Chapitre 5 : Intégration sur un segment de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

I Intégration des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle infini de $\mathbb{R}$, a et b deux réels, et on convient que si $a > b$, la notation $[a, b]$ désigne le segment $[b, a]$.

A) Notations et rappels

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction (dite « complexe, d'une variable réelle »)

Soient $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ les parties réelles et imaginaires de f (c'est-à-dire les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in I, f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + \boldsymbol{i}\operatorname{Im}(f(x))$)

On rappelle que f est continue sur I si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues sur I.

On notera de plus $\bar{f}$ et $|f|$ les fonctions définies sur I par : $\forall x \in I, \bar{f}(x) = f(\bar{x})$ et $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$. Bien entendu, si f est continue sur I, alors $\bar{f}$ et $|f|$ le sont aussi.

B) Fonctions continues par morceaux sur un segment

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

- f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$
- f a une limite (dans $\mathbb{C}$) à droite en x_{i-1}
- f a une limite (dans $\mathbb{C}$) à gauche en x_i

(C'est la définition analogue à celle qui concerne les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

On prouve immédiatement que, pour $f : [a, b] \to \mathbb{C}$:

f continue par morceaux $\iff$ $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ continues par morceaux.

Et donc, aisément :

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, alors les fonctions $\bar{f}$, $|f|$ $\lambda f + \mu g$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) sont aussi continues par morceaux.

C) Définition

Définition :

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux. On peut définir :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf}}{=} \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{i}\int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

Remarque :

S'il se trouve que f est à valeurs réelles, on retrouve bien l'intégrale de f sur $[a,b]$ au sens du chapitre précédent.

D) Premières propriétés

En utilisant la définition et les propriétés des intégrales des fonctions réelles, on établit aisément les propriétés suivantes :

1) Linéarité

Proposition :

Si f et g sont deux fonctions complexes continues par morceaux sur $[a,b]$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.2}$$

Remarque :

La relation de définition du D) peut maintenant être vue comme une conséquence de la linéarité.

2) Conjugaison

Proposition :

Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux : $\int_a^b \bar{f}(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$

3) Chasles

Proposition :

Si f est une fonction complexe continue par morceaux sur un segment contenant a, b, c :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.3}$$

4) Fonctions « presque partout égales »

Proposition :
Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et si f et g ne diffèrent que sur un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Il en résulte, comme pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, que le calcul de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux se ramène au calcul d'une somme d'intégrales de fonctions continues.

5) Majoration du module

Proposition :
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux.
Si $a \leqslant b$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Démonstration :
Posons $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = re^{i\theta}$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ (alors $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = r$)

Alors :

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.4}$$

Soient u et v les parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto e^{-i\theta} f(t)$.

Alors $\underbrace{r}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t}_{\in\mathbb{R}} + \boldsymbol{i}\underbrace{\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t}_{\in\mathbb{R}}$. Donc $\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = r$.

Or, pour tout $t \in [a,b]$, $u(t) \leqslant |u(t) + \boldsymbol{i}v(t)| = |e^{-i\theta} f(t)| = |f(t)|$

Donc $r = \int_a^b u(t) \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

E) Intégrale d'une fonction continue et primitives

Rappel :
Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$. Alors f est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables, et on a alors : $\forall x \in I, f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + \boldsymbol{i}(\operatorname{Im} f)'(x)$

Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$, dérivable. Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors $\exists k \in \mathbb{C}, \forall x \in I, f(x) = k$ (évident puisque $f' = 0 \iff (\operatorname{Re} f)' = (\operatorname{Im} f)' = 0$, et I est un intervalle)

Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$. Une primitive de f (sur I) est une fonction $F\colon I \to \mathbb{C}$, dérivable, telle que $F' = f$. Si f admet une primitive F, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensembles des fonctions $F + k$, k décrivant $\mathbb{C}$. (C'est un corollaire du point précédent)

Exemple :
Rappelons que pour $z = u + \boldsymbol{i}v$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on définit e^z par :

$$e^z = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + \boldsymbol{i}\sin v) \tag{5.5}$$

Soit $m \in \mathbb{C}$, et soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in R, f(x) = e^{mx}$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = me^{mx}$.

