :
Des boules de centre O et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$



Pour la norme $\| \ \|_2$



Pour la norme $\| \ \|_\infty$

F) Normes équivalentes

Définition :

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, N_1(x) \leqslant aN_2(x)$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, N_2(x) \leqslant bN_1(x)$.

Il est évident que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sont équivalentes.

En effet, pour chaque $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a, en posant $|x_p| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$:
$\sqrt{x_p^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leqslant \sqrt{nx_p^2}$, c'est-à-dire $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

En fait, sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes, ce qui résulte du théorème :

Théorème (admis) :

Dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Proposition :

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, et soit A une partie de E. Alors A est bornée pour N_1 si et seulement si A est bornée pour N_2. (Immédiat)

Par conséquent, dans $\mathbb{R}^n$, le caractère borné est indépendant du choix de la norme.

Proposition :

Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, alors toute boule ouverte non vide pour N_1 contient une boule ouverte non vide et de même centre pour N_2, et vice-versa.

Démonstration :

Notons $B_1(\, , \,)$ les boules ouvertes pour N_1 et $B_2(\, , \,)$ les boules ouvertes pour N_2.

Soit $\alpha_1 > 0$ tel que $\forall x \in E, N_1(x) \leqslant \alpha_1 N_2(x)$

Alors, pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, on a $B_2(a, \frac{r}{\alpha_1}) \subset B_1(a, r)$

(car si $N_2(x-a) < \frac{r}{\alpha_1}$, alors $N_1(x-a) < r$).

Et on peut refaire la même chose en échangeant 1 et 2.

II Éléments de topologie de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\| \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Toutes les boules considérées sont pour cette norme.

A) Voisinages d'un point de $\mathbb{R}^n$.

Soit a un élément de R^n.

On appelle voisinage de a (dans $\mathbb{R}^n$) toute partie U de $\mathbb{R}^n$ qui contient une boule ouverte non vide de centre a.

D'après l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, cette définition est indépendante du choix de la norme.

Proposition :

- Toute partie de $\mathbb{R}^n$ qui contient un voisinage de a est un voisinage de a (stabilité par extension)
- Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a (stabilité par intersection finie)
- Étant donnés deux éléments distincts a et a' de $\mathbb{R}^n$, on peut toujours trouver un voisinage de a et un voisinage de a' qui ne se rencontrent pas (séparation des voisinages)

Démonstration :

- Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage V de a.

  Comme V est un voisinage de a, il contient une boule ouverte non vide de centre a, par exemple $B(a,\varepsilon)$. Alors $B(a,\varepsilon) \subset V \subset D$, donc D contient une boule ouverte non vide de centre a (à savoir $B(a,\varepsilon)$), donc est un voisinage de a.
- Soit $(V_i)_{i\in K}$ une famille de voisinages de a, indexée par K fini.

  Notons $V = \bigcap_{i\in K} V_i$.

  Pour tout $i \in K$, soit ε_i tel que $B(a,\varepsilon_i) \subset V_i$ (il en existe car V_i est un voisinage de a). Alors, pour $\varepsilon = \min_{i\in K} \varepsilon_i$, on a $\forall i \in K, B(a,\varepsilon) \subset B(a,\varepsilon_i) \subset V_i$. (En effet, pour tout $i \in K$, si $x \in B(a,\varepsilon)$, alors $\|x-a\| < \varepsilon$, donc $\|x-a\| < \varepsilon \leqslant \varepsilon_i$, soit $x \in B(a,\varepsilon_i)$)

  Donc $B(a,\varepsilon) \subset \bigcap_{i\in K} V_i$. Donc $B(a,\varepsilon) \subset V$, donc V est un voisinage de a.
- Soient a, a' deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n$.

  Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{\|a-a'\|}{2}$.

  Alors $B(a,\varepsilon) \cap B(a',\varepsilon) = \varnothing$.

  En effet, supposons que $B(a,\varepsilon) \cap B(a',\varepsilon) \neq \varnothing$.

  Soit alors $x \in B(a,\varepsilon) \cap B(a',\varepsilon)$.

