Chapitre 4 : Intégrale d'une fonction continue sur un segment et dérivation

I Le résultat fondamental

A) Théorème

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in I$.

Alors l'application $\begin{array}{rccl} F\colon & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ (qui est bien définie sur I car $\forall x \in I, \underset{\leftrightarrow}{[a,x]} \subset I$, et donc f est continue sur ce segment) est dérivable de dérivée f.

Démonstration :

Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Pour cela, étudions $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)$ pour $x \in I\,\{x_0\}$, de manière à montrer que cela tend vers 0 quand x tend vers x_0.

$$\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \underset{\to 0}{\varepsilon(x)}\right) \tag{4.1}$$

Pour cela, étudions $F(x) - F(x_0) - (x-x_0)f(x_0)$ pour $x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)f(x_0)| &= \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - (x-x_0)f(x_0)\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-x_0)f(x_0)\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \begin{cases} \int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \leqslant (x-x_0)\sup_{t\in[x_0,x]} |f(t)-f(x_0)| & \text{si } x \geqslant x_0 \\ \int_x^{x_0} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \leqslant (x_0-x)\sup_{t\in[x,x_0]} |f(t)-f(x_0)| & \text{si } x \leqslant x_0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Dans les deux cas : $|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)f(x_0)| \leqslant |x_0 - x| \sup_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t)-f(x_0)|$

Donc $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \sup_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t)-f(x_0)|$

Or, $\sup_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t)-f(x_0)| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. En effet :

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-x_0| < \alpha \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ (α existe car f est continue en x_0). Alors, pour $x \in I$ tel que $|x-x_0| < \alpha$, on a $\forall t \in \underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}$, $|x_0 - t| < \alpha$.

Donc $\forall t \in \underset{\leftrightarrow}{[x, x_0]}$, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Donc $\sup_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, soit $\left|\sup_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t) - f(x_0)|\right| \leqslant \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \left(|x - x_0| < \alpha \implies \left|\sup_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[x,x_0]}} |f(t) - f(x_0)|\right| \leqslant \varepsilon\right)$, ce qui montre la limite voulue.

D'où on tire alors le résultat voulu.

B) Remarques

Soit f une fonction définie sur I, où I est un intervalle. On suppose f non continue, mais cependant continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.

Alors, pour tout $a \in I$, $F\colon \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est parfaitement définie car f est continue par morceaux sur le segment $\underset{\leftrightarrow}{[a, x]}$.

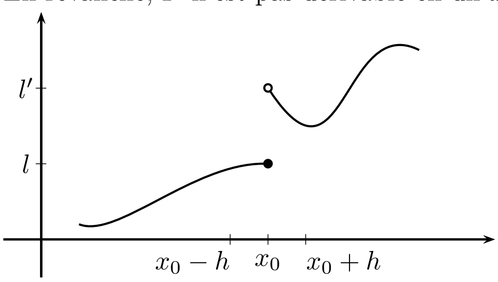
- Elle est continue : Soit $x_0 \in I$, $h > 0$. Soit $S = [x_0 - h, x_0 + h] \cap I$. Pour tout $x \in S$, on a :

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |x_0 - x| \sup_{t\in S} |f(t)| \tag{4.3}$$

  Donc F est lipschitzienne sur S, donc sur un voisinage de x_0. Donc F est continue en x_0.

- De plus, la démonstration précédente montre que F est dérivable en tout $x_0 \in I$ où f est continue.

- En revanche, F n'est pas dérivable en un x_0 où f n'est pas continue. Exemple :



  f étant continue par morceaux sur un segment contenant x_0, elle admet une limite finie $\begin{cases} \text{à droite en } x_0, \text{ disons } l' \\ \text{à gauche en } x_0, \text{ disons } l \end{cases}$

  En se plaçant dans le cas de la figure :

  F est dérivable de dérivée f sur $]x_0 - h, x_0[$, mais aussi sur $]x_0, x_0 + h[$.

  Si F était dérivable en x_0, le théorème sans nom dirait :

$$\underbrace{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} F'(x)}_{l} = F'(x_0) = \underbrace{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} F'(x)}_{l'} \tag{4.4}$$

  d'où contradiction.