En effet, si on pose $m = \alpha + \boldsymbol{i}\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{\alpha x}(\cos \beta x + \boldsymbol{i} \sin \beta x)$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + \boldsymbol{i} e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \\ & e^{\alpha x}(\alpha e^{\boldsymbol{i}\beta x} + \beta \boldsymbol{i} e^{\boldsymbol{i}\beta x}) = me^{mx} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Il en résulte que si $m \in \mathbb{C}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{m} e^{mx}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{mx}$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, continue. Alors, pour tout $a \in I$:

La fonction $\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable, de dérivée f.

Conséquence :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, continue. Alors f admet des primitives sur I, et, de plus, pour chaque $a \in I$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui prenne la valeur 0 en a.

Conséquence :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, continue, et soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ (qu'on note $[F(x)]_a^b$)

Démonstration (du théorème) :

Avec les hypothèses du théorème, notons $f_1 = \operatorname{Re} f$ et $f_2 = \operatorname{Im} f$.

Alors, pour tout $x \in I$: $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{i} \int_a^x f_2(t)\,\mathrm{d}t$, et on sait que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_2(t)\,\mathrm{d}t$ sont dérivables sur I, de dérivées respectives f_1 et f_2 (puisque f_1 et f_2 sont continues), d'où le résultat.

Les conséquences du théorème se démontrent exactement comme dans le cas réel.

Application à la recherche de primitives des fonctions réelles

Exemple :

Nous allons déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction réelle $x \mapsto e^{3x} \cos 2x$. On peut le faire à partir de deux intégrations par partie, mais on peut faire autrement :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^x e^{3t} \cos 2t\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re}\left(\int_0^x e^{(3+2\boldsymbol{i})t}\,\mathrm{d}t\right)$ (selon la définition du C))

Or, $\int_0^x e^{(3+2\boldsymbol{i})t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(3+2\boldsymbol{i})t}}{3+2\boldsymbol{i}}\right]_0^x = \frac{1}{3+2\boldsymbol{i}}(e^{(3+2\boldsymbol{i})x} - 1) = \frac{3-2\boldsymbol{i}}{13}(e^{3x}(\cos 2x + \boldsymbol{i} \sin 2x) - 1)$

Donc $\int_0^x e^{3t} \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{e^{3x}}{13}(3 \cos 2x + 2 \sin 2x) - \frac{3}{13}$

F) Intégration par parties

Rappel :

Soient $f, g\colon I \to \mathbb{C}$

Si f et g sont continues, alors fg est continue.

Si f et g sont dérivables, alors fg est dérivable, de dérivée $(fg)' = f'g + fg'$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ (sur I) lorsqu'elle est n fois dérivable sur I et lorsque sa dérivée n-ième est continue sur I.

On établit aisément que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

De ces résultats, on tire immédiatement, comme dans le cas réel :

Théorème :

Soient $f, g\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.7}$$

Conséquence (Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n-1$)) :

Si $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \geqslant 1$) sur $[a,b]$:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.8}$$

(La démonstration est analogue à celle fait dans le cas réel : faire une récurrence)

Conséquence (Inégalité de Taylor-Lagrange (à l'ordre $n-1$)) :

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \geqslant 1$) sur $[a,b]$, et si M désigne un majorant du module de $f^{(n)}$ sur $[a,b]$ (il en existe car une fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée), alors :

$$\left| f(b) - \left(f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \right) \right| \leqslant \frac{|b-a|^n}{n!}M \tag{5.9}$$

Démonstration :

Selon le théorème précédent, il suffit de montrer que :

$$\left| \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{|b-a|^n}{n!}M \tag{5.10}$$

- Si $a \leqslant b$, on a alors :

$$\left| \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b \left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \right| \mathrm{d}x \tag{5.11}$$

Or, pour tout $x \in [a,b]$, $\left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \right| = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}|f^{(n)}(x)| \leqslant M\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$

D'où, selon les résultats concernant les intégrales de fonctions réelles :

$$\int_a^b \left| \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \right| \mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x = M\left[-\frac{(b-x)^n}{n!} \right]_a^b = M\frac{(b-a)^n}{n!} \tag{5.12}$$

- Si $b \leqslant a$, on procède de même en écrivant :

$$\left|\int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_b^a \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right| \tag{5.13}$$

  et que, pour tout $x \in [a,b]$, $\left|\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\right| = \frac{(x-b)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(x)|$.

