Chapitre 11 : Longueur et courbure d'un arc paramétré

Ici, $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé (voire direct si besoin)

I désigne un intervalle infini de $\mathbb{R}$.

$\begin{array}{rccc} \gamma\colon & I & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ & t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ où $k \geqslant 2$, et on note $\begin{array}{rccc} \vec{F}\colon & I & \longrightarrow & \mathrm{dir}(\mathscr{P}) \\ & t & \longmapsto & \overrightarrow{OM}(t) \end{array}$.

I Changement admissible de paramètre

Proposition, définition :

Soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^k$, et de réciproque $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ vers I (on dit que φ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^k$ de J vers I). Ce qui revient à dire que $\varphi\colon J \to I$, φ est $\mathcal{C}^k$, φ' ne s'annule pas et que $\varphi(J) = I$.

Soit $\hat{\gamma}$ l'arc paramétré $\begin{array}{rccc} \hat{\gamma}\colon & J & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ & \theta & \longmapsto & M(\varphi(\theta)) \text{ noté } \hat{M}(\theta) \end{array}$.

Alors $\hat{\gamma}$ a essentiellement les mêmes propriétés que γ.

On dit alors que φ définit un changement admissible de paramètre sur l'arc γ.

Plus précisément :

- $\hat{\gamma}$ a la même classe et le même support que γ.
- Soit $\theta_1 \in J$, et notons $t_1 = \varphi(\theta_1)$.

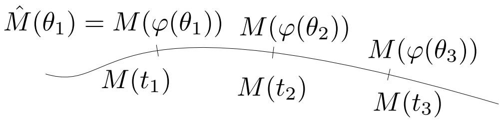
  $\hat{M}(\theta_1) = M(t_1)$ est un point multiple de γ si et seulement si c'est un point multiple de $\hat{\gamma}$

  Le point $M(t_1)$ est stationnaire sur γ si et seulement si $\hat{M}(\theta_1)$ est stationnaire sur $\hat{\gamma}$.

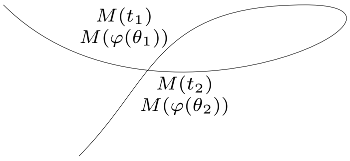
  Il y a une tangente en $M(t_1)$ sur γ si et seulement si il y a une tangente en $\hat{M}(\theta_1)$ sur $\hat{\gamma}$, et dans ce cas c'est la même.

  $M(t_1)$ est birégulier sur γ si et seulement si $\hat{M}(\theta_1)$ est birégulier sur $\hat{\gamma}$. Etc.

Explications



- La classe de $\hat{\gamma}$, c'est la classe de $\hat{\vec{F}}\colon \theta \mapsto \overrightarrow{O\hat{M}(\theta)}$, c'est-à-dire de $\hat{\vec{F}} = \vec{F} \circ \varphi$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\vec{F}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ aussi, $\hat{\vec{F}}$ est bien de même classe que $\vec{F}$.
- Le support de $\hat{\gamma}$, c'est $\left\{\hat{M}(\theta), \theta \in J\right\} = \{M(\varphi(\theta)), \theta \in J\} \underset{\text{car } \varphi \text{ est surjective}}{=} \{M(t), t \in J\}$
- Si $M(t_1) = M(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$:



Soient $\theta_1, \theta_2 \in J$ tels que $t_1 = \varphi(\theta_1)$ et $t_2 = \varphi(\theta_2)$.

Alors $M(\varphi(\theta_1)) = M(\varphi(\theta_2))$, et $\theta_1 \neq \theta_2$.