  Alors $\|x-a\| < \varepsilon$ soit $\|a-x\| < \varepsilon$ et $\|x-a'\| < \varepsilon$. Donc $\|a-a'\| \leqslant \|a-x\| + \|x-a'\| < 2\varepsilon$ ce qui est impossible car $\varepsilon < \frac{\|a-a'\|}{2}$.

Pour la suite, on notera $V_n(a)$ l'ensemble des voisinages, dans $\mathbb{R}^n$, d'un point a de $\mathbb{R}^n$.

III Ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition :

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω est ouverte lorsque Ω est voisinage de chacun de ses points.

Compte tenu de la définition de voisinage, on a donc aussi l'équivalence :

Ω est ouverte $\iff \forall a \in \Omega, \exists \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \subset \Omega$.

La notion est indépendante du choix de la norme, puisqu'elle ne dépend que de la notion de voisinages.

Exemple :

Les boules ouvertes sont ouvertes :

Soit $B(a,\varepsilon)$ une boule ouverte.

Soit $x \in B(a,\varepsilon)$. Donc $\|x-a\| < \varepsilon$. Soit alors $\mu > 0$ tel que $\mu < \varepsilon - \|x-a\|$.

Alors $B(x,\mu) \subset B(a,\varepsilon)$. En effet :

Soit $y \in B(x,\mu)$. Alors $\|y-x\| < \mu < \varepsilon - \|x-a\|$

Donc $\|y-x\|+\|x-a\|<\varepsilon$.

Or, $\|(y-x)+(x-a)\| \leqslant \|y-x\|+\|x-a\|$. Donc $\|y-a\|<\varepsilon$, donc $y \in B(a,\varepsilon)$, d'où l'inclusion. Donc $B(a,\varepsilon)$ est un voisinage de x.

Donc $B(a,\varepsilon)$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouverte.

$\varnothing$ et R^n sont aussi ouverts.

Proposition :

Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts indexée par un ensemble I.

Notons $\Omega=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$.

Soit $x\in\Omega$. Il existe alors $i\in I$ tel que $x\in\Omega_i$. Comme Ω_i est ouvert, il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(x,\varepsilon)\subset\Omega_i$. Comme $\Omega_i\subset\Omega$, on a donc $B(x,\varepsilon)\subset\Omega$.

Donc Ω est voisinage de x. C'est valable pour tout $x\in\Omega$. Donc Ω est ouvert.

Soit maintenant $(\Omega_i)_{i\in K}$ une famille d'ouverts indexée par un ensemble K fini.

Notons $\Omega=\bigcap_{i\in K}\Omega_i$.

Soit $x\in\Omega$. Alors $\forall i\in K, x\in\Omega_i$.

Pour tout $i\in K$, on pose alors ε_i tel que $B(x,\varepsilon_i)\subset\Omega_i$ (ce qui est possible car les ensemble sont ouverts)

Posons $\varepsilon=\min_{i\in K}\varepsilon_i$. Alors $\forall i\in K, B(x,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon_i)\subset\Omega_i$. Donc $B(x,\varepsilon)\subset\Omega$.

D'où le résultat.

Proposition :

Soient n intervalles ouverts $I_1,I_2,\dots I_n$ de $\mathbb{R}$.

Alors le produit cartésien $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Une telle partie est appelée un pavé ouvert.

Démonstration :

Soit $a=(a_1,a_2,\dots a_n)$ un élément de $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$.

Alors, pour chaque k entre 1 et n, a_k est élément de l'intervalle ouvert I_k, donc il existe $\varepsilon_k>0$ tel que $]a_k-\varepsilon_k,a_k+\varepsilon_k[\subset I_k$.

Si on pose $\varepsilon=\min_{k\in[\![1,n]\!]}\varepsilon_k$, alors on a bien $\varepsilon>0$ et la boule ouverte de centre a et de rayon ε pour la norme $\|\ \|_\infty$ est contenue dans $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$.

En effet, soit $x\in B_\infty(a,\varepsilon)$ (où on a noté $B_\infty(\ ,\ )$ une boule ouverte pour $\|\ \|_\infty$)

Alors $\|x-a\|_\infty<\varepsilon$, donc $\max_{k\in[\![1,n]\!]}|x_k-a_k|<\varepsilon$, où $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$.