Remarque importante (rappel) :
Pour $n = 1$, on obtient l'inégalité des accroissements finis, mais on rappelle que l'égalité des accroissements finis est fausse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$:

Si $f(x) = x^2 + \boldsymbol{i}x^3$ sur $[0,1]$, il n'existe pas de $c \in]0,1[$ tel que $f(1) - f(0) = (1-0)f'(c)$ car il faudrait que $1 + \boldsymbol{i} = 2c + 3\boldsymbol{i}c^2$, ce qui est impossible.

G) Changement de variable

Théorème :
Soit $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $f\colon I \to \mathbb{C}$, continue, avec $\varphi([a,b]) \subset I$.

Alors $\int_a^b f(\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$

La démonstration est analogue à celle faite dans le cas où f est à valeurs réelles, en utilisant bien sûr le fait que si $F\colon I \to \mathbb{C}$ est une primitive de f sur I, alors $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall t \in [a,b]\,, (F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$

H) Remarque importante pour finir

De même que l'égalité des accroissements finis est fausse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, le théorème de la moyenne est faux aussi pour f à valeurs dans $\mathbb{C}$. (même exemple que pour l'égalité des accroissements finis)

II Intégration des fonctions rationnelles (à coefficients dans $\mathbb{C}$)

A) Méthode générale

Rappel :
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, admettant des pôles complexes $a_1, a_2, \dots a_p$ avec les multiplicités $n_1, n_2, \dots n_p$. Alors F se décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j} \right) \tag{5.14}$$

Où E est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ (qui est la partie entière de F), et où les $\lambda_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.

Soit maintenant I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun pôle de F. Pour trouver une primitive de $t \mapsto F(t)$ sur I, on est donc ramené à la recherche de primitives des fonctions polynôme et des fonctions du type $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^n}$, où $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$.

- Cas des fonctions polynomiales : évident
- Cas de $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^n}$, où $n \geqslant 2$:
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a.
  Alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^n}$ admet sur I la primitive $t \mapsto \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(t-a)^{n-1}}$.
  (La vérification est immédiate en dérivant…)
- Cas de $t \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ (Les logarithmes de complexes ne sont pas au programme !!)
  - Si $a \in \mathbb{R}$, on sait que $t \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ admet sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ la primitive $t \mapsto \ln|t-a|$.
  - Si $a \notin \mathbb{R}$, alors $t \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, et :
    $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{t-a} = \frac{t-\bar{a}}{(t-a)(t-\bar{a})} = \frac{t-\bar{a}}{t^2-st+p}$ avec $s = a+\bar{a}$ et $p = a\bar{a}$.
    Donc $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ et $s^2 - 4p < 0$.
    On a aussi : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t-\bar{a}}{t^2-st+p} = \frac{\frac{1}{2}(2t-s)+\frac{s}{2}-\bar{a}}{t^2-st+p}$.
    Ainsi, une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t-s}{t^2-st+p}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \ln(t^2-st+p)$.
    On doit donc maintenant trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{\frac{s}{2}-\bar{a}}{t^2-st+p}$.
    On a, en mettant sous forme canonique : $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 - st + p = \left(t - \frac{s}{2}\right)^2 + p - \frac{s^2}{4}$
    De plus, on a $p - \frac{s^2}{4} > 0$. On introduit alors $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $k^2 = p - \frac{s^2}{4}$.
    Ainsi, pour $x_0, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-st+p} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\frac{s}{2})^2+k^2} \underset{\substack{u=\frac{1}{k}(t-\frac{s}{2}) \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t}}{=} \int_{\frac{1}{k}(x_0-\frac{s}{2})}^{\frac{1}{k}(x-\frac{s}{2})} \frac{k\,\mathrm{d}u}{k^2u^2+k^2} = \frac{1}{k}\left[\operatorname{Arctan} u\right]_{\frac{1}{k}(x_0-\frac{s}{2})}^{\frac{1}{k}(x-\frac{s}{2})} \tag{5.15}$$