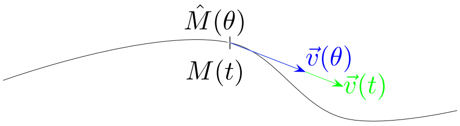
Inversement, si $\hat{M}(\theta_1) = \hat{M}(\theta_2)$ avec $\theta_1 \neq \theta_2$,

Alors $M(\varphi(\theta_1)) = M(\varphi(\theta_2))$ et $\varphi(\theta_1) \neq \varphi(\theta_2)$ (car φ est injective)

- $\forall \theta \in J, \hat{\vec{v}}(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\hat{M}}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \hat{\vec{F}}'(\theta) = (\vec{F} \circ \varphi)'(\theta) = \varphi'(\theta)\vec{F}'(\varphi(\theta))$

  Soit

$$\boxed{\forall \theta \in J, \hat{\vec{v}}(\theta) = \underbrace{\varphi'(\theta)}_{\neq 0}\,\vec{v}(t) \qquad (\text{avec } t = \varphi(\theta))} \tag{11.1}$$



- $\forall \theta \in J, \hat{\vec{a}}(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\hat{M}}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = \hat{\vec{F}}''(\theta) = \varphi''(\theta)\vec{F}'(\varphi(\theta)) + (\varphi'(\theta))^2\vec{F}''(\varphi(\theta))$

  Soit

$$\boxed{\forall \theta \in J, \hat{\vec{a}}(\theta) = \varphi''(\theta)\vec{v}(t) + \underbrace{(\varphi'(\theta))^2}_{\neq 0}\,\vec{a}(t) \qquad (\text{avec } t = \varphi(\theta))} \tag{11.2}$$

(11.1) et (11.2) montrent que $(\vec{v}(t), \vec{a}(t))$ est libre si et seulement si $(\hat{\vec{v}}(\theta), \hat{\vec{a}}(\theta))$ l'est :

Démonstration :

(En notant toujours $t = \varphi(\theta)$)

Supposons que $(\vec{v}(t), \vec{a}(t))$ est libre.

Soient maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, supposons que $\alpha\hat{\vec{v}}(\theta) + \beta\hat{\vec{a}}(\theta) = \vec{0}$.

Alors $\alpha\varphi'(\theta)\vec{v}(t) + \beta(\varphi''(\theta)\vec{v}(t) + (\varphi'(\theta))^2\vec{a}(t)) = \vec{0}$.

Donc, comme $(\vec{v}(t), \vec{a}(t))$ est libre, $\alpha\varphi'(\theta) + \beta\varphi''(\theta) = 0$ et $\beta(\varphi'(\theta))^2 = 0$

Donc, comme $\varphi'(\theta) \neq 0$, $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Supposons maintenant que $(\vec{v}(t), \vec{a}(t))$ est liée.

Soit alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha\vec{v}(t) + \beta\vec{a}(t) = \vec{0}$.

Si $\beta = 0$, alors $\vec{v}(t) = \vec{0}$ (car alors $\alpha \neq 0$), et donc $\hat{\vec{v}}(\theta) = \vec{0}$, donc $(\hat{\vec{v}}(\theta), \hat{\vec{a}}(\theta))$ est liée.

Si $\beta \neq 0$, alors $\vec{a}(t) = \frac{\alpha}{\beta}\vec{v}(t)$, et donc :

$$\varphi'(\theta)\hat{\vec{a}}(\theta) = \varphi'(\theta)\left(\varphi''(\theta) + (\varphi'(\theta))^2\frac{\alpha}{\beta}\right)\vec{v}(t) = \left(\varphi''(\theta) + (\varphi'(\theta))^2\frac{\alpha}{\beta}\right)\hat{\vec{v}}(\theta) \tag{11.3}$$

C'est-à-dire $\varphi'(\theta)\hat{\vec{a}}(\theta) - \left(\varphi''(\theta) + (\varphi'(\theta))^2\frac{\alpha}{\beta}\right)\hat{\vec{v}}(\theta) = \vec{0}$, et $\varphi'(\theta) \neq 0$, donc $(\hat{\vec{v}}(\theta), \hat{\vec{a}}(\theta))$ est liée.

D'où l'équivalence pour la birégularité.

Cela montre aussi que si $M(t)$ est stationnaire mais $\vec{a}(t) \neq \vec{0}$, alors $\hat{M}(\theta)$ est stationnaire, mais avec $\hat{\vec{a}}(\theta) \neq \vec{0}$ et colinéaire à $\vec{a}(t)$.