Donc $\forall k\in[\![1,n]\!], |x_x-a_k|<\varepsilon\leqslant\varepsilon_k$. Donc $\forall k\in[\![1,n]\!], x_k\in]a_k-\varepsilon_k,a_k+\varepsilon_k[\subset I_k$.

Donc $x\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$.

Donc $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ est un voisinage de a.

Donc $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ est ouvert.

A) Fermés de $\mathbb{R}^n$

Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est un fermé lorsque le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.

Proposition (Exemples) :

- Les boules fermées sont fermées.
- $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont fermés (et ce sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées)
- Toute intersection de fermés est un fermé, toute réunion finie de fermés est un fermé.
- Tout produit cartésien de n intervalles fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ (qu'on appelle un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$).

Démonstration :

- Soit $\bar{B}(a,\varepsilon)$ une boule fermée. Notons Ω son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$.

  Ainsi, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x-a\| > \varepsilon\}$.

  Soit $x \in \Omega$. Soit $\mu > 0$ tel que $\mu < \|x-a\| - \varepsilon$.

  Alors $B(x,\mu) \subset \Omega$. En effet, soit $y \in B(x,\mu)$.

  Alors $\|y-a\| = \|(a-x)-(y-x)\| \geqslant |\|a-x\| - \|y-x\|| \geqslant \|a-x\| - \underbrace{\|y-x\|}_{<\mu<\|x-a\|-\varepsilon} > \varepsilon$

  Donc $y \in \Omega$. Donc Ω est un voisinage de x. Ce résultat est valable pour tout x, donc Ω est ouvert.

- Les complémentaires de $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont respectivement $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ qui sont ouverts, donc sont fermés.

- Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille de fermés indexée par un ensemble I quelconque. Si on note $\Omega = \bigcap_{i\in I} \Omega_i$, Alors $C_{\mathbb{R}^n}(\Omega) = \bigcup_{i\in I} C_{\mathbb{R}^n}(\Omega_i)$, donc Ω est une réunion d'ouverts qui est un ouvert. On fait le même raisonnement pour une réunion finie de fermés.

- Soient n intervalles fermés $I_1, I_2, \dots I_n$ de $\mathbb{R}$.

  Soit Ω le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ de $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

  Soit $x \in \Omega$. On note $x_1, x_2, \dots x_n$ ses composantes dans $\mathbb{R}^n$. L'un au moins des x_i est dans $C_{\mathbb{R}}(I_i)$, disons x_q où $q \in [\![1,n]\!]$. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\varepsilon_i = 1$ si $x_i \in I_i$, et $\varepsilon_i > 0$ tel que $]x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i[\subset C_{\mathbb{R}}(I_i)$ sinon.

  Alors, si on note $\varepsilon = \min_{i\in[\![1,n]\!]} \varepsilon_i$, on a $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$.
  En effet : Soit $y \in B_\infty(x,\varepsilon)$ (où on a noté $B_\infty(\ ,\ )$ une boule ouverte pour $\|\ \|_\infty$).

  Montrons que $y \notin I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

  On a $\|x-y\|_\infty < \varepsilon$.

  Donc, en notant $y_1, y_2, \dots y_n$ les composantes de y dans $\mathbb{R}^n$, on a :

  $\forall i \in [\![1,n]\!], |x_i - y_i| \leqslant \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k - y_k| < \varepsilon \leqslant \varepsilon_i$. Donc en particulier $|x_q - y_q| < \varepsilon_q$, soit $y_q \in]x_q - \varepsilon_q, x_q + \varepsilon_q[\subset C_{\mathbb{R}}(I_q)$, c'est-à-dire $y_q \in C_{\mathbb{R}}(I_q)$.

  Donc $y \notin I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, c'est-à-dire $y \in \Omega$. D'où l'inclusion.

  Donc Ω est un voisinage de x, donc Ω est ouvert (puisque le résultat est valable pour tout x). donc $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est fermé.

B) Points intérieurs

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

Définition :

Étant donné $a \in \mathbb{R}^n$, on dit que a est intérieur à A lorsque A est un voisinage de a, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'intérieur de A, noté $\mathring{A}$.

