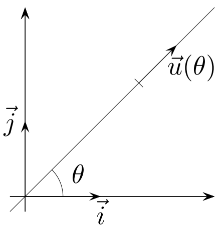
Chapitre 12 : Courbes d'équation $\rho = f(\theta)$ en coordonnées polaires

I Préliminaire

Ici, $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté, $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$.



Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$. M admet le système de coordonnées polaires $(\rho, \theta) \iff \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}(\theta)$.

Ainsi, M est sur la droite $(O, \vec{u}(\theta))$, et $OM = |\rho|$.

$\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}(\theta)$ sont de même sens si et seulement si $\rho \geqslant 0$.

Soit I un intervalle infini de $\mathbb{R}$. Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ au moins.

La courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ dans $\mathbb{R}$, c'est

$$C = \left\{ M \in \mathscr{P}, \exists\theta \in I, \overrightarrow{OM} = f(\theta)\vec{u}(\theta) \right\} \tag{12.1}$$

C'est donc le support de l'arc paramétré $\theta \mapsto M(\theta) \left| \begin{array}{l} f(\theta)\sin\theta \\ f(\theta)\cos\theta \end{array} \right.$.

Rappel :

$\theta \mapsto \vec{u}(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, noté $\vec{v}(\theta)$.

Et, par récurrence, $\frac{\mathrm{d}^k\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}^k(\theta) = \vec{u}\left(\theta + \frac{k\pi}{2}\right)$.

La donnée de θ et du signe de ρ donne l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$, ce qui suffit quasiment à tracer la courbe (ou du moins l'allure).

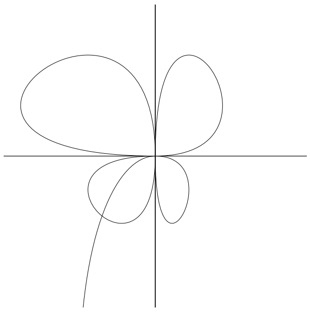
Exemple :

$C :\ \rho = f(\theta), \theta \in [0, \frac{5\pi}{2}[$.

Données : f est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a le tableau de signes :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$
$f(\theta)$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$

(12.2)



II Réduction de l'intervalle d'étude

On considère une courbe $C: \ \rho = f(\theta), \theta \in \mathbb{R}$. Divers exemples :

- Si il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + 2k\pi) = f(\theta)$, alors $M(\theta + 2k\pi) = M(\theta)$, puisque $\overrightarrow{OM}(\theta + 2k\pi) = f(\theta + 2k\pi)\vec{u}(\theta + 2k\pi) = f(\theta)\vec{u}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta)$.

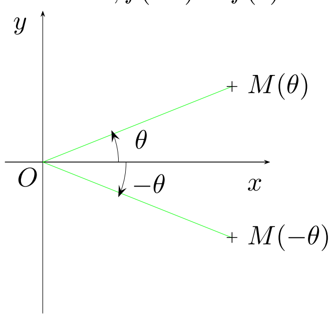
  On obtient ainsi tout C pour θ décrivant un intervalle d'amplitude $2k\pi$.

- Si il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi + 2k\pi) = -f(\theta)$:

$$\overrightarrow{OM}(\theta + \pi + 2k\pi) = f(\theta + \pi + 2k\pi)\vec{u}(\theta + \pi + 2k\pi) = -f(\theta)(-\vec{u}(\theta)) = \overrightarrow{OM}(\theta) \tag{12.3}$$

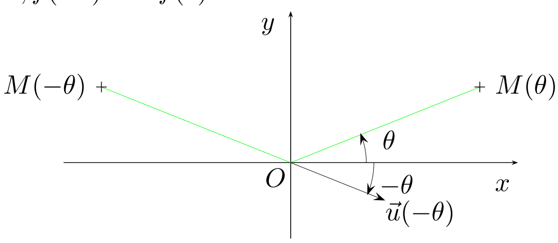
  On obtient donc encore tout C avec un intervalle d'amplitude $\pi + 2k\pi$.