C) Conséquence du théorème

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Alors :

1. f admet des primitives sur I.
2. Si G est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont exactement les $G + \text{cte}$
3. Pour tout $a \in I$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
4. Si G est une primitive de f, alors, pour tout $a, b \in I$, on a :
   $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$, noté $[G(t)]_a^b$

Démonstration :

1. Voir théorème : si on se donne $a \in I$, $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.
2. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors :
   $\forall t \in I, F'(t) = G'(t)$, donc $\forall t \in I, (F-G)'(t) = 0$. Donc $F - G = \text{cte}$ car I est un intervalle. Inversement, si G est une primitive, alors $G + \text{cte}$ en est aussi une.
3. $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive, elle est nulle en a, et c'est la seule d'après le point précédent.
4. Soit G une primitive de f. Alors la fonction $F\colon t \mapsto G(t) - G(a)$ est une primitive de f qui s'annule en a. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) = G(b) - G(a)$

D) Exercices d'application

- Soit $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Alors, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{-x^2}$. D'où étude (en exercice)…
- Soit $\varphi\colon x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t-1}\,\mathrm{d}t$.
  - ◇ Déjà, $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ a un sens lorsque $f\colon t \mapsto \dfrac{e^t}{t-1}$ est définie et continue (intégrable suffit mais ici c'est pareil…) sur le segment $\overset{\leftrightarrow}{[x, x^2]}$, c'est-à-dire lorsque 1 n'appartient pas au segment $\overset{\leftrightarrow}{[x, x^2]}$, c'est-à-dire lorsque $x > 1$ ou $-1 < x < 1$. Ainsi, le domaine de définition de φ est $D =]-1, +\infty[\setminus \{1\}$
  - ◇ Justifier que φ est dérivable sur D, donner $\varphi'(x)$:
    - — Dérivabilité sur $]1, +\infty[$:
      f est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Donc elle y admet une primitive, disons F. Alors $\forall x \in]1, +\infty[, \varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ (quatrième point du théorème précédent). Donc φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $x \in]1, +\infty[$:
      $$\varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{x^2-1} - \frac{e^x}{x-1} \tag{4.5}$$
    - — Dérivabilité sur $]-1, 1[$: analogue.

E) Les choses fausses

- f intégrable sur un segment $[a, b] \nRightarrow f$ admet une primitive sur $[a, b]$
- f admet une primitive sur $[a, b] \nRightarrow f$ est intégrable sur $[a, b]$

Exemple :

- Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (mais pas continue)
  Alors f est intégrable sur $[a, b]$, mais n'admet pas de primitive sur $[a, b]$:

Si F en était une, il y aurait contradiction avec le théorème sans nom pour $F'(c)$ où c est un point de discontinuité.

- Considérons $F\colon x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in\,]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
  Alors F est dérivable sur $]0,1]$, et :

$$\forall x \in]0,1], F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \tag{4.6}$$

De plus, pour tout $x \in]0,1]$: $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = x \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

La fonction $g\colon x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in\,]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0,1]$. Elle y admet donc une primitive G. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} = G'(x) - F'(x) \tag{4.7}$$

La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in\,]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ admet donc une primitive sur $[0,1]$ (à savoir $G - F$), mais elle n'est pas intégrable car non bornée.

(Remarque : elle n'est pas continue en 0, ni continue par morceaux sur $[0,1]$ car, en 0, il n'y a pas de limite finie à droite)

- On rappelle aussi que pour f continue sur D, si F est une primitive de f sur D, il est faux en général que les primitives de f sur D sont les $F + \text{cte}$ (car D n'est pas forcément un intervalle)