Proposition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. L'intérieur de A est un ouvert contenu dans A ; et c'est le plus grand, au sens de l'inclusion, des ouverts contenus dans A.

Démonstration :

Déjà, $\mathring{A}$ est ouvert :

Supposons $\mathring{A}$ non vide (sinon il est bien ouvert).

Soit $x \in \mathring{A}$. Alors A est un voisinage de x, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$.

Alors $B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A}$. En effet, $B(x,\varepsilon)$ est ouverte, donc est voisinage de chacun de ses points. Donc A est voisinage de tout les points de $B(x,\varepsilon)$ (stabilité par extension), d'où l'inclusion.

De plus, il est évidemment contenu dans A.

Montrons maintenant que c'est le plus grand :

Soit Ω un ouvert contenu dans A. Soit $x \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, c'est un voisinage de x. Mais $\Omega \subset A$. Donc A est un voisinage de x. Donc $x \in \mathring{A}$. Donc $\Omega \subset \mathring{A}$.

Il résulte en particulier de la proposition que A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, l'intérieur de $[0;1]\times]1;2]$ est $]0;1[\times]1;2[$.

C) Points adhérents

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

Définition :

Étant donné $a \in \mathbb{R}^n$, on dit que a est adhérent à A lorsque tout voisinage de a rencontre A, c'est-à-dire lorsque $\forall \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A, noté $\bar{A}$.

Proposition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. L'adhérence de A est un fermé contenant A, et c'est le plus petit, au sens de l'inclusion, des fermés contenant A.

Démonstration :

Déjà, $\bar{A}$ contient bien A...

Posons maintenant $\Omega = C_{\mathbb{R}^n}\bar{A}$. Montrons que Ω est ouvert.

Soit $x \in \Omega$. Alors $x \notin \bar{A}$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$.

Alors $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$. En effet : soit $y \in B(x,\varepsilon)$. Alors $B(x,\varepsilon)$ est un voisinage de y, et il ne rencontre pas A, donc $y \notin \bar{A}$, donc $y \in \Omega$.

Donc Ω est un voisinage de x. C'est valable pour tout x de Ω, donc Ω est ouvert.

Donc $\bar{A}$ est fermé.

Soit enfin F un fermé contenant A. Montrons qu'alors $\bar{A} \subset F$.

Soit $x \in \bar{A}$, montrons que $x \in F$. Supposons que $x \notin F$. Alors $x \in C_{\mathbb{R}^n} F$, qui est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset C_{\mathbb{R}^n} F$. Ainsi, $B(x, \varepsilon) \cap F = \varnothing$. Mais alors $B(x, \varepsilon) \cap A = \varnothing$ (puisque $A \subset F$), ce qui est impossible car $x \in \bar{A}$. Donc $x \in F$. Donc $\bar{A} \subset F$. Donc $\bar{A}$ est bien le plus petit des fermés contenant A.

Ainsi, il résulte de la définition que A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Exemple :

- Dans $\mathbb{R}^2$, l'adhérence de $[0;1] \times]1;2]$ est $[0;1] \times [1;2]$.
- L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

IV Commentaires et précisions sur les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

A) Limite en un point de $\mathbb{R}$ pour une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

On a déjà défini cette notion, dans le cours sur les foncions vectorielles, mais ici la norme n'est pas forcément euclidienne.

Étant donnés une partie D de $\mathbb{R}$, une fonction f de D dans $\mathbb{R}^n$, un point a de $\mathbb{R}$ adhérent à D, et un élément l de $\mathbb{R}^n$, on a vu :

$$\lim_a f = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| < \alpha \implies \|f(x) - l\| < \varepsilon) \tag{13.12}$$

où $\| \ \|$ désignait la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Mais, vu l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, il est clair que $\|\|$ peut désigner n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$ sans que cela change la notion.