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = f(\theta)$



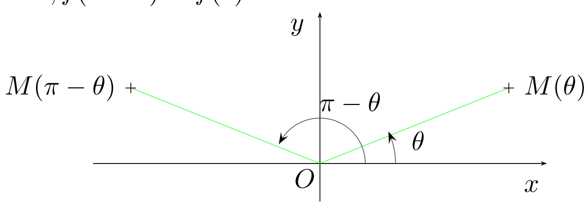
  On obtient alors C en se limitant à $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}_-$), et en opérant sur la courbe obtenue une symétrie d'axe Ox

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(-\theta) = -f(\theta)$



  On obtient tout C en se limitant à $\mathbb{R}_+$ puis en faisant une symétrie d'axe Oy.

- Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\pi - \theta) = f(\theta)$

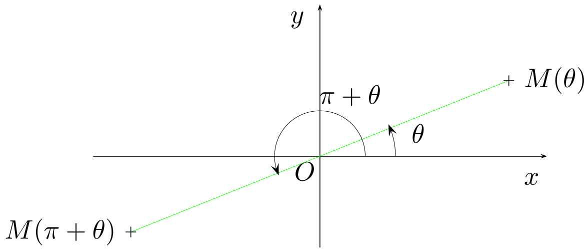


  Idem que précédemment, avec $\theta \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$ (ou $] - \infty, \frac{\pi}{2}]$)

- Si $\forall\theta \in \mathbb{R}, f(\pi-\theta) = -f(\theta)$

  On obtient C en se limitant à $\theta \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, puis en faisant une symétrie d'axe Ox.

- Si $\forall\theta \in \mathbb{R}, f(\pi+\theta) = f(\theta)$



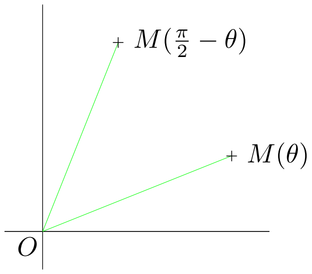
  On dessine sur un intervalle d'amplitude π, puis on fait une symétrie par rapport à O.

- Autres cas plus variés :

  ◇ Si $\forall\theta \in \mathbb{R}, f(\theta+\frac{\pi}{2}) = f(\theta)$:

  On dessine sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, puis on fait une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (3 fois) et de centre O.

  ◇ Si $\forall\theta \in \mathbb{R}, f(\frac{\pi}{2}-\theta) = f(\theta)$:



  On fait l'étude pour $\theta \in]-\infty, \frac{\pi}{4}]$, puis une symétrie par rapport à la première bissectrice.

  ◇ Si $\forall\theta{\in}R, f(\theta+2\pi) = 2f(\theta)$:

  On étudie sur un intervalle d'amplitude 2π, puis on fait toutes les homothéties de centre O et de rapport $2^k, k \in \mathbb{Z}$.

Exemples, construire les courbes

$$C_n : \ \rho = \sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{N} \tag{12.4}$$

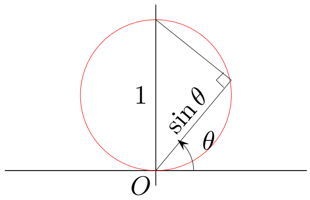
$$C'_n : \ \rho = \sin(\frac{\theta}{n}), \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{12.5}$$

Pour les C_n, on peut se limiter à un intervalle d'amplitude 2π.

- Pour $n = 1$: on se restreint à $[-\pi, \pi]$

  $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: On peut se limiter à $[0, \pi]$, puis on fait une symétrie d'axe Oy $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$; rien de mieux.

  On obtient un cercle :



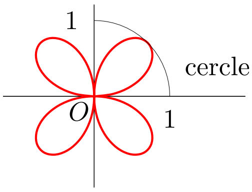
- Pour C_2 : $\rho = \sin(2\theta)$:

  $\rho(2\pi+\theta) = \rho(\theta)$. On peut donc se restreindre à $[-\pi, \pi]$.

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: Étude sur $[0, \pi]$, puis symétrie d'axe Oy.

