Chapitre 10 : Courbes paramétrées (planes)

I désigne ici un intervalle infini de $\mathbb{R}$.

P désigne un plan affine de direction P, euclidien orienté quand il le faut, et $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en est un repère (orthonormé direct si nécessaire)

I Généralités

A) Préliminaire

Soit $\gamma\colon \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$

Soit $A \in \mathscr{P}$, posons $\vec{F}_A\colon \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & P \\ t & \longmapsto & \overrightarrow{AM(t)} \end{array}$

($\vec{F}_A$ est une fonction vectorielle)

Proposition :
La classe de la fonction vectorielle $\vec{F}_A$, ainsi que les vecteurs de ses éventuelles dérivées d'ordre $\geqslant 1$ ne dépendent pas du choix de A.

En effet : Si B est un autre point de P :

$$\vec{F}_B(t) = \overrightarrow{BM(t)} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM(t)} = \overrightarrow{BA} + \vec{F}_A(t) \tag{10.1}$$

Donc $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ sont bien de même classe, et sont égales à une constante près, donc les dérivées successives sont bien égales.

Définition :
La classe de γ, c'est-à-dire de $t \mapsto M(t)$ est, par définition, la classe de $\vec{F}_A\colon t \mapsto \overrightarrow{AM(t)}$ (qui ne dépend pas de A). Et, si cette fonction est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 1$, pour tout $t \in I$, $\frac{\mathrm{d}^k \vec{F}_A}{\mathrm{d}t^k}(t)$ est noté $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^k M}}{\mathrm{d}t^k}(t)$.

B) Définition

Définition :
Soit $k \geqslant 1$. Un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ du plan $\mathscr{P}$, c'est une fonction $\gamma\colon \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ de classe C^k sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Vocabulaire :

Si $\gamma\colon \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$:

- $\{M(t), t \in I\}$ s'appelle le support de l'arc paramétré γ, ou aussi la trajectoire du mobile (tel que, pour tout $t \in I$, $M(t)$ soit la position du mobile « à l'instant t »)
- $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{v}(t)$: vecteur vitesse à l'instant t.
- Si $k \geqslant 2$: $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{a}(t)$ est le vecteur accélération à l'instant t.
- On dit que le point de paramètre t est stationnaire lorsque $\vec{v}(t) = \vec{0}$.
- Un point A du support est dit multiple (ou plus précisément double, triple…) lorsqu'il existe t_1, t_2 distincts de I tels que $M(t_1) = M(t_2) = A$

Finalement, la donnée d'un arc paramétré correspond à la donnée d'un mouvement d'un point mobile.

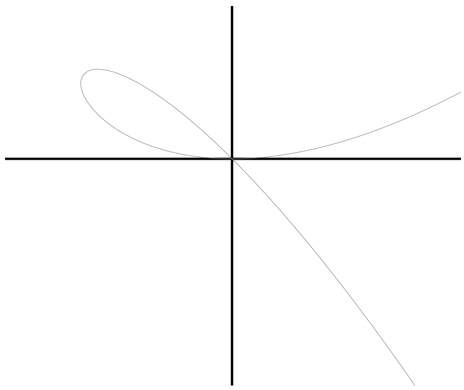
Exemple :

Construire le support de l'arc paramétré $t \mapsto M(t)$ où $M(t)\begin{pmatrix} t(t+1) \\ t^2(t+1) \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$.

$$x(t) = t^2 + t \qquad x'(t) = 2t + 1 \tag{10.2}$$

$$y(t) = t^3 + t^2 \qquad y'(t) = 3t^2 + 2t \tag{10.3}$$

t		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		0	
$x'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x(t)$	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
$y'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$



II Tangente

Dans tout ce paragraphe, $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 1$.

A) Définition

Définition :

- Soit $t_0 \in \mathring{I}$.

  On dit que l'arc γ présente une tangente au point $M_0 = M(t_0)$ lorsque la fonction $t \mapsto \dfrac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|}$ est définie au voisinage épointé (c'est-à-dire en retirant t_0) de t_0, admet une limite à droite et une limite à gauche en t_0, ces deux limites étant égales ou opposées.