On peut même traduire la définition sous forme de voisinage, qui montre bien l'indépendance de la norme :

$$\lim_a f = l \iff \forall V \in V_n(l), \exists U \in V_1(a), f(U \cap D) \subset V \tag{13.13}$$

Remarque :
En prenant comme norme sur $\mathbb{R}^n$ la norme $\| \ \|_\infty$, on retrouve immédiatement le fait que :

$$\lim_a f = l \iff \forall k \in [\![1, n]\!], \lim_a f_k = l_k \tag{13.14}$$

Où on a noté $l = (l_1, l_2, \dots l_n)$ et $\forall x \in D, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

B) Précisions sur les suites à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Notons $\| \ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

Étant donnée une suite $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, nous noterons $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots u^{(n)}$ les suites à valeurs réelles telles que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = (u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots u_k^{(n)})$ (suites coordonnées)

Définition :
Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et soit $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite u converge vers l lorsque pour tout voisinage V de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant N, u_k \in V$.
Cela revient à dire : u converge vers l lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant N, \|u_k - l\| < \varepsilon$.

Remarque :
On vérifie aisément que la définition est encore en accord avec le cours sur les fonctions vectorielles dans le cas de limite en $+\infty$ d'une fonction de $D = \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, les résultats suivants sont des cas particuliers de choses déjà dites :

- u tend vers l si et seulement si la suite réelle $(\|u_k - l\|)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
- u tend vers $l = (l_1, l_2, \dots l_n)$ si et seulement si chaque suite coordonnée $u^{(i)}$ tend vers l_i.
- Si u tend vers l et u' tend vers l', alors pour tout réel λ, $u + \lambda u'$ tend vers $l + \lambda l'$.

Remarque :
Dans le cas $n = 2$, on voit aussi que la suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de terme général (x_k, y_k) converge vers l'élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$ revient à dire que la suite complexe de terme général $x_k + \boldsymbol{i}y_k$ converge vers le complexe $a + \boldsymbol{i}b$.

On a aussi les résultats suivants :

- Toute suite convergente d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est bornée (reprendre exactement la démonstration du cas réel en remplaçant les valeurs absolues par des $\| \ \|$).
- De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$, on peut extraire une suite convergente (Théorème de Bolzano–Weierstrass ; la démonstration faite dans le cas complexe se généralise aisément à $\mathbb{R}^n$).

Enfin, ajoutons cette caractérisation (dite séquentielle) des points adhérents à une partie :

Proposition :
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors a est adhérent à A si et seulement si a est la limite d'une suite convergente de points de A.

Démonstration :

- Supposons que $a = \lim u$ où u est une suite de points de A.

  Soit V un voisinage de a. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $u_k \in V$. Donc $V \cap A$ n'est pas vide, et comme c'et valable pour tout voisinage de a, ce point est donc adhérent à A.

- Inversement, supposons a adhérent à A.

  Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B(a, 2^{-k}) \cap A$ n'est pas vide, et donc on peut introduire $u_k \in A$ tel que $\|u_k - a\| < 2^{-k}$, et la suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge vers a.

Conséquence :
Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est un fermé si et seulement si toute suite convergente de points de A a sa limite dans A. (Résulte immédiatement du fait que A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

V Limite et continuité pour les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

A) Notations

On note $\| \ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^p$, et on note aussi $\| \ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$: c'est ce qui est à l'intérieur qui permet de distinguer.

Si n ou p vaut 1, on prendra de préférence sur $\mathbb{R}$ la norme $| \ |$.

D désigne ici une partie non vide de $\mathbb{R}^p$, et f est une application de D dans $\mathbb{R}^n$. On désigne par $f_1, f_2, \dots f_n$ les applications coordonnées de f, c'est-à-dire les applications de D dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall x \in D, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

Enfin, si $x = (x_1, x_2, \dots x_p)$ est un élément de D (qui est une partie de $\mathbb{R}^p$), on note $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, c'est-à-dire qu'on omet une paire de parenthèses (d'où le nom de « fonction de p variables »)

B) Limite

Dans tout ce sous paragraphe, a est un élément de $\mathbb{R}^p$ adhérent à D.

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que f tend vers l en a lorsque pour tout voisinage V de l (dans $\mathbb{R}^n$), il existe un voisinage U de a (dans $\mathbb{R}^p$) tel que $f(D \cap U) \subset V$.