$\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$: Étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis une symétrie d'axe Ox donne sur $[0, \pi]$.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$+$	1	$+$	0



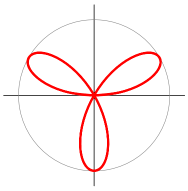
- Pour C_3 : $\rho = \sin(3\theta)$:

  $\rho(2\pi + \theta) = \rho(\theta)$: Étude sur un intervalle d'amplitude 2π.

  $\rho(\frac{2\pi}{3} + \theta) = \rho(\theta)$: Étude sur un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$, puis 2 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre O.

  $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: Étude sur $[0, \frac{2\pi}{6}]$, puis symétrie d'axe Oy donne la courbe sur $[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$
ρ	0	$+$	0

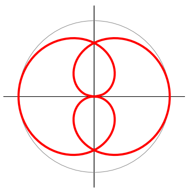


- C_2' : $\rho = \sin(\frac{\theta}{2})$:

  $\rho(\theta + 4\pi) = \rho(\theta)$: Étude sur $[-2\pi, 2\pi]$

  $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: Étude sur $[0, 2\pi]$, puis symétrie d'axe Oy.

θ	0		π		2π
ρ	0	$+$	1	$+$	0



III Étude des tangentes

Soit C : $\rho = f(\theta), \theta \in I$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins)

Soit $\theta_0 \in I$, on cherche la tangente en $M(\theta_0)$.

$\overrightarrow{OM} = f(\theta)\vec{u}(\theta)$. Donc $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = f'(\theta)\vec{u}(\theta) + \underbrace{f(\theta)}_{\neq 0 \text{ si } M \neq O} \vec{v}(\theta)$

Ainsi, sur une courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, si $M(\theta_0) \neq O$, alors ce point n'est pas stationnaire (la famille $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est en effet libre, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, elle forme même une base orthonormée directe de la direction de $\mathscr{P}$)

- Si $M(\theta_0) \neq O$: $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)$ fait un angle α avec $\vec{u}(\theta_0)$ tel que $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{f'(\theta_0)}{f(\theta_0)}$

  En effet : Si on note $\alpha = \left(\vec{u}(\theta_0), \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)\right)$, alors $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)\right\| (\cos\alpha\vec{u}(\theta_0) + \sin\alpha\vec{v}(\theta_0))$

Donc $\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)\right\|\cos\alpha = f'(\theta_0)$ et $\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)\right\|\sin\alpha = f(\theta_0)$, (et donc $\sin\alpha \neq 0$)

D'où le résultat.

Ainsi :

Si $M(\theta_0) \neq O$, ce point n'est pas stationnaire, et la tangente T_0 en ce point fait avec (OM_0) un angle orienté $\alpha = ((OM_0), T_0)$ tel que $\operatorname{cotan}\alpha = \frac{f'(\theta_0)}{f(\theta_0)}$

On peut aussi retenir que $\tan\alpha = \frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$ si $f'(\theta_0) \neq 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sinon.

- Si $M(\theta_0) = O$:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = f'(\theta_0)\vec{u}(\theta_0) + f(\theta_0)\vec{v}(\theta_0) = f'(\theta_0)\vec{u}(\theta_0) \tag{12.6}$$

  - ◇ Si $f'(\theta_0) \neq 0$, alors $M(\theta_0) = O$ n'est pas stationnaire et la tangente est dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$.
  - ◇ Si $f'(\theta_0) = 0$ et qu'on peut dériver suffisamment de façon à tomber sur le premier $f^{(k)}(\theta_0)$ non nul (s'il en existe) :

$$\frac{\mathrm{d}^k\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta^k}(\theta_0) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(\theta_0)\vec{u}^{(k-i)}(\theta_0) = C_k^k f^{(k)}(\theta_0)\vec{u}(\theta_0 + (k-k)\frac{\pi}{2}) = f^{(k)}(\theta_0)\vec{u}(\theta_0) \tag{12.7}$$

  Ainsi, dans tous les cas la tangente est dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$.