II Tableau des primitives usuelles

Tableau donnant la valeur en x d'une primitive F pour une fonction f continue sur un intervalle I :

f	I	F
$x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cte}$
$x \mapsto x^{-n}, \quad n \geqslant 2$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + \text{cte}$
$x \mapsto x^{-1}$	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_-^*$	$\left.\begin{array}{r} x \mapsto \ln x + \text{cte} \\ x \mapsto \ln(-x) + \text{cte} \end{array}\right\rbrace x \mapsto \ln\lvert x\rvert + \text{cte}$
$x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cte}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + \text{cte}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + \text{cte}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + \text{cte}$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{sh} x + \text{cte}$
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{ch} x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$x \mapsto \operatorname{Arcsin} x + \text{cte}$ ou $x \mapsto \operatorname{Arccos} x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{Argsh} x + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$ $]-\infty,-1[$	$x \mapsto \operatorname{Argch} x + \text{cte}$ $x \mapsto -\operatorname{Argch}(-x) + \text{cte}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$]-\infty,-1[,\ ]-1,1[,\ ]1,+\infty[$ $]-1,1[$ $]1,+\infty[,\ ]-\infty,-1[$	$x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\lvert 1-x\rvert + \dfrac{1}{2}\ln\lvert 1+x\rvert + \text{cte}$ $x \mapsto \operatorname{Argth} x + \text{cte}$ $x \mapsto \operatorname{Argcoth} x + \text{cte}$
$x \mapsto \tan x$	$I_k =]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert + \text{cte}$

(4.8)

III Intégration par parties

A) Théorème

Théorème :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\overleftrightarrow{a,b}]$.

Alors $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration :
$t \mapsto f(t)g'(t)$ et $t \mapsto f'(t)g(t)$ sont continues sur $[\overleftrightarrow{a,b}]$, donc déjà les deux intégrales ont un sens. De plus, une primitive de la fonction $t \mapsto f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ (continue) est $t \mapsto f(t)g(t)$. Donc $\int_a^b (f(t)g'(t) + f'(t)g(t))\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b$

D'où le résultat par linéarité.

B) Exemples pratiques

- $$\int_0^1 \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t \underset{\substack{\text{intégration par parties}\\ f(t)=\operatorname{Arctan} t \quad f'(t)=\frac{1}{t^2+1}\\ g'(t)=1 \qquad g(t)=t}}{=} [t \operatorname{Arctan} t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \tag{4.9}$$

  Remarque :

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a de même :

  $$\int_0^x \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \underbrace{\text{cte}}_{=0} \tag{4.10}$$

  Or, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction continue Arctan. Ainsi, une primitive de Arctan est $x \mapsto x \operatorname{Arctan} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

  On trouve parfois (mais il faut éviter de l'utiliser) la notation :

  $$\underbrace{\int \operatorname{Arctan} x \,\mathrm{d}x}_{\text{intégrale indéfinie}} = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{cte} \tag{4.11}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t \underset{\substack{f(t)=\ln t \quad f'(t)=\frac{1}{t}\\ g'(t)=1 \quad g(t)=t}}{=} [t \ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln x - x + 1$

  Ainsi, une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x \ln x - x$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voire même $\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$) :

  $$\int_1^x t^n \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \underbrace{\text{cte}}_{\frac{1}{(n+1)^2}} \tag{4.12}$$

  pour $n = -1$: $\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$, d'où $\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln^2 x$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n(x) = \int_0^x t^n e^t \,\mathrm{d}t$

  Alors :

  $$I_{n+1}(x) = \int_0^x t^{n+1} e^t \,\mathrm{d}t = \left[t^{n+1}e^t\right]_0^x - (n+1)\int_0^x t^n e^t \,\mathrm{d}t = x^{n+1}e^x - (n+1)I_n(x) \tag{4.13}$$

- $$\int_0^\pi x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \left[-x^2 \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x \,\mathrm{d}x \tag{4.14}$$

  et

  $$\int_0^\pi 2x \cos x \,\mathrm{d}x = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = [\cos x]_0^\pi \tag{4.15}$$

  donc

  $$\int_0^\pi x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \pi^2 - 4 \tag{4.16}$$

C) Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$.

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \quad (4.17)$$

Démonstration (par récurrence sur n.) :

Pour $n = 0$: le théorème dit que pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$:

$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$. Ok

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le théorème vrai pour n.

Déjà, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, donc :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(a)\,\mathrm{d}x}_{R_n} \quad (4.18)$$

Or, $R_n = \underbrace{\left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b}_{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)} - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$

Ce qui achève la récurrence.

Intérêt de la formule : très simple à démontrer par rapport aux autres.

IV Changement de variable