On admet que c'est vrai dans tous les autres cas...

Simplification des notations

- On enlève les chapeaux, ce qui revient à ne plus distinguer dans les notations $\vec{F}$ et $\vec{F}\circ\varphi$.
- On se repère alors avec les noms de variables.
- φ' est notée $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}$.

Les formules (11.1) et (11.2) deviennent alors :

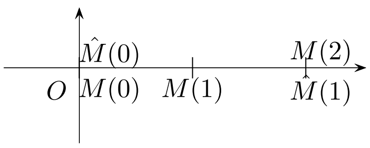
$$(11.1) \qquad \forall\theta\in J, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t) \qquad \text{où } t=\varphi(\theta) \tag{11.4}$$

Ou encore $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}$.

$$(11.2) \qquad \forall\theta\in J, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2} \tag{11.5}$$

Exemple :

$$\gamma : \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}_+, \qquad \hat{\gamma} : \begin{cases} x=\theta+\theta^3 \\ y=0 \end{cases}, \quad \theta\in\mathbb{R}_+ \tag{11.6}$$



II Longueur d'un arc compact $\mathcal{C}^2$ au moins

Soit $\begin{array}{rccl} \gamma\colon & [a,b] & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ & t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$, où $k\geqslant 2$.

Par définition, $\boxed{\text{longueur de } \gamma = \int_a^b \underbrace{\|\vec{v}(t)\|\,\mathrm{d}t}_{\text{"}\mathrm{d}l\text{"}} = l(\gamma)}$.

Explication

Version physique...

Version mathématique Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on introduit $t_0, t_1, \dots t_n$, subdivision régulière de $[a,b]$ (soit $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$)

On introduit les $M_i = M(t_i)$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$

L'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre 1 pour $\vec{F}\colon t\mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ (de classe $\mathcal{C}^k$) donne :

$$\underbrace{\vec{F}(t_i)}_{\overrightarrow{OM}_i} = \underbrace{\vec{F}(t_{i-1})}_{\overrightarrow{OM}_{i-1}} + \underbrace{(t_i-t_{i-1})}_{\frac{b-a}{n}}\underbrace{\overrightarrow{F'(t_{i-1})}}_{\vec{v}(t_{i-1})} + \vec{R}_i, \qquad \text{où } \|\vec{R}_i\| \leqslant \frac{(t_i-t_{i-1})^2}{2}\underbrace{\sup_{[a,b]}\|\vec{F}''(t)\|}_{M} \tag{11.7}$$

Ainsi, $\overrightarrow{M_iM_{i-1}} - \frac{b-a}{n}\vec{v}(t_{i-1}) = \vec{R}_i$

Donc $\left|\left\|\overrightarrow{M_iM_{i-1}}\right\| - \left\|\frac{b-a}{n}\vec{v}(t_{i-1})\right\|\right| \leqslant \left\|\overrightarrow{M_iM_{i-1}} - \frac{b-a}{n}\vec{v}(t_{i-1})\right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n^2}M$

Donc $\frac{b-a}{n}\|\vec{v}(t_{i-1})\| - \frac{(b-a)^2}{2n^2}M \leqslant \left\|\overrightarrow{M_iM_{i-1}}\right\| \leqslant \frac{b-a}{n}\|\vec{v}(t_{i-1})\| + \frac{(b-a)^2}{2n^2}M$

Donc, en sommant pour i de 1 à n :

$$\underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\vec{v}(t_{i-1})\|}_{\to\int_a^b\|\vec{v}(t)\|\,\mathrm{d}t}-\underbrace{\frac{(b-a)^2}{2n}M}_{\to 0}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left\|\overrightarrow{M_iM_{i-1}}\right\|\leqslant\underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\vec{v}(t_{i-1})\|}_{\to\int_a^b\|\vec{v}(t)\|\,\mathrm{d}t}+\underbrace{\frac{(b-a)^2}{2n}M}_{\to 0} \tag{11.8}$$

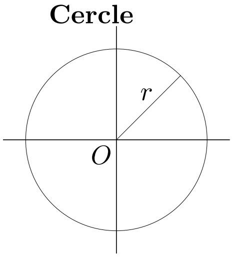
Remarque :

$l(\gamma)$ dépend à priori de γ (c'est-à-dire du paramétrage) et pas seulement du support.