    Ainsi, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-st+p}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{k}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{k}(t-\dfrac{s}{2})\right)$
    Finalement, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln(t^2-st+p) + \left(\frac{s}{2}-\bar{a}\right)\frac{1}{\sqrt{p-\frac{s^2}{4}}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t-\frac{s}{2}}{\sqrt{p-\frac{s^2}{4}}}\right) \tag{5.16}$$

    (Bien entendu, il vaut mieux retenir la méthode que la formule, surtout dans ce dernier cas… !)

B) Cas des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$

D'abord, bien sûr, on sait faire, puisque c'est un cas particulier du A) : on décompose la fraction rationnelle dans $\mathbb{C}$ et on intègre…

On peut quand même remarquer que si $F \in \mathbb{R}(X)$, sa partie entière est à coefficients réels, les coefficients apparaissant dans les parties polaires relatives à des pôles réels sont réels (voir le cours sur les fractions rationnelles), et enfin les pôles complexes non réels sont conjugués deux à deux, avec les mêmes multiplicités, et si la partie polaire relative à un pôle $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est $\frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n}$, alors celle relative à $\bar{a}$ est $\frac{\bar{\lambda}_1}{X-\bar{a}} + \frac{\bar{\lambda}_2}{(X-\bar{a})^2} + \cdots + \frac{\bar{\lambda}_n}{(X-\bar{a})^n}$ (cela résulte du fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$ non pôle de F, $\overline{F(t)} = F(t)$, puisque $F \in \mathbb{R}(X)$, et de l'unicité de la décomposition en éléments simples).

Ainsi, lorsqu'il apparaît un terme $\frac{\lambda}{X-a}$ (avec $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$), il apparaîtra aussi $\frac{\bar{\lambda}}{X-\bar{a}}$. Donc, au lieu d'intégrer séparément ces deux termes, on peut plutôt les regrouper :

$$\frac{\lambda}{X-a} + \frac{\bar{\lambda}}{X-\bar{a}} = \frac{(\lambda+\bar{\lambda})X - (\lambda\bar{a}+\bar{\lambda}a)}{X^2-(a+\bar{a})X+a\bar{a}} = \frac{\alpha X+\beta}{X^2-sX+p} \tag{5.17}$$

Où $\alpha, \beta, s, p \in \mathbb{R}$ et $s^2 - 4p < 0$.

Ensuite, on intègre $t \mapsto \dfrac{\alpha t + \beta}{t^2 - st + p}$ comme dans le cas complexe...

Cependant, regrouper les termes en $\frac{\lambda}{(X-a)^n}$ et $\frac{\bar{\lambda}}{(X-\bar{a})^n}$ pour $n \geqslant 2$ avant d'intégrer n'a aucun intérêt (on peut le faire après)

C) Exemples

- Déjà, il n'est pas toujours utile de décomposer systématiquement :

  Une primitive de $t \mapsto \dfrac{15t^2 + 4t}{(5t^3 + 2t^2 + 1)^7}$ est $t \mapsto \dfrac{-1}{6} \dfrac{1}{(5t^3 + 2t^2 + 1)^6}$

- Recherche d'une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 1}$ sur $I =]-\infty, -1[,]1, +\infty[$ ou $]-1, 1[$:

  $\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}\right)$, donc $\forall t \in I, \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$.

  Ainsi, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 1}$ sur I est $t \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln|t-1| - \ln|t+1|)$, soit aussi $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$

- Recherche d'un primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^3 - 1)^2}$ sur $I =]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$:

  Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

  La partie entière est nulle, et la décomposition est de la forme :

$$\frac{1}{(X^3-1)^2} = \frac{\alpha_1}{(X-1)} + \frac{\alpha_2}{(X-1)^2} + \frac{\beta_1}{(X-j)} + \frac{\beta_2}{(X-j)^2} + \frac{\gamma_1}{(X-j^2)} + \frac{\gamma_2}{(X-j^2)^2} \tag{5.18}$$

