Chapitre 9 : Fonctions vectorielles à valeurs dans un espace euclidien

E désigne ici un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension p, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..e_p)$ en est une base.

D est une partie de $\mathbb{R}$, $F\colon D \to E$ est une fonction de D dans E.

On note $f_1, f_2, \dots f_p$ les fonctions de D dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall t \in D, F(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i$ (On les appelle les fonctions coordonnées de F dans la base $\mathscr{B}$)

I Limite, continuité

Définition, proposition :

Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D, et $l \in E$ de coordonnées $l_1, l_2, \dots l_p$ dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}\lim_a f = l &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in D, (|t-a| < \alpha \implies \|F(t) - l\| < \varepsilon)\\ &\iff \forall i \in [\![1,p]\!], \lim a f_i = l_i \\ &\iff \lim_{t\to a} \|F(t) - l\| = 0\end{aligned} \tag{9.1}$$

Définition, proposition analogues pour l'éventuelle limite en $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque D est non majorée ou non minorée.

Définition et proposition analogues pour les éventuelles limites à droite ou à gauche en un point a de $\mathbb{R}$ tel que a soit adhérent à $D\cap]a, +\infty[$ ou $D\cap] - \infty, a[$.

On établit aisément les résultats concernant les opérations classiques sur les fonctions vectorielles : si $F, G\colon D \to E$ ont des limites en un point a de $\bar{\mathbb{R}}$ adhérent à D, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ a une limite finie en a.

Alors $F + G$, λF, φF, $F \cdot G$ et $\|F\|$ ont des limites en a, qui sont respectivement :

$$\lim_a F + \lim_a G, \qquad \lambda \lim_a F, \qquad \lim_a \varphi \lim_a F, \qquad \lim_a F \cdot \lim_a G \qquad \text{et } \lim_a \|F\| \tag{9.2}$$

Et dans les cas où E est orienté et de dimension 3, $F \wedge G$ a une limite en a qui est $\lim_a F \wedge \lim_a G$.

On a aussi le théorème :

Théorème (composition) :
Si $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ (avec $A \subset \mathbb{R}$), si $F\colon D \to E$ (avec $\varphi(A) \subset D$), si $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ est adhérent à A et si φ a une limite $a \in \bar{\mathbb{R}}$ en α, alors a est adhérent à D, et si de plus F a une limite en a, alors $F \circ \varphi$ a une limite en α, qui est $\lim_a F$.

Définition, proposition :

Soit $a \in D$.

$$\begin{aligned} F \text{ est continue en } a &\underset{\text{déf}}{\iff} F \text{ admet une limite en } a \text{ (c'est alors nécessairement } F(a)) \\ &\iff \forall i \in [\![1, p]\!], f_i \text{ est continue en } a. \end{aligned} \tag{9.3}$$

(Définition, proposition analogues pour l'éventuelle continuité à droite/à gauche en a)

Définition, proposition :

$$\begin{aligned} F \text{ est continue sur } D &\underset{\text{déf}}{\iff} \forall \in D, F \text{ est continue en } a \\ &\iff \forall i \in [\![1, p]\!], f_i \text{ est continue sur } D. \end{aligned} \tag{9.4}$$

On justifie aisément les résultats attendus concernant la continuité et les opérations classiques sur les fonctions vectorielles…

On montre aussi facilement le théorème :

Théorème :

Si K est un segment de $\mathbb{R}$, et si $F\colon K \to E$ est continue sur K, alors F est bornée sur K (c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in K, \|F(t)\| \leqslant M$)

En effet : On a l'équivalence suivante :

F est bornée $\iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i$ est bornée.

II Dérivabilité

Ici, I désigne un intervalle infini de $\mathbb{R}$, on conserve les notations du début avec $D = I$ (ainsi, F est une fonction de I dans E)

A) Définition, proposition

Soit $a \in I$.

Définition, proposition :

$$\begin{aligned} F \text{ est dérivable en } a &\iff \text{l'application } \begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \dfrac{F(t) - (a)}{t - a} \end{array} \text{ a une limite en } a \\ &\iff \forall i \in [\![1, p]\!], f_i \text{ est dérivable en } a \end{aligned} \tag{9.5}$$

Cette limite est alors notée $F'(a)$ ou $\frac{dF}{dt}(a)$, et on a $F'(a) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(a) e_i$.

Définitions, propositions analogues pour l'éventuelle dérivabilité et dérivée à droite ou à gauche en a, et pour la dérivabilité et la dérivée sur I.

Proposition :
(Rappel : I est un intervalle de $\mathbb{R}$)
Si F est dérivable sur I, alors $F' = 0 \iff F = \text{cte}$

Notions de dérivées successives, de classes de fonctions analogues aux définitions des fonctions réelles...

B) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

Si $F, G \colon I \to E$ sont dérivables en a, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, alors $F + G$, λF, φF et $F \cdot G$ sont dérivables en a, et on a :

$$(F+G)'(a) = F'(a) + G'(a) \tag{9.6}$$
$$(\lambda F)'(a) = \lambda F'(a) \tag{9.7}$$
$$(\varphi F)'(a) = \varphi'(a)F(a) + \varphi(a)F'(a) \tag{9.8}$$
$$(F \cdot G)'(a) = F'(a) \cdot G(a) + F(a) \cdot G'(a) \tag{9.9}$$

Et, dans le cas où E est de dimension 3 et orienté, $F \wedge G$ est dérivable en a et :

$$(F \wedge G)'(a) = F'(a) \wedge G(a) + F(a) \wedge G'(a) \tag{9.10}$$

Remarque :
On obtient ensuite par récurrence les formules de Leibniz pour $(\varphi F)^{(n)}$, $(F \cdot G)^{(n)}$ et $(F \wedge G)^{(n)}$, lorsque F, G et φ sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème (de composition) :
Si $\varphi \colon J \to \mathbb{R}$, $F \colon I \to E$ avec $\varphi(J) \subset I$, si $\alpha \in J$ et si φ est dérivable en α et F dérivable en $\varphi(\alpha)$, alors $F \circ \varphi$ est dérivable en α, et $(F \circ \varphi)'(\alpha) = \varphi'(\alpha)F'(\varphi(\alpha))$

Proposition :
Si $F \colon I \to E$ est dérivable en a, et si $F(a) \neq 0$, alors $\|F\|$ est dérivable en a, et :

$$(\|F\|)'(a) = \frac{F(a) \cdot F'(a)}{\|F(a)\|} \tag{9.11}$$

En effet : $\|F\| = \sqrt{F \cdot F}$, et en appliquant le théorème de dérivation pour la composition des fonctions réelles $F \cdot F$ et $u \mapsto \sqrt{u}$:

Si $F(a) \cdot F(a) \neq 0$ (c'est-à-dire si $F(a) \neq 0$), alors $\sqrt{F \cdot F}$ est dérivable en a, de dérivée $\frac{1}{2} \frac{2F(a) \cdot F'(a)}{\sqrt{F(a) \cdot F(a)}} = \frac{F(a) \cdot F'(a)}{\|F(a)\|}$.

Proposition :
Si F est dérivable sur I, et si $\|F\| = \text{cte}$, alors $F \perp F'$
(c'est-à-dire $\forall t \in I, F(t) \perp F'(t)$)

En effet : Si $\|F\| = \text{cte} = 0$, c'est que $F = \text{cte} = 0$, d'où le résultat.

Sinon, selon la propriété précédente, on peut écrire :

$$\forall a \in I, 0 = (\|F\|)'(a) = \frac{F(a) \cdot F'(a)}{\|F(a)\|} \tag{9.12}$$

Exemple :

$\mathbb{C}$ est un cas particulier d'espace euclidien sur $\mathbb{R}$. (de dimension 2, une base orthonormée étant par exemple la base $(1, \boldsymbol{i})$, la norme euclidienne étant le module)

On a déjà traité le cas des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (et on a dans ce cas une opération supplémentaire, à savoir la multiplication)

Pour tout $m \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto e^{mt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto me^{mt}$.

Lorsqu'on prend $m = i$, cette fonction, $t \mapsto e^{\boldsymbol{i}t}$ est de module constant égal à 1, et sa dérivée $t \mapsto \boldsymbol{i}e^{\boldsymbol{i}t} = e^{\boldsymbol{i}(t+\frac{\pi}{2})}$ lui est bien orthogonale.

III Intégration

Proposition, définition :

Soit $F\colon [a,b] \to E$, continue. Alors la valeur de $\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right) e_i$ est indépendante du choix de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_p)$. Cette valeur est par définition $\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t$.

La définition peut s'étendre aux fonctions continues par morceaux…

Propriétés :

Linéarité, relation de Chasles…

Théorème (admis) :

Si $F\colon [a,b] \to E$ est continue (ou continue par morceaux), et si $a \leqslant b$, alors :

$$\|\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \int_a^b \|F(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{9.13}$$

Théorème :

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et si $F\colon I \to E$ est continue, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de F sur I, et c'est l'unique primitive de F sur I nulle en a.

Il en résulte que si $F\colon I \to E$ est continue sur I, alors F admet une primitive G, et pour tous a, b de I, $\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$.

Conséquence :

Théorème d'intégration par parties, de changement de variables…

Remarque :

La formule de la moyenne est fausse (Avec $E = \mathbb{C}$ par exemple).

IV Inégalités et formules de Taylor diverses

Inégalité des accroissements finis Si F est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in]a,b[, \|F'(t)\| \leqslant k$, alors $\|F(b) - F(a)\| \leqslant k|b-a|$.

L'égalité des accroissements finis est fausse (voir encore avec $E = \mathbb{C}$)

Inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre $n-1$ Si F est de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ sur $[a,b]$, et si $M_n = \sup_{t\in[a,b]} \|F^{(n)}(t)\|$ (qui existe d'après le I), alors $\left\|F(b) - (F(a) + (b-a)F'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a))\right\| \leqslant \frac{|b-a|^n}{n!}M_n$

L'égalité de Taylor–Lagrange est fausse (elle est vraie dans $\mathbb{R}$ mais hors programme)

Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n-1$) Si $F\colon [a,b] \to E$ est de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$, alors :

$$F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{|b-t|^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.14}$$

(Cette formule s'établit aisément grâce à des intégrations par parties successives, et donne ainsi une preuve de l'inégalité de Taylor–Lagrange grâce au théorème de majoration vu au III)

Formule de Taylor–Young (à l'ordre n) Si $F\colon I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0, alors il existe $\varepsilon\colon I \to E$, telle que $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$ et :

$$\forall t \in I, F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2}F''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + t^n\varepsilon(t) \tag{9.15}$$

V Développements limités

Définition :

Soient I un intervalle infini de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, notons $D = I$ ou $I\setminus\{t_0\}$, et $F\colon D \to E$.

On dit que F admet un DL à l'ordre n en t_0 lorsqu'il existe une fonction $\varepsilon\colon D \to E$ et des éléments $a_0, a_1, \dots a_n$ de E tels que :

- $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$
- $\forall t \in D, F(t) = a_0 + (t-t_0)a_1 + (t-t_0)^2a_2 + \cdots + (t-t_0)^na_n + (t-t_0)^n\varepsilon(t)$

Propriétés :

- Unicité de l'éventuel DL à l'ordre n en t_0.
- Existence d'un DL à l'ordre n en t_0 $\Longrightarrow$ existence de DL en t_0 à tout ordre $q \leqslant n$.
- Existence d'un DL à l'ordre 0 en t_0 $\Longleftrightarrow$ existence d'une limite en t_0

En supposant maintenant que $t_0 \in I$ (c'est-à-dire que $D = I$) :

- Existence de DL à l'ordre 1 en t_0 $\Longleftrightarrow$ dérivabilité en t_0

  (Mais ne s'étend pas aux ordres supérieurs)

- F est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de t_0 $\Longrightarrow$ F a un DL à l'ordre n en t_0

  (Donné alors par la formule de Taylor–Young)

Opérations sur les DL

- Somme, produit par un scalaire : évident.
- Pour les autres opérations : voir ce qui se passe dans chaque cas particulier.