Pour calculer une longueur d'une courbe géométrique simple : être raisonnable (en particulier, ne pas avoir de points doubles autres qu'en des points isolés)

Exemples

Cercle



$$C:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},\quad\theta\in[0,2\pi],\qquad\vec{v}:\begin{cases}x'=-r\sin\theta\\ y'=r\cos\theta\end{cases},\quad\theta\in[0,2\pi] \tag{11.9}$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}=r \tag{11.10}$$

Donc $l=\int_0^{2\pi}r\,\mathrm{d}\theta=2\pi r$ (si on avait pris $\theta\in[0,4\pi]$, on aurait eu le même support, mais $\int_0^{4\pi}r\,\mathrm{d}\theta=4\pi r$: d'où l'utilité de ne pas avoir « trop » de points doubles)

Ellipse

$$C:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases},\quad\theta\in[0,2\pi],\qquad\vec{v}:\begin{cases}x'=-a\sin\theta\\ y'=b\cos\theta\end{cases},\quad\theta\in[0,2\pi] \tag{11.11}$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta} \tag{11.12}$$

$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ (Pas de formule simple)

Formules Si $\vec{v}:\begin{cases}x'(t)\\ y'(t)\end{cases}$, alors $l(\gamma)=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$

Cas particulier :

Pour une courbe d'équation $y=f(x), x\in[a,b]$, dont un paramétrage est : $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$, $t\in[a,b]$, on a $l=\int_a^b\sqrt{1+f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$

Par exemple, avec $f\colon x\mapsto x^2$.

Longueur de l'arc de parabole entre les points d'abscisse 0 et $a>0$:

$$\begin{aligned}l&=\int_0^a\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t\underset{\substack{u=2t\\ \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}t}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\underset{\substack{u=\operatorname{sh}t,\ t\geqslant 0\\ \mathrm{d}u=\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{Argsh}2a}\operatorname{ch}^2t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{Argsh}2a}\frac{1+\operatorname{ch}2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\operatorname{Argsh}(2a)+\frac{1}{8}\operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh}(2a))\\&=\frac{1}{4}\ln\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)+\frac{1}{2}a\sqrt{1+4a^2}\end{aligned} \tag{11.13}$$

III Abscisse curviligne

On suppose toujours γ de classe $\mathcal{C}^2$ au moins.

A) Définition

On appelle abscisse curviligne sur γ toute primitive de $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|$.

Ainsi, une abscisse curviligne sur γ, c'est une fonction $S\colon I \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\forall t \in I, S'(t) = \|\vec{v}(t)\|$. Si S en est une, on a donc, pour tous $a, b \in I$:

$S(b) - S(a) = \int_a^b \|\vec{v}(t)\| \,\mathrm{d}t$: longueur (algébrique par rapport au sens des t croissants) de l'arc de courbe situé entre les points de paramètre $t = a$ et $t = b$.

Si S est la primitive de $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|$ nulle en un certain $a \in I$, $S(t)$ est alors la longueur algébrique de l'arc situé entre $M(a)$ et $M(t)$.

Ainsi, si $a \in I$, $t \mapsto \displaystyle\int_a^t \|\vec{v}(u)\| \,du$ est l'abscisse curviligne nulle en a.

B) Paramétrisation admissible avec l'abscisse curviligne

Ici, et jusqu'à la fin du chapitre, γ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k, k \geqslant 2$.

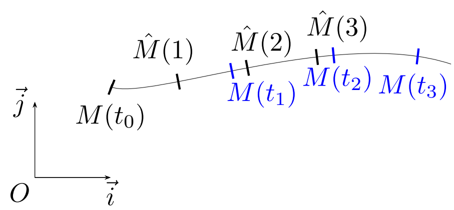
Dans ce cas, $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$:

$t \mapsto \vec{v}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et comme $t \mapsto \vec{v}(t)$ ne s'annule pas, $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|$ a la même classe.