  Dans ce cas, on note $\vec{T}(t_0)$ la limite à droite, et la tangente à la courbe au point M_0 est par définition la droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{T}(t_0)$ (appelé vecteur unitaire de sur la tangente orientée)

  $\dfrac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|}$ est de norme 1 au voisinage épointé de t_0, donc $\|\vec{T}(t_0)\| = 1$.
- Si t_0 est une extrémité de I, on adapte la définition…

B) Cas d'un point régulier

Définition :

$M(t_0)$ est régulier $\iff \vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$

$M(t_0)$ est stationnaire $\iff \vec{v}(t_0) = \vec{0}$

Supposons ici que $\vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$, notons $M_0 = M(t_0)$, $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$.

Le DL à l'ordre 1 en t_0 de la fonction vectorielle $\vec{F}\colon t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ donne :

$\vec{F}(t) = \vec{F}(t_0) + (t-t_0)\vec{F}'(t_0) + (t-t_0)\vec{\varepsilon}(t)$ où $\lim_{t\to t_0} \vec{\varepsilon}(t) = \vec{0}$

Ou encore : $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t_0) + (t-t_0)\vec{v}(t_0) + (t-t_0)\vec{\varepsilon}(t)$

C'est-à-dire $\overrightarrow{M_0M(t)} = (t-t_0)(\vec{v}_0 + \vec{\varepsilon}(t))$

Donc $\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\| = |t-t_0| \underbrace{\|\vec{v}_0 + \vec{\varepsilon}(t)\|}_{\substack{\text{tend vers } \vec{v}_0 \\ \text{lorsque } t\to t_0}}$

Donc $\dfrac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|} = \frac{t-t_0}{|t-t_0|}\frac{\vec{v}_0+\vec{\varepsilon}(t)}{\|\vec{v}_0+\vec{\varepsilon}(t)\|}$ est définie au voisinage épointé de t_0, tend vers $\frac{\vec{v}_0}{\|\vec{v}_0\|}$ à droite et $\frac{-\vec{v}_0}{\|\vec{v}_0\|}$ à gauche.

Ainsi, en un point non stationnaire, $\vec{T}(t_0) = \frac{\vec{v}_0}{\|\vec{v}_0\|}$.

Équation de la tangente

$$M(t)\left|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right., \qquad \vec{v}(t)\left|\begin{matrix} x'(t) \\ y'(t) \end{matrix}\right. \tag{10.4}$$

Tangente en $M_0 = M(t_0)$:

$$y'(t_0)(x-x_0) - x'(t_0)(y-y_0) = 0, \quad (\text{avec } x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)) \tag{10.5}$$

Donc si $x'(t_0) = 0$, on a une tangente verticale, sinon de pente $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

C) Cas d'un point stationnaire « pas méchant »

On suppose que $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$, mais que $\left\{ i \geqslant 2, \gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^i \text{ et } \frac{\mathrm{d}^i\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^i}(t_0) \neq \vec{0} \right\} \neq \varnothing$

C'est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, on note p son plus petit élément.

Le DL à l'ordre p de $\vec{F}$ donne alors :

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\left(\frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0) + \vec{\varepsilon}(t)\right), \qquad \text{où } \vec{\varepsilon}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \vec{0} \tag{10.6}$$

Il en résulte comme pour un point régulier qu'il y a une tangente en $M(t_0)$, et qu'elle est dirigée par $\frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$.

Cas particulier :

Si γ est de classe $\mathcal{C}^2$, si $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$ et $\vec{a}(t_0) \neq \vec{0}$, il y a alors une tangente en $M(t_0)$, dirigée par $\vec{a}(t_0)$.

III Étude locale « plus poussée »

On prend les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, et l'arc est supposé ici de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 2$.

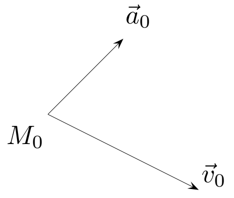
A) Cas d'un point birégulier

On suppose que $M(t_0)$ est birégulier, c'est-à-dire que $\vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$ et $(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0))$ est libre.