Exemple :

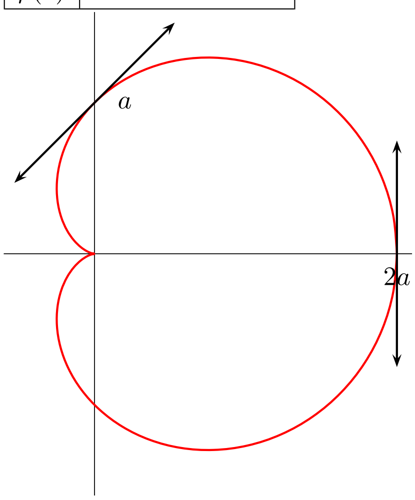
C : $\rho = a(1+\cos\theta)$ (« cardioïde »)

$\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$: Étude sur $[-\pi, \pi]$

$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$: Étude sur $[0, \pi]$, puis symétrie d'axe Ox.

Si $a > 0$:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\rho(\theta)$	$2a$	a	0



Étude des tangentes :

$$\rho'(\theta) = -a\sin\theta \tag{12.8}$$

Donc $\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} = \frac{-a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$

En $\theta = 0$, on a donc $\operatorname{cotan}\alpha = 0$, donc $\alpha = \frac{\pi}{2} \mod \pi$ (et $(\overrightarrow{OM}, T) = \alpha$).

En $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cotan}\alpha = -1$, donc $\alpha = \frac{-\pi}{4} \mod \pi$ (et $(\overrightarrow{OM}, T) = \alpha$).

IV Branches infinies

Diverses situations Soit C : $\rho = f(\theta), \theta \in I$ où I est un intervalle infini.

- Si I n'est pas majoré/minoré et $\lim_{\theta \to +\infty/-\infty} f(\theta) = \pm\infty$, on a une branche infinie spirale.
- Si $\lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$ où $\theta_0 \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(I)$: on obtient une direction asymptotique dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$/d'angle polaire θ_0.

En effet : En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta)\sin(\theta) \end{cases} \tag{12.9}$$

Donc si $\cos\theta_0 \neq 0$, au voisinage de θ_0 : $\frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan\theta \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \tan\theta_0$.

On a alors une direction asymptotique de pente $\tan\theta_0$.

Si $\cos\theta_0 = 0$, au voisinage épointé de θ_0 : $\frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \pm\infty$

Pour avoir les asymptotes, on fait ensuite l'étude de $y(\theta) - \tan\theta_0 x(\theta)$...

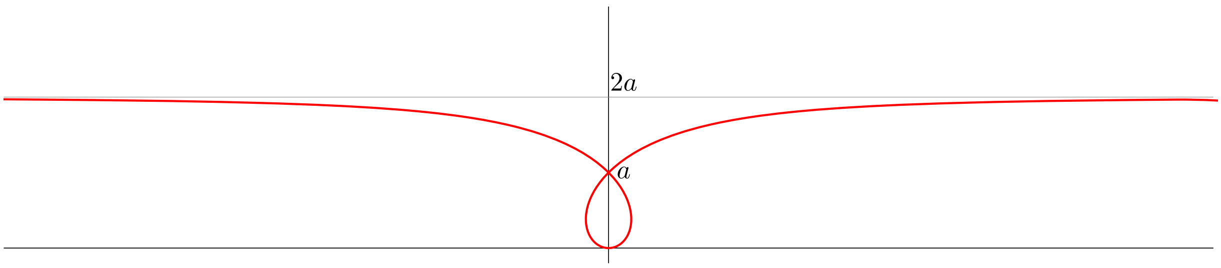
exemple $\rho = a\tan(\frac{\theta}{2})$ où $a > 0$.

$\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$: Étude sur $]-\pi, \pi[$.