Ainsi, si S est une fonction abscisse curviligne, S est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Sa dérivée, $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|$ ne s'annule pas et garde donc un signe constant. Donc S réalise une bijection de I vers un intervalle J. Comme sa dérivée ne s'annule pas, c'est donc un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ de I vers J. Cela correspond donc à un changement admissible de paramétrage sur γ (pour S^{-1})

On note $\hat{\gamma}\colon \begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ s & \longmapsto & M(S^{-1}(s)) \end{array}$ c'est à dire $M(t)$ où $S(t) = s$.

Exemple :



On prend comme origine le point d'abscisse curviligne $M(t_0)$.

Le point $\hat{M}(s)$ correspond dons au point d'abscisse curviligne s. On a alors un mouvement uniforme ($\|\hat{\vec{v}}\| = \text{cte}$), et même $\|\hat{\vec{v}}\| = 1$.

Proposition :
$\forall s \in J, \dfrac{\mathrm{d}\vec{\hat{M}}}{\mathrm{d}s}(s) = \vec{T}(t)$, où $S(t) = s$ (rappel : $\vec{T}(t)$ est la tangente à la courbe, orientée, en $M(t)$ et $\|\vec{T}\| = 1$)

En effet :

$$\forall s \in J,\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}(s) = (\vec{F} \circ S^{-1})'(s) = \underbrace{(S^{-1})'(s)}_{=\frac{1}{S'(S^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|}} \times \underbrace{\vec{F}'(S^{-1}(s))}_{=\vec{v}(t)} = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \vec{T}(t) \qquad (11.14)$$

Où $S(t) = s$.

On retiendra

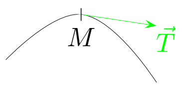
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(t) = \|\vec{v}(t)\| \qquad \frac{\mathrm{d}S^{-1}}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \text{ où } t = S^{-1}(s) \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}(s) = \vec{T}(t) \qquad (11.15)$$

Ou encore, avec les notations simplifiées :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\vec{v}\| \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \vec{T} \qquad (11.16)$$

IV Repère de Frenet, courbure

A) Repère de Frenet



Le repère de Frenet en un point M de la courbe est, par définition : $(M, \vec{T}, \vec{N})$ où $\vec{N}$ est tel que ce repère soit orthonormé direct.

Attention : M, $\vec{N}$ et $\vec{T}$ « bougent » et sont fonctions, au choix, de t ou s.

Remarque :
$\vec{T}$ est fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ de t (ou de s). On introduit les fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telles que $\vec{T} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Alors $\vec{N} = -b\vec{i} + a\vec{j}$, donc $\vec{N}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

B) Dérivées des vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ (en tant que fonctions de s)

- $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{T} = 0$

  En effet, $\|\vec{T}\|^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} = \text{cte} = 1$.

  Donc $2\vec{T} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = 0$

  Il existe donc $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N}$ (dépendant de s).

  γ s'appelle la courbure algébrique au point M considéré.

- $\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{N} = 0$ (même raisonnement)

  Il existe alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = x\vec{T}$

  Mais $\vec{T} \cdot \vec{N} = \text{cte} = 0$.

  La dérivation donne alors $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{N} + \vec{T} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = 0$, c'est-à-dire $\gamma + x = 0$.

  Donc $\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\vec{T}$.

C) Composantes de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le repère de Frenet

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{T} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\vec{v}\| \tag{11.17}$$

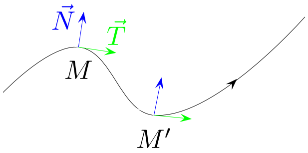
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{T} + \gamma\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{N} \tag{11.18}$$

Ainsi :

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{\substack{\text{vitesse}\\\text{numérique}}}\vec{T}, \qquad \vec{a} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}}_{\substack{\text{accélération}\\\text{tangentielle}}}\vec{T} + \underbrace{\gamma\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2}_{\substack{\text{accélération}\\\text{normale}}}\vec{N} \tag{11.19}$$

Il en résulte que M est birégulier si et seulement si $\gamma \neq 0$ (puisque déjà M est régulier, donc $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \neq 0$)

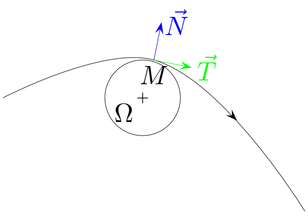
Commentaire (en supposant $\gamma \neq 0$) :



$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N}$. Or, $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$ est l'accélération pour le paramétrage avec s. Il doit donc être dirigé dans la concavité de la courbe.