Le DL de $\vec{F}$ en t_0 à l'ordre 2 donne :

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = (t-t_0)\vec{v}_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2}\vec{a}_0 + (t-t_0)^2\varepsilon(t), \text{ où } \lim_{t\to t_0} \vec{\varepsilon}(t) = \vec{0} \tag{10.7}$$

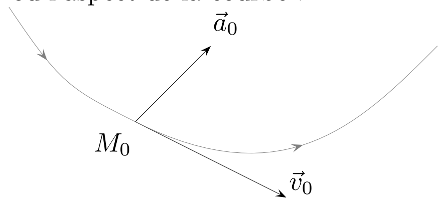
On se place dans le repère $(M_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0)$:



Dans ce repère :

$M \left| \begin{array}{l} (t-t_0) + (t-t_0)^2\alpha(t) \\ \frac{(t-t_0)^2}{2} + (t-t_0)^2\beta(t) \end{array} \right.$ où $\vec{\varepsilon}(t) = \alpha(t)\vec{v}_0 + \beta(t)\vec{a}_0$ (donc $\alpha(t), \beta(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$)

D'où l'aspect de la courbe :



On dit alors qu'on a un point ordinaire.

B) Cas plus général

On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$ tels que :

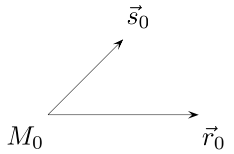
- γ est de classe $\mathcal{C}^q$; on note $\vec{r}_0 = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$, $\vec{s}_0 = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^q M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$
- $\vec{r}_0 \neq \vec{0}$ et $p = \min\left\{ i \in \mathbb{N}^*, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^i M}}{\mathrm{d}t^i}(t_0) \neq \vec{0} \right\}$
- $(\vec{r}_0, \vec{s}_0)$ est libre, et $q = \min\left\{ j \geqslant p+1, \left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^p M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0), \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^j M}}{\mathrm{d}t^j}(t_0) \right) \text{ est libre} \right\}$

Le DL à l'ordre q de $\vec{F}$ en t_0 donne :

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{r}_0 + \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_1\vec{r}_0 + \dots + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{s}_0 + (t-t_0)^q\vec{\varepsilon}(t) \tag{10.8}$$

Où $\lim_{t\to t_0} \vec{\varepsilon}(t) = \vec{0}$

Dans le repère $(M_0, \vec{r}_0, \vec{s}_0)$:

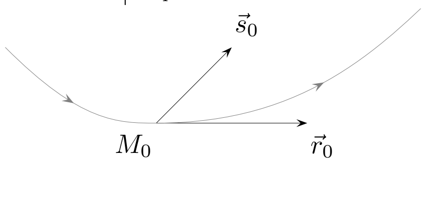


On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M(t)} = &\frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{r}_0 + (t-t_0)^p \left(\frac{(t-t_0)}{(p+1)!}\lambda_1 + \dots + (t-t_0)^{q-p}\alpha(t) \right)\vec{r}_0 \\ &+ \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{s}_0 + (t-t_0)^q\beta(t)\vec{s}_0 \end{aligned} \tag{10.9}$$

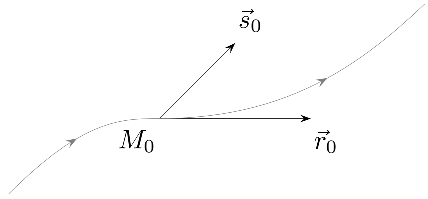
Avec $\vec{\varepsilon}(t) = \alpha(t)\vec{r}_0 + \beta(t)\vec{s}_0$, donc $\alpha(t), \beta(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$

Donc $M(t) \left| \begin{array}{l} \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o((t-t_0)^p) \\ \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o((t-t_0)^q) \end{array} \right.$