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: Étude sur $[0, \pi[$ puis symétrie par rapport à Oy.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\rho(\theta)$	0	$+$	a	$+$	$+\infty$

$$y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) = a\tan(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) = a\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) \xrightarrow[\theta \to \pi]{} 2a \tag{12.10}$$

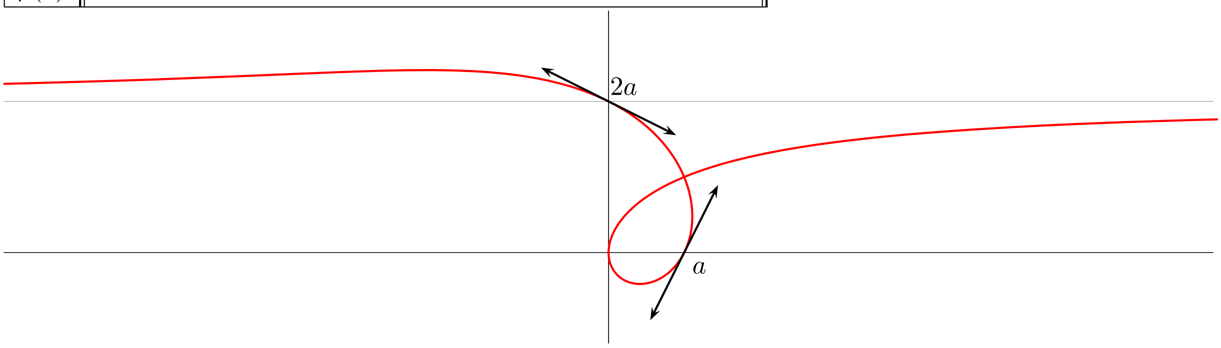


Autre exemple

$$C : \ \rho = a(1 + \tan(\frac{\theta}{2})) \tag{12.11}$$

$\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$: Étude sur $]-\pi, \pi[$.

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\rho(\theta)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	a	$+$	$2a$	$+$	$+\infty$



Déjà, on a une direction asymptotique horizontale :

$$y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = 2a(1 + \tan(\frac{\theta}{2}))\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) = 2a(\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2})) \xrightarrow[\pm\pi]{} 2a \tag{12.12}$$

Tangente au point de paramètre $\theta = 0$ $\quad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{\rho'}{\rho}$ où $\alpha = ((OM)\widehat{,}T)$.

$\rho' = \frac{a}{2}(1 + \tan^2\frac{\theta}{2})$.

Donc $\operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{2}$. Donc $\tan\alpha = 2$ et OM est horizontal. Donc T est de pente 2.

En $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. On note $\beta = ((Ox)\widehat{,}T)$

On a $\beta = ((Ox)\widehat{,}T) = ((Ox)\widehat{,}(OM)) + ((OM)\widehat{,}T) = \frac{\pi}{2} + \alpha$

Donc $\tan\beta = \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{-1}{\tan\alpha} = \frac{-1}{2}$. Donc la tangente est de pente $\frac{-1}{2}$

V Recherche de points doubles

On doit chercher les points doubles parmi les solutions de :

- $$\begin{cases} \rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) = 0 \\ \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases} \tag{12.13}$$

- Et
$$\begin{cases} \rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) \neq 0 \\ \theta_1 \equiv \theta_2 \mod 2\pi \text{ et } \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases} \tag{12.14}$$

- Et
$$\begin{cases} \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2) \neq 0 \\ \theta_1 \equiv \pi + \theta_2 \mod 2\pi \end{cases} \tag{12.15}$$

Exemple :

On reprend celui de la fin du paragraphe précédent :

On cherche un point double, pour $\theta_1 \in]0, \pi[$ et $\theta_2 \in]-\pi, \frac{-\pi}{2}[$ (d'après l'allure de la courbe). On cherche donc $\theta_1 \in]0, \pi[$ tel que $\rho(\theta_1 - \pi) = -\rho(\theta_1)$.