Compte tenu de ce que sont les voisinages, cela revient à dire que f tend vers l en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \implies \|f(x) - l\| < \varepsilon) \tag{13.15}$$

(Et ce quel que soit le choix des normes)

On vérifie aisément les résultats suivants :

- Unicité de la limite éventuelle (séparation des voisinages)
- Si f a une limite en a, alors cette limite est dans l'adhérence de $f(D)$.
- Si $a \in D$, et si f a une limite en a, alors cette limite est $f(a)$.
- La notion de limite en a est locale :

  Si U est un voisinage de a, alors f tend vers l en a si et seulement si f restreinte à $D \cap U$ tend vers l en a.
- f admet la limite l en a si et seulement si pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui converge vers a, la suite $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l.
- Limites et opérations simples sur les fonctions définies sur D :

  Si f tend vers l en a, et si g (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) tend vers l' en a, alors $f + g$ tend vers $l + l'$ en a.

  Si f tend vers l en a et si λ est un réel, alors λf tend vers λl en a.

  Plus généralement, si f tend vers l en a, et si φ (à valeurs réelles) tend vers λ en a, alors φf tend vers λl en a.
- On montre aussi facilement le théorème de composition de limites :

Théorème :
Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie sur D, soit Φ une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^m$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(D)$.
Si f tend vers l en a, et si Φ tend vers Λ en l, alors la fonction $\Phi \circ f$ tend vers Λ en a.

- Enfin, dans le cas $n = 1$, c'est-à-dire pour les fonctions à valeurs réelles, on a aussi les résultats classiques portant sur les inégalités :
  - ◇ Passage à la limite dans une inégalité : si f tend vers l en a, si g tend vers l' en a et si $f \leqslant g$, alors $l \leqslant l'$.

Théorème (Théorème des gendarmes) :
◇ Si f et h tendent vers l en a, et si $f \leqslant g \leqslant h$, alors g tend vers l en a.

Pour les démonstrations de tous ces résultats, il suffit de reprendre exactement les démonstrations vues dans le cas des fonctions réelles à variable réelle – chapitre « limite en un point » –, en changeant si nécessaire les intervalles en boules (en particulier pour le 5$^{\text{ème}}$ point, et en retirant les cas où $a, l = \pm\infty$).

De plus, deux résultats importants permettent de se ramener aux fonctions à valeurs réelles :

- f tend vers l en a si et seulement si la fonction $x \mapsto \|f(x) - l\|$ tend vers 0 en a (immédiat)
- f tend vers $l = (l_1, l_2, \dots l_n)$ en a si et seulement si pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction coordonnée f_k tend vers l_k en a.

  En effet : On prend sur $\mathbb{R}^n$ la norme $\| \ \|_\infty$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
&f \text{ tend vers } l = (l_1, l_2, \dots l_n) \text{ en } a \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \implies \|f(x) - l\|_\infty < \varepsilon) \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \implies \max_{k \in [\![1,n]\!]} |f_k(x) - l_k| < \varepsilon) \\
&\iff \forall k \in [\![1, n]\!], \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (\|x - a\| < \alpha \implies |f_k(x) - l_k| < \varepsilon) \\
&\iff \text{Pour chaque } k \in [\![1, n]\!], \text{ la fonction coordonnée } f_k \text{ tend vers } l_k \text{ en } a.
\end{aligned} \tag{13.16}$$

  D'où l'équivalence.

C) Continuité en un point

Définition :
Soit a un élément de D. On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a (cette limite étant alors $f(a)$)

Par simple traduction, dans le cas $a \in D$, des résultats sur l'éventuelle limite en a, on obtient :

- f est continue en a si et seulement si pour tout suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui converge vers a, la suite $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.
- Continuité et opérations simples sur les fonctions définies sur D :

  Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.

  Si f est continue en a, et si φ (à valeurs réelles) est continue en a, alors φf est continue en a.

- Et le théorème de composition de limites donne :

  Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie sur D, soit Φ une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^m$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(D)$.

  Si f est continue en a, et si Φ est continue en $f(a)$, alors la fonction $\Phi \circ f$ est continue en a.

Enfin, pour se ramener aux fonctions réelles :

- f est continue en a si et seulement si la fonction réelle $x \mapsto \|f(x) - f(a)\|$ tend vers 0 en a.
- f est continue en a si et seulement si les fonctions coordonnées sont continues en a.