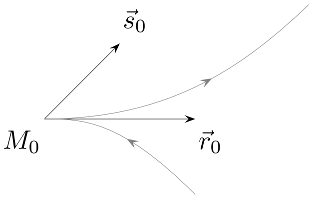
p impair $\quad$ q pair

point ordinaire



p impair $\quad$ q impair

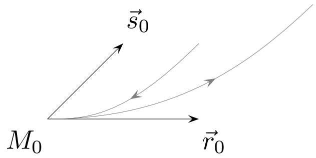
point d'inflexion



p pair $\quad$ q impair

point de rebroussement

de première espèce



p pair $\quad$ q pair

point de rebroussement

de deuxième espèce

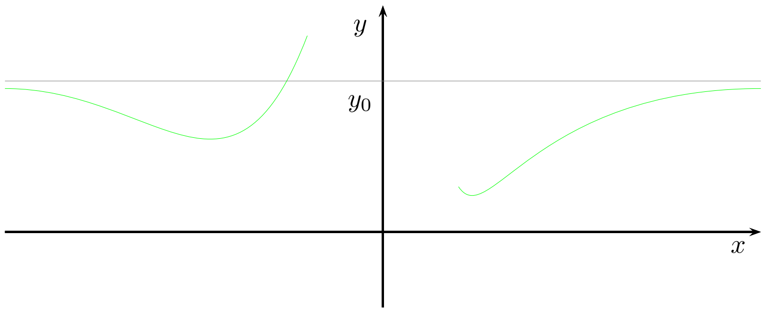
IV Branches infinies

Quelques situations, pour un arc $\gamma \colon \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & M(t) \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right. \end{array}$.

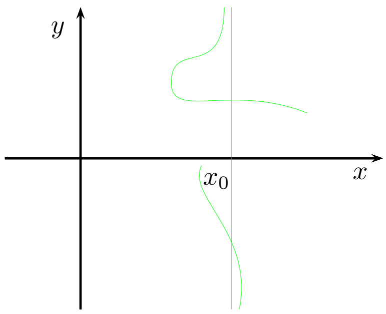
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$, adhérent à I.

On suppose que $x(t)$ et $y(t)$ ont une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ lorsque $t \to a$, et que l'une de ces limites est infinie.

- 1^{er} cas : $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to y_0 \in \mathbb{R}$:



- $2^{\text{ème}}$ cas : $x(t) \to x_0 \in \mathbb{R}$, $y(t) \to \pm\infty$:



- $3^{\text{ème}}$ cas : $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to \pm\infty$:
  - ◇ Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to \alpha \in \mathbb{R}$, on a une direction asymptotique de pente α.
    - — Si $y(t) - \alpha x(t) \to \beta \in \mathbb{R}$, on a une asymptote d'équation $y = \alpha x + \beta$
    - — Si $y(t) - \alpha x(t) \to \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction de pente α.
    - — Si $y(t) - \alpha x(t)$ n'a pas de limite, on n'a rien de mieux qu'une direction asymptotique.
  - ◇ Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$, on a une branche parabolique verticale.
  - ◇ Si $\frac{y(t)}{x(t)}$ n'a pas de limite, on n'a rien à dire...

Remarque :
Si une courbe C a pour équation une équation de la forme $C : \; y = f(x), x \in I$, alors elle admet le paramétrage évident $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in I$

V Marche à suivre pour la construction du support d'un arc paramétré

Soit $\gamma \colon \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & M(t) \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix} \text{ dans } \mathbb{R} \end{array}$, de support C.

1. Étude du domaine de définition, de la classe...
2. Réduction de l'intervalle d'étude :

   Exemples, dans le cas $I = \mathbb{R}$:

   (a) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}_+$, et on obtient tout C.

   (b) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}_+$, et on obtient C en faisant la symétrie par rapport à O.

   (c) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}_+$, et on obtient C en faisant la symétrie par rapport à $(Ox$ selon $(Oy$.

   (d) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$. On peut se limiter à $\mathbb{R}_+$, et on obtient C en faisant la symétrie par rapport à $(Oy$ selon $(Ox$.

   (e) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$. L'étude entre 0 et T donne toute la courbe.

   (f) $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t+T) = x(t) + \alpha \\ y(t+T) = y(t) + \beta \end{cases}$. On fait l'étude entre 0 et T, puis on fait les translations $n\vec{u}, n \in \mathbb{Z}$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
3. Tableau de variations, limites.
4. Points particuliers, stationnaires, branches infinies...