De plus, en considérant toujours le mouvement uniforme correspondant au parcours avec s, « on sait » (intuitivement) que $|\gamma|$ est d'autant plus grand que c'est « courbe », puisque plus c'est courbe, plus l'accélération normale est importante.

Explication plus précise du mot courbure (toujours avec $\gamma \neq 0$)



On note $R = \frac{1}{\gamma}$: rayon (algébrique) de courbure en M.

L'accélération normale est alors $\gamma\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{N} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$, c'est-à-dire celle qu'on obtient pour un mouvement sur un cercle de rayon R.

Soit Ω tel que $\overrightarrow{M\Omega} = R\vec{N}$. Ω s'appelle le centre de courbure au point M.

Le cercle de centre Ω et de rayon $|R|$ (passant par M) s'appelle le cercle osculateur à la courbe en M. C'est celui qui est « le mieux » tangent à la courbe (voir fin du cours)

D) Autre formule

Théorème (« de relèvement » – admis) :
Soit $\vec{G}$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \geqslant 0$) sur un intervalle I, à valeur sur un $\mathbb{R}$-ev euclidien orienté de dimension 2, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $\|\vec{G}\| = \text{cte} = 1$.

Alors il existe une fonction $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que :

$$\forall t \in I, \vec{G}(t) = \cos(\theta(t))\vec{\imath} + \sin(\theta(t))\vec{\jmath} \tag{11.20}$$

En d'autres termes, on peut trouver une mesure $\theta(t)$ de l'angle orienté $(\widehat{\vec{\imath};\vec{G}(t)})$ de sorte que $t \mapsto \theta(t)$ soit de classe $\mathcal{C}^p$.

Ici, la fonction $\vec{T}\colon s \mapsto \vec{T}(s)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de norme 1.

Il existe donc $s \mapsto \alpha(s)$, de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ de sorte que :

$$\forall s \in J, \vec{T}(s) = \cos(\alpha(s))\vec{\imath} + \sin(\alpha(s))\vec{\jmath} \tag{11.21}$$

Ainsi, $\forall s \in J$, $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(s) = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(s)\sin(\alpha(s))\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(s)\cos(\alpha(s))\vec{\jmath} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(s)\vec{N}(s)$

D'où la formule : $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$

En pratique : $\gamma = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|v\|}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$

E) Récapitulation des méthodes

- 1ère méthode

  $M(t)\left|\begin{matrix}x(t)\\y(t)\end{matrix}\right.$, $\vec{v}(t)\left|\begin{matrix}x'(t)\\y'(t)\end{matrix}\right.$, donc $\|\vec{v}(t)\|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$

  $\vec{T}(t) = \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|}\vec{v}(t)\left|\begin{matrix}a(t)\\b(t)\end{matrix}\right.$ (avec $a = \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}$, $b = \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}$)

  Et $\vec{N}(t)\left|\begin{matrix}-b(t)\\a(t)\end{matrix}\right.$

  Or, $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N}$ d'une part,

  Et d'autre part $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}$, soit $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\left|\begin{matrix}\frac{a'(t)}{\|\vec{v}(t)\|}\\\frac{b'(t)}{\|\vec{v}(t)\|}\end{matrix}\right.$

  D'où on tire γ après calculs…

- 2ème méthode :

  $M(t)\left|\begin{matrix}x(t)\\y(t)\end{matrix}\right.$, $\vec{v}(t)\left|\begin{matrix}x'(t)\\y'(t)\end{matrix}\right.$, $\vec{a}(t)\left|\begin{matrix}x''(t)\\y''(t)\end{matrix}\right.$

  $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{T}$, $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{T} + \gamma\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{N}$.