C'est-à-dire $1 + \tan(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\pi}{2}) = -1 - \tan(\frac{\theta_1}{2})$

Soit $1 + \frac{1}{\tan(\frac{\theta_1}{2})} = -1 - \tan(\frac{\theta_1}{2})$

Soit $\tan(\frac{\theta_1}{2}) + 1 = -\tan(\frac{\theta_1}{2}) - \tan^2(\frac{\theta_1}{2})$

Soit $2\tan(\frac{\theta_1}{2}) = 1 - \tan^2(\frac{\theta_1}{2})$

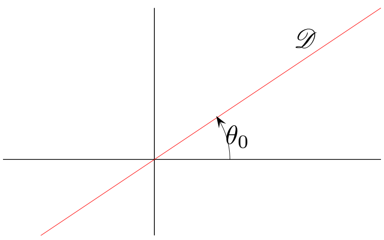
C'est-à-dire $\frac{2\tan(\frac{\theta_1}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta_1}{2})} = 1$

Soit $\tan(\theta_1) = 1$. Donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

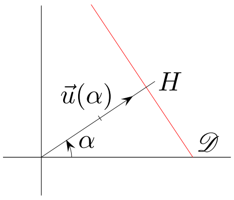
VI Quelques courbes classiques en coordonnées polaires

A) Droites

- Droite passant par O : $\theta = \theta_0$ est une équation en coordonnées polaires de $\mathscr{D}$.



- Droite orthogonale à $\vec{u}(\alpha)$ unitaire et passant par H tel que $\overrightarrow{OH} = h\vec{u}(\alpha)$.



Rappel :

$$\begin{aligned} \mathscr{D} &= \left\{M \in \mathscr{P}, \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}(\alpha) = 0\right\} = \left\{M \in \mathscr{P}, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}(\alpha) = \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}(\alpha)\right\} \\ &= \left\{M \in \mathscr{P}, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}(\alpha) = h\right\} \end{aligned} \tag{12.16}$$

Soit $M(\rho, \theta)$: $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}(\theta)$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}(\alpha) = \rho \underbrace{\vec{u}(\theta) \cdot \vec{u}(\alpha)}_{=\cos(\theta-\alpha)} \tag{12.17}$$

Donc $M \in \mathscr{D} \iff \rho\cos(\theta - \alpha) = h$

Si $h \neq 0$ (alors $\rho \neq 0$, $\cos(\theta - \alpha) \neq 0$), c'est-à-dire si $\mathscr{D}$ ne passe pas par O, l'équation s'écrit aussi $\rho = \frac{h}{\cos(\theta-\alpha)}$.

B) Cercles

- Cercle de centre O :

  Pour $a \geqslant 0$, $\rho = a$ est une équation du cercle de centre O et de rayon a ($\rho = -a$ en est aussi une)

- Cercle C passant par O et de centre Ω de coordonnées polaires (r, α).

  (C'est-à-dire telles que $\overrightarrow{O\Omega} = r\vec{u}(\alpha)$)

  Soit $M(\rho, \theta)$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in C &\iff \Omega M^2 = r^2 \\ &\iff (\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM})^2 = r^2 \\ &\iff (-r\vec{u}(\alpha) + \rho\vec{u}(\theta))^2 = r^2 \\ &\iff r^2 + \rho^2 - 2\rho r\cos(\theta - \alpha) = r^2 \\ &\iff \begin{cases} \rho = 0 \\ \text{ou } \rho = 2r\cos(\theta - \alpha) \end{cases} \end{aligned} \tag{12.18}$$

  Une équation polaire de C est donc $\rho = 2r\cos(\theta - \alpha)$

  L'équation trouvée est donc de la forme $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$.

  Inversement, soit C : $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$.

  Si $a = b = 0$, alors $C = \{O\}$.

  Sinon, $a^2 + b^2 \neq 0$ et $a\cos\theta + b\sin\theta$ se met sous la forme $2r\cos(\theta - \alpha)$

  (avec $2r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et α tel que $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

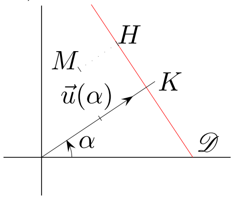
  On reconnaît le cercle passant par O de centre Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = r\vec{u}(\alpha)$.

C) Conique dont un des foyers est O.

Soient D une droite ne passant pas par O, $e > 0$, $C = \{M \in \mathscr{P}, OM = eMH\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

Si $e > 1$, on a une hyperbole, si $e = 1$ une parabole et si $0 < e < 1$ une ellipse.