  (En utilisant le fait que $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \frac{1}{(t^3-1)^2}$ est égal à son conjugué et l'unicité de la décomposition en éléments simples, on montre que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \gamma_1 = \bar{\beta}_1, \gamma_2 = \bar{\beta}_2$ mais on peut faire autrement dans ce cas)

  En remplaçant X par jX, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X^3-1)^2} &= \frac{\alpha_1}{jX-1} + \frac{\alpha_2}{(jX-1)^2} + \frac{\beta_1}{jX-j} + \frac{\beta_2}{(jX-j)^2} + \frac{\gamma_1}{jX-j^2} + \frac{\gamma_2}{(jX-j^2)^2} \\ &= \frac{j^2\alpha_1}{X-j^2} + \frac{j\alpha_2}{(X-j^2)^2} + \frac{j^2\beta_1}{X-1} + \frac{j\beta_2}{(X-1)^2} + \frac{j^2\gamma_1}{X-j} + \frac{j\gamma_2}{(X-j)^2}\end{aligned} \tag{5.19}$$

  Donc, par unicité de la décomposition en éléments simples :

$$\gamma_1 = j^2\alpha_1, \qquad \gamma_2 = j\alpha_2, \qquad \beta_1 = j^2\gamma_1 = j\alpha_1, \qquad \beta_2 = j\gamma_2 = j^2\alpha_2 \tag{5.20}$$

  Il nous reste donc à trouver α_1, α_2

  En multipliant (5.18) par $(X-1)^2$, on obtient :

$$\frac{1}{(X^2+X+1)^2} = \alpha_1(X-1) + \alpha_2 + (X-1)^2 G \tag{5.21}$$

  Où G est une fraction rationnelle dont 1 n'est pas pôle.

  En remplaçant X par 1, on obtient $\alpha_2 = \frac{1}{9}$

  En dérivant formellement cette dernière égalité, on a alors :

$$\frac{-2(2X+1)}{(X^2+X+1)^3} = \alpha_1 + 2(X-1)G + (X-1)^2 G' \tag{5.22}$$

  En prenant la valeur en 1, on a alors $\alpha_1 = -\frac{2}{9}$.

  Ainsi :

$$\frac{1}{(X^3-1)^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{-2}{(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-2j}{(X-j)} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{-2j^2}{(X-j^2)} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right) \tag{5.23}$$

En regroupant $\frac{j}{(X-j)}$ et $\frac{j^2}{(X-j^2)}$, on obtient :

$$\frac{1}{(X^3-1)^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{-2}{(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2X+4}{X^2+X+1} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right) \tag{5.24}$$

On a :

$$\frac{2X+4}{X^2+X+1} = \frac{2X+1}{X^2+X+1} + \frac{3}{X^2+X+1} \tag{5.25}$$

Et $\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

Or, pour tout $x_0, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \underset{\substack{t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}u \\ \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}u}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(x_0+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} u\right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}(x_0+\frac{1}{2})}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})} \tag{5.26}$$

Donc une primitive de $t \mapsto 3 \times \dfrac{1}{t^2+t+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto 2\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}(t+\dfrac{1}{2})\right)$.

D'autre part, une primitive de $t \mapsto \dfrac{j^2}{(t-j)^2} + \dfrac{j}{(t-j^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$t \mapsto -\left(\dfrac{j^2}{t-j} + \dfrac{j}{t-j^2}\right)$, soit aussi $t \mapsto -\left(\dfrac{-t+1}{t^2+t+1}\right)$.

Ainsi, une primitive sur I de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^3-1)^2}$ est la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{9}\left(-2\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln(t^2+t+1) + 2\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right) + \frac{t-1}{t^2+t+1}\right) \tag{5.27}$$

III Primitives des fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$, et soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{\alpha t}P(t)$. f est continue sur $\mathbb{R}$; cherchons une primitive de f.

Étude :

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, quelconque, et soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = e^{\alpha t}Q(t)$.

Alors g est dérivable, et $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = e^{\alpha t}(\alpha Q(t) + Q'(t))$.