  Donc $\det(\vec{v},\vec{a}) = [\vec{v},\vec{a}] = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3[\vec{T},\vec{N}] = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3$

  D'où $\gamma = \frac{[\vec{v},\vec{a}]}{\|\vec{v}\|^3} = \frac{x'y''+y'x''}{\|\vec{v}\|^3}$.

- 3ème méthode :

  $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$ où α est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{\imath};\vec{T}})$, ou aussi de $(\widehat{\vec{\imath};\vec{v}})$.

Exemple :

Parabole $\begin{cases} x = x \\ y = ax^2 \end{cases}$

$M\left|\begin{matrix}x\\ax^2\end{matrix}\right.$, $\vec{v}\left|\begin{matrix}1\\2ax\end{matrix}\right.$, $\vec{a}\left|\begin{matrix}0\\2a\end{matrix}\right.$.

Donc $[\vec{v}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2ax & 2a \end{vmatrix} = 2a$, et $\|\vec{v}\|^3 = (1+4a^2x^2)^{3/2}$.
Donc $\gamma = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$.

Complément hors programme : à propos du cercle osculateur Soit un arc birégulier de classe $\mathcal{C}^3$. Soit M_0 un point de l'arc, origine des abscisses curvilignes. Le repère de Frenet en M_0 est noté $(M_0, \vec{T}_0, \vec{N}_0)$.

Développement limité de $\vec{G}$: $s \mapsto \overrightarrow{M_0M(s)}$ à l'ordre 3 en 0

$$\overrightarrow{M_0M(s)} = \vec{0} + s\vec{T}_0 + \frac{s^2}{2}\gamma_0\vec{N}_0 + \frac{s^3}{6}\vec{G}'''(0) + s^3\vec{\varepsilon}(0) \tag{11.22}$$

Où $\vec{\varepsilon}(s) \xrightarrow[s\to 0]{} \vec{0}$, et $\vec{G}'''(0) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}(0)\vec{N}_0 + \gamma_0\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s}(0) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}(0)\vec{N}_0 - \gamma_0^2\vec{T}_0$.

Composantes de $M(s)$ dans $(M_0, \vec{T}_0, \vec{N}_0)$

$$\overrightarrow{M_0M(s)} = (s - \gamma_0^2\frac{s^3}{6} + o(s^3))\vec{T}_0 + (\gamma_0\frac{s^2}{2} + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}(0)\frac{s^3}{6} + o(s^3))\vec{N}_0 \tag{11.23}$$

Un cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ (dans $(M_0, \vec{T}_0, \vec{N}_0)$) passant par $M_0(0,0)$ a pour équation

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0}_{=\Omega M^2 - R^2 \text{ où } M(x,y)} = 0 \tag{11.24}$$

Définition :
Puissance d'un point M du plan par rapport à ce cercle $\varphi(M) = \Omega M^2 - R^2$
Ici, $\varphi(M(s)) = (-2x_0)s + (-2y_0\gamma_0\frac{1}{2} + 1)s^2 + (2x_0\gamma_0^2\frac{1}{6} - \frac{2}{6}y_0\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}(0))s^3 + o(s^3)$
Pour que $\varphi(M(s))$ soit infiniment petit d'ordre le plus élevé possible, on prend $x_0 = 0$ (ainsi, $-2x_0 = 0$), ce qui revient à prendre Ω sur la normale à l'arc en M_0 ; et on peut prendre aussi $y_0 = \frac{1}{\gamma_0} = R_0$ (ainsi, $-y_0\gamma_0 + 1 = 0$), ce qui revient alors à prendre le cercle osculateur. Ainsi, pour ce choix, $\varphi(M(s)) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}(0)\right)}_{\neq 0 \text{ en général}} s^3 + o(s^3)$

Ainsi, le cercle osculateur traverse en général la courbe (car φ change de signe), et c'est bien celui qui est « le mieux » tangent à la courbe.