D) Fonctions continues

Définition :
On dit que f est continue (sur D) lorsque f est continue en tout point a de D.

Les résultats précédents donnent :

- Opérations sur les fonctions continues sur D :

  Si f et g sont continues, alors $f + g$ est continue.

  Si f est continue, et si φ (à valeurs réelles) est continue, alors φf est continue.
- Composition :

  Si f est une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie sur D, si Φ est une fonction continue à valeur dans $\mathbb{R}^m$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(D)$, alors $\Phi \circ f$ est continue.
- Enfin, f est continue si et seulement si les fonctions coordonnées sont continues

Ainsi, on remarque que la nouveauté et la difficulté vient non pas du fait que les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, mais dans le fait que leur ensemble de départ est une partie de $\mathbb{R}^p$.

Exemple :

- L'application identité sur $\mathbb{R}^p$, les applications constantes sur $\mathbb{R}^p$ sont continues : évident
- La norme est continue, c'est-à-dire que l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\|x\|$ est continue (quelle que soit la norme)

  En effet, pour tous x, x' de $\mathbb{R}^p$, on a $|\|x\| - \|x'\|| \leqslant \|x - x'\|$; la continuité en tout x de $\mathbb{R}^p$ en résulte immédiatement, avec $\alpha = \varepsilon$: $\|x - x'\| < \alpha \implies |\|x\| - \|x'\|| < \varepsilon$.
- Pour chaque k entre 1 et p, la k-ième projection canonique de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'application p_k de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x_1, x_2, \dots x_p)$ associe x_k est continue.

  En effet, pour tous x, x' de $\mathbb{R}^p$, on a : $|p_k(x) - p_k(x')| = |x_k - x'_k| \leqslant \|x - x'\|_\infty$

  La continuité de p_k en tout x de $\mathbb{R}^p$ en résulte immédiatement (par le théorème des gendarmes, vu le théorème précédent)
- Ainsi, compte tenu de cela et des résultats portant sur les opérations sur les fonctions continues, la continuité sur $\mathbb{R}^3$ d'une application du genre $(x, y, z) \mapsto \dfrac{3x + \sin(xy + z^3)}{\sqrt{1 + y^2 z^2}}$ est évidente.

  En détails :

  L'application $(x, y, z) \mapsto z^3$ est continue (sur $\mathbb{R}^3$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$;

  L'application $\varphi \colon (x, y, z) \mapsto x$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et l'application $f \colon (x, y, z) \mapsto y$ est aussi continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc φf est continue (sur $\mathbb{R}^3$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donc $(x, y, z) \mapsto xy + z^3$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Or, l'application $u \mapsto \sin u$ est continue sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $(x, y, z) \mapsto \sin(xy + z^3)$ est continue (sur $\mathbb{R}^3$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus, l'application $(x, y, z) \mapsto 3x$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Il en résulte que $\psi\colon (x, y, z) \mapsto 3x + \sin(xy + z^3)$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'autre part, l'application $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et l'application $(x, y, z) \mapsto yz$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $g\colon (x, y, z) \to \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2z^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Donc ψg est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
  $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sinon} \end{cases}$
  La continuité de f en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est encore évidente.

  En $(0, 0)$: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :
  $$|f(x,y)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \tag{13.17}$$
  Et l'inégalité est encore valable pour $(x, y) = (0, 0)$.

  De plus, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue en $(0, 0)$, donc $\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

  Donc, d'après le théorème des gendarmes, $|f(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0, 0)$.

Ajoutons maintenant deux résultats importants sur les fonctions continues (on travaille toujours sur les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$) :

Théorème (admis, vu en spé) :
L'image d'une partie fermée et bornée par une fonction continue est une partie fermée et bornée.

Conséquence :
Toute fonction réelle f continue sur une partie (non vide) fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.
En effet : Les bornes inférieures et supérieures d'une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ sont dans l'adhérence de cette partie, donc les parties non vides fermées et bornées de $\mathbb{R}$ contiennent leurs bornes inférieures et supérieures.

Théorème :
L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert. L'image réciproque d'un fermé par une fonction continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

Démonstration :
Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, continue.