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} g' = f &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \alpha Q(t) + Q'(t) = P(t) \\ &\iff \alpha Q + Q' = P \end{aligned} \tag{5.28}$$

(La deuxième équivalence se justifie par le fait que deux polynômes qui coïncident sur une infinité de valeurs sont égaux)

Un peu d'algèbre : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leqslant n$

Soit $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ Q & \longmapsto & \alpha Q + Q' \end{array}$

(la définition a bien un sens car si $Q \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $\alpha Q + Q' \in \mathbb{C}_n[X]$)

Alors φ est linéaire (vérification immédiate), et comme $\alpha \neq 0$, on remarque que :

$$\forall Q \in \mathbb{C}_n[X], \deg(\varphi(Q)) = \deg(Q) \tag{5.29}$$

Ainsi, φ est injective (puisque $\varphi(Q) = 0 \implies \deg(\varphi(Q)) = -\infty = \deg(Q) \implies Q = 0$)

Comme φ est un endomorphisme en dimension finie, φ est bijective.

Ainsi, il existe un unique $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\alpha Q + Q' = P$, et on a même $\deg P \leqslant \deg Q$

Conclusion :
Les primitives de $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \mapsto e^{\alpha t}Q(t) + \text{cte}$, où Q est un certain polynôme de même degré que P (on l'obtient par identification)

Ce résultat est faux pour $\alpha = 0$ (en particulier parce que Q est de même degré que P)

Intérêt On peut ainsi obtenir les primitives des fonctions réelles de la forme :
$t \mapsto e^{\alpha t}P(t)\cos(\omega t)$ et $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)\sin(\omega t)$ (où $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$).

Exemple :
Recherche de primitives de $f_1 : t \mapsto e^t(t^2+1)\cos(2t)$ et $f_2 : t \mapsto e^t(t^2+1)\sin(2t)$

Soit $f = f_1 + \boldsymbol{i} f_2$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{(1+2\boldsymbol{i})t}(t^2+1)$, et si F est une primitive de f, alors $\operatorname{Re} F$ est une primitive de f_1 et $\operatorname{Im} F$ une primitive de f_2.

On cherche F sous la forme $F(t) = e^{(1+2\boldsymbol{i})t}(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = e^{(1+2\boldsymbol{i})t}((1+2\boldsymbol{i})(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + (2\alpha t + \beta))$

Donc

$$\begin{aligned} F' = f &\iff \alpha(1+2\boldsymbol{i}) = 1 \text{ et } \beta(1+2\boldsymbol{i}) + 2\alpha = 0 \text{ et } \gamma(1+2\boldsymbol{i}) + \beta = 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{1+2\boldsymbol{i}} \text{ et } \beta = \frac{-2\alpha}{1+2\boldsymbol{i}} \text{ et } \gamma = \frac{1}{1+2\boldsymbol{i}}(1-\beta) \end{aligned} \tag{5.30}$$

D'où, après calculs, on obtient qu'une primitive de f est F donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \frac{1}{125}e^{(1+2\boldsymbol{i})t}\left(25(1-2\boldsymbol{i})t^2 + 10(3+4\boldsymbol{i})t + (3-46\boldsymbol{i})\right) \tag{5.31}$$

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) = \operatorname{Re}(F(t)) = \frac{1}{125}e^t\left((25t^2+30t+3)\cos(2t) - (-50t^2+40t-46)\sin(2t)\right) \tag{5.32}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_2(t) = \operatorname{Im}(F(t)) = \frac{1}{125}e^t\left((25t^2+30t+3)\sin(2t) + (-50t^2+40t-46)\cos(2t)\right) \tag{5.33}$$

IV Complément : règle de Bioche

On cherche l'intégrale d'une fraction rationnelle F en $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\int_a^b F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{5.34}$$

- Si $F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ (attention au $\mathrm{d}\theta$!) est inchangé par $\theta \mapsto -\theta$, faire le changement de variable $u = \cos\theta$ peut être utile pour calculer l'intégrale.
- Si c'est inchangé par $\theta \mapsto \pi - \theta$, faire le changement de variable $u = \sin\theta$
- Si c'est inchangé par $\theta \mapsto \pi + \theta$, faire le changement de variable $u = \tan\theta$