VI Paramétrages classiques, coniques

- $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

  Alors $\mathscr{E}$ est le support de l'arc paramétré $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

- $\mathscr{H}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

  Paramétrage :

  $\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ pour la branche des $x>0$.

  $\begin{cases} x = -a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ pour l'autre branche.

- $\mathscr{P}$: $y^2=2px \to$

  Paramétrage : $\begin{cases} y = y \\ x = \frac{y^2}{2px} \end{cases}, y\in\mathbb{R}$.

- Tangente à une ellipse :

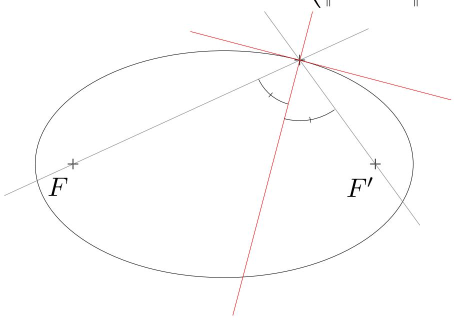
  Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F et F' et de ½grand axe a.

  Soit $t\mapsto M(t)$ un paramétrage de l'ellipse, de classe $\mathcal{C}^1$ au moins et sans point stationnaire.

  On a : $\forall t\in I, \left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|+\left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|=2a$

  Ainsi, en dérivant, $\forall t\in I, \frac{\overrightarrow{FM(t)}\cdot\vec{v}(t)}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|}+\frac{\overrightarrow{F'M(t)}\cdot\vec{v}(t)}{\left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|}=0$

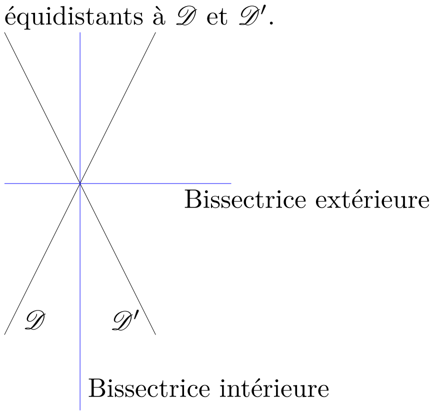
  C'est-à-dire $\forall t\in I, \vec{v}(t)\perp\left(\frac{\overrightarrow{FM(t)}}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|}+\frac{\overrightarrow{F'M(t)}}{\left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|}\right)$

  Ainsi, $\vec{v}(t)$ est dans la direction de la bissectrice extérieure.

  Définition :

  La bissectrice de deux droites $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, c'est la réunion de deux droites qui sont l'ensemble des points équidistants à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

- Tangente à une hyperbole : $\vec{v}(t)$ est dirigé selon la bissectrice intérieure…(C'est la même chose que pour l'ellipse, mais on remplace les + par des −).
- Cas d'une parabole :

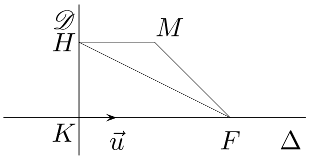
  Soit P une parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.

  Alors $P = \{M \in \mathscr{P}, MF = MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

  Soit K le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$, Δ la droite orthogonale à $\mathscr{D}$ passant par K.

  Ainsi, $\overrightarrow{HM}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{KM}$ sur $\mathrm{dir}(\Delta)$.

  Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire sur Δ de même sens que $\overrightarrow{KF}$. Alors $HM = \overrightarrow{KM} \cdot \vec{u}$.

  Donc $\forall t \in I, \left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\| = MF = MH = \overrightarrow{KM} \cdot \vec{u}$.

  Donc, en dérivant, $\forall t \in I, \frac{\vec{v}(t)\cdot\overrightarrow{FM}(t)}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} = \vec{v}(t) \cdot \vec{u}$

  Soit $\forall t \in I, \vec{v}(t) \perp \left(\frac{\overrightarrow{FM(t)}}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} - \vec{u}\right)$

  La tangente en M est donc la bissectrice des ½droites $[MF)$ et $[MH)$