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in f^{-1}(\Omega)$. Alors $f(a) \in \Omega$, et comme Ω est ouvert, il constitue un voisinage de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue en a, on peut donc introduire un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^p$ tel que $f(U) \subset \Omega$. Mais alors $f^{-1}(\Omega)$ contient U, et donc est un voisinage de a. Comme c'est valable pour tout $a \in f^{-1}(\Omega)$, $f^{-1}(\Omega)$ est bien un ouvert.

- Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit Ω le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$. Ω est ouvert, donc, selon le résultat précédent, $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert. Or, de façon purement logique, $f^{-1}(F)$ est le complémentaire de $f^{-1}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{R}^p}(f^{-1}(\Omega)) &= \left\{x \in \mathbb{R}^p, x \notin f^{-1}(\Omega)\right\} = \{x \in \mathbb{R}^p, f(x) \notin \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^p, f(x) \in F\} = \left\{x \in \mathbb{R}^p, x \in f^{-1}(F)\right\} \\ &= f^{-1}(F) \end{aligned} \tag{13.18}$$

  C'est donc le complémentaire d'un ouvert, c'est-à-dire d'un fermé.

Conséquence :

Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^p$, alors pour tout réel α, l'ensemble des $(x_1, x_2, \dots x_p)$ de $\mathbb{R}^p$ tels que $f(x_1, x_2, \dots x_p) > \alpha$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et l'ensemble des $(x_1, x_2, \dots x_p)$ de $\mathbb{R}^p$ tels que $f(x_1, x_2, \dots x_p) \geqslant \alpha$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$.
En effet : $]\alpha, +\infty[$ et $[\alpha, +\infty[$ sont respectivement un ouvert et un fermé de $\mathbb{R}$.

E) Applications partielles et continuité

Soit toujours $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ et soit $a = (a_1, a_2, \dots a_p) \in D$.

Pour chaque entier k entre 1 et p, on note $D_{a,k}$ l'ensemble des réels t tels que $(a_1, a_2, \dots, t,$ et $\varphi_{a,k}$ l'application de $D_{a,k}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à t associe $f(a_1, a_2, \dots, t.$ $\varphi_{a,k}$ s'appelle la k-ième application partielle associée à f en a.

Définition :

Si l'application $\varphi_{a,k}$ est continue en a_k, on dit que f est, au point a, continue par rapport à la k-ième variable.

Proposition :

Si f est continue en a, alors f est, en a, continue par rapport à chaque variable.

Démonstration :

On peut écrire que $\varphi_{a,k} = f \circ \delta_{a,k}$ où $\delta_{a,k}$ est l'application qui à t associe $(a_1, a_2, \dots, t, \dots a_p)$. Or, cette application est continue, donc on obtient le résultat par composition : $\delta_{a,k}$ est continue en a_k, donc si f est continue en $a = \delta_{a,k}(a_k)$, alors $\varphi_{a,k} = f \circ \delta_{a,k}$ est continue en a_k.

Attention : La réciproque de la proposition est fausse. Cela signifie que l'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables ne se ramène pas à l'étude de la continuité de fonctions d'une variable.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \tag{13.19}$$

Alors les applications partielles en $(0,0)$ sont les applications $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$, qui sont nulles, donc f est, en $(0,0)$, continue par rapport à chaque variable. Mais si $x \neq 0$, alors $f(x,x) = \frac{1}{2}$, et il en résulte alors que f n'est pas continue en $(0,0)$:

Comme $f(0,0) = 0$, si f était continue en $(0,0)$, elle tendrait vers 0 en $(0,0)$. Mais si on prend $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on ne trouvera jamais $\alpha > 0$ tel que $\|(x,y)\|_\infty < \alpha \implies |f(x,y)| < \varepsilon$ (l'implication sera toujours fausse avec $(x,y) = (\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$).

Autre manière : comme $x \mapsto (x,x)$ est évidemment continue, si f était continue en $(0,0)$, alors d'après le théorème de composition l'application $x \mapsto f(x,x)$ serait continue en 0, ce qui n'est évidemment pas le cas (nulle en 0 et constante non nulle sur $\mathbb{R}^*$)