Disons que $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\vec{u}(\alpha)$ et passe par K tel que $\overrightarrow{OK} = h\vec{u}(\alpha)$ ($h \neq 0$ car $\mathscr{D}$ ne passe pas par O)



Ainsi, $D :\ \rho = \frac{h}{\cos(\theta-\alpha)}$

Soit $M(\rho, \theta)$ (donc $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}(\theta)$)

H est déterminé par : $H \in \mathscr{D}$ et $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{u}(\alpha)$.

Donc $\overrightarrow{MH} = \lambda\vec{u}(\alpha)$.

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = -\rho\vec{u}(\theta) + h\vec{u}(\alpha) + \underbrace{\overrightarrow{KH}}_{\perp\vec{u}(\alpha)} \tag{12.19}$$

Donc $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}(\alpha) = -\rho\cos(\theta - \alpha) + h = \lambda$.

Ainsi, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in C &\iff MO = eMH \\ &\iff |\rho| = e|h - \rho\cos(\theta-\alpha)| \\ &\iff \begin{cases} \quad \rho = e(h - \rho\cos(\theta-\alpha)) \\ \text{ou } \rho = -e(h - \rho\cos(\theta-\alpha)) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \quad \rho(1 + e\cos(\theta-\alpha)) = eh \\ \text{ou } \rho(1 - e\cos(\theta-\alpha)) = -eh \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \quad \rho = \frac{eh}{1+e\cos(\theta-\alpha)} & (a) \\ \text{ou } \rho = \frac{-eh}{1-e\cos(\theta-\alpha)} & (b) \end{cases} \end{aligned} \tag{12.20}$$

(Pour la dernière équivalence, si $M \in C$, on a en effet $1 \pm e\cos(\theta - \alpha) \neq 0$ car sinon $h = 0$ ou $e = 0$ ce qui est faux)

Une équation polaire de C est alors $\rho = \frac{eh}{1+e\cos(\theta-\alpha)}$. (En effet, (ρ, θ) est solution de (a) si et seulement si $(-\rho, \pi + \theta)$ est solution de (b))

eh s'appelle le paramètre de la conique.

On retrouve la nature de la conique avec l'équation :

- Si $1 + e\cos(\theta - \alpha)$ ne s'annule pour aucune valeur de θ (c'est-à-dire si $1/e > 1$), tout les $\theta \in [-\pi, \pi]$ sont permis, on a donc une ellipse.
- Si $1 + e\cos(\theta - \alpha)$ s'annule pour deux valeurs de θ (modulo 2π), c'est-à-dire si $\cos(\theta - \alpha) = -1/e$ a deux solutions $\pm\beta \mod 2\pi$, c'est-à-dire si $e > 1$, on a alors une hyperbole.
- Si $1 + e\cos(\theta - \alpha)$ ne s'annule qu'une fois modulo 2π, c'est-à-dire si $e = 1$, on a alors une parabole.

Réciproque : Soit $C : \rho = \frac{a}{b+c\cos\theta+d\sin\theta}$ avec $a \neq 0$, $b^2+c^2+d^2 \neq 0$.

- 1er cas : Si $b = 0$.

  $\rho = \frac{a}{c\cos\theta+d\sin\theta} = \frac{a}{r\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $r = \sqrt{c^2+d^2}$, on obtient une droite.

- 2ème cas : Si $b \neq 0$ et $c^2+d^2 \neq 0$

  $\rho = \frac{a/b}{1+c/b\cos\theta+d/b\sin\theta} = \frac{eh}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $e = \sqrt{\frac{c^2}{b^2}+\frac{d^2}{b^2}}$ et $h = \frac{a}{be}$.

  On reconnaît une conique d'excentricité e, de foyer O et de directrice associée

$$D: \ \rho = \frac{h}{\cos(\theta-\theta_0)} = \frac{a}{c\cos\theta+d\sin\theta} \tag{12.21}$$

- 3ème cas : Si $b \neq 0$ et $c^2+d^2 = 0$

  $\rho = \frac{b}{a}$. On obtient un cercle de centre O.