Chapitre 8 : Cercles et sphères

I Le cercle dans le plan

$\mathscr{P}$ désigne ici un plan affine euclidien.

A) Définition

Soit Ω un point de $\mathscr{P}$ et R un réel positif.

Définition :

Le cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\Omega M = R$ (il est réduit à $\{\Omega\}$ lorsque $R = 0$)

On appelle diamètre d'un cercle tout segment joignant deux points de ce cercle et passant par son centre.

B) Cercle circonscrit à un triangle

Théorème :

Par trois points non alignés A, B et C de $\mathscr{P}$ passe un et un seul cercle.

Démonstration :

Les médiatrices $\mathscr{D}_{AB}$ et $\mathscr{D}_{BC}$ des segments $[A, B]$ et $[B, C]$ sont sécantes (elles ne sont pas parallèles car leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non colinéaires), et si Ω désigne leur point d'intersection, alors on a $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega B = \Omega C$, d'où $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ (donc Ω est aussi sur la troisième médiatrice).

Il est alors clair que le cercle de centre Ω et de rayon $R = \Omega A = \Omega B = \Omega C$ est un cercle qui passe par A, B, C et que c'est le seul (car le centre d'un cercle passant par A, B, C appartient aux trois médiatrices de $[A, B], [B, C], [C, A]$)

Remarque :

Le théorème équivaut à dire que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes, ce qui ressort de la démonstration.

C) Une caractérisation

Proposition :

Soient A, B deux points de $\mathscr{P}$. L'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{MA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MB}$ est un cercle de diamètre $[A, B]$.

Démonstration :
Soit I le milieu de $[A,B]$. Alors :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=MI^2-IA^2 \tag{8.1}$$

Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff MI=IA$

D) Équation cartésienne

Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormé du plan $\mathscr{P}$.

Un point $M(x,y)$ appartient au cercle C de centre $\Omega(x_0,y_0)$ et de rayon R si et seulement si $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Par conséquent, tout cercle admet dans un repère orthonormé une équation du type $x^2+y^2-2ax-2by+k=0$. Inversement, une équation de ce type se met sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-k$, donc est l'équation, dans $\mathscr{R}$, d'un cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon $\sqrt{a^2+b^2-k}$ si $a^2+b^2\geqslant k$, et de l'ensemble vide sinon.

E) Intersection d'un cercle et d'une droite

Soit C un cercle de centre Ω et de rayon R, et soit $\mathscr{D}$ une droite.

Soit H la projection de Ω sur $\mathscr{D}$, notons $d=\Omega H$ (distance de Ω à $\mathscr{D}$)

Pour tout M de $\mathscr{D}$, on a : $\Omega M^2=\Omega H^2+HM^2=d^2+HM^2$

Donc $C\cap\mathscr{D}=\{M\in\mathscr{D},\Omega M=R\}=\left\{M\in\mathscr{D},HM^2=R^2-d^2\right\}$

- Si $d>R$, $C\cap\mathscr{D}$ est vide.
- Si $d=R$, $C\cap\mathscr{D}$ est réduit à H.
- Si $d<R$, $C\cap\mathscr{D}$ est formé des deux points de D qui sont situés à $\sqrt{R^2-d^2}$ de H.

Dans le cas où $C\cap\mathscr{D}$ est réduit à un point, on dit que $\mathscr{D}$ est tangente à C.

Remarque :
Si, dans un repère orthonormé, $\mathscr{D}$ a pour équation : $ux+vy+h=0$ et C a pour équation $x^2+y^2-2ax-2by+k=0$, alors $d=d(\Omega,\mathscr{D})=\frac{|ua+vb+h|}{\sqrt{u^2+v^2}}$

F) Tangente

Soit C un cercle de centre Ω, et soit M_0 un point de C. Il résulte de ce qui précède que la tangente à C passant par M_0 est la droite passant par M_0 et orthogonale à $\overrightarrow{\Omega M_0}$.

Si, dans un repère orthonormé, C a pour équation $x^2+y^2-2ax-2by+k=0$, et M_0 a pour coordonnées (x_0,y_0), une équation de cette tangente est alors $x(x_0-a)+y(y_0-b)=x_0(x_0-a)+y_0(y_0-b)$.

II La sphère dans l'espace

$\mathscr{E}$ désigne ici un espace affine euclidien de dimension 3.

A) Définition

Soit Ω un point de $\mathscr{E}$ et R un réel positif.

Définition :
La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\Omega M = R$ (elle est réduite à $\{\Omega\}$ lorsque $R = 0$)
On appelle diamètre d'une sphère tout segment joignant deux points de cette sphère et passant par son centre.

B) Sphère circonscrite à un tétraèdre

Théorème :
Par quatre points non coplanaires A, B, C et D de $\mathscr{E}$ passe une et une seule sphère.

Démonstration :
Les plans médiateurs $\mathscr{P}_{AB}$, $\mathscr{P}_{BC}$ et $\mathscr{P}_{CD}$ des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, D]$ sont sécants en un point Ω : en effet, les vecteurs normaux $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ forment une famille de rang 3 (puisque A, B, C et D ne sont pas coplanaires) donc le système formé des trois équations des plans (en repère orthonormé) est de Cramer. Si Ω désigne le point d'intersection de $\mathscr{P}_{AB}$, $\mathscr{P}_{BC}$ et $\mathscr{P}_{CD}$, alors on a $\Omega A = \Omega B$, $\Omega B = \Omega C$ et $\Omega C = \Omega D$, $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ (donc Ω est aussi sur les autres plans médiateurs).

Il est alors clair que la sphère de centre Ω et de rayon $R = \Omega A$ est une sphère qui passe par A, B, C et D et que c'est la seule (car le centre d'une sphère passant par A, B, C, D appartient à tous les plans médiateurs)

Remarque :
Le théorème équivaut à dire que les six plans médiateurs se rencontrent en un même point, ce qui ressort de la démonstration.

C) Une caractérisation

Proposition :
Soient A, B deux points de $\mathscr{E}$. L'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{MA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MB}$ est une sphère de diamètre $[A, B]$.

Démonstration :
Soit I le milieu de $[A, B]$. Alors :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 - IA^2 \tag{8.2}$$

Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI = IA$

D) Équation cartésienne

Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormé de $\mathscr{E}$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient au cercle C de centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R si et seulement si $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Par conséquent, toute sphère admet dans un repère orthonormé une équation du type $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$. Inversement, une équation de ce type se met sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - k$, donc est l'équation, dans $\mathscr{R}$, d'une sphère de centre $A(a, b, c)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - k}$ si $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant k$, et de l'ensemble vide sinon.

E) Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit S une sphère de centre Ω et de rayon R, et soit $\mathscr{P}$ un plan.

Soit H la projection de Ω sur $\mathscr{P}$, notons $d = \Omega H$ (distance de Ω à $\mathscr{P}$)

Pour tout M de $\mathscr{P}$, on a : $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = d^2 + HM^2$

Donc $S \cap \mathscr{P} = \{M \in \mathscr{P}, \Omega M = R\} = \left\{M \in \mathscr{P}, HM^2 = R^2 - d^2\right\}$

- Si $d > R$, $S \cap \mathscr{P}$ est vide.
- Si $d = R$, $S \cap \mathscr{P}$ est réduit à H.
- Si $d < R$, $S \cap \mathscr{P}$ est le cercle, tracé sur $\mathscr{P}$, de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Dans le cas où $S \cap \mathscr{P}$ est réduit à un point, on dit que $\mathscr{P}$ est tangent à S.

Remarque :

Si, dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ a pour équation : $ux + vy + wz + h = 0$ et S a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$, alors $d = d(\Omega, \mathscr{P}) = \frac{|ua+vb+wc+h|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$

F) Tangente

Soit S une sphère de centre Ω, et soit M_0 un point de S. Il résulte de ce qui précède que le plan tangent à S passant par M_0 est le plan passant par M_0 et orthogonal à $\overrightarrow{\Omega M_0}$.

Si, dans un repère orthonormé, la sphère S a pour équation $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+k = 0$, et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0), une équation de cette tangente est alors $x(x_0-a)+y(y_0-b)+z(z_0-c) = x_0(x_0 - a) + y_0(y_0 - b) + z_0(z_0 - c)$.

On peut généraliser ces notions de cercles et sphères à des espaces affines de dimensions quelconques, on parle alors d'hypersphères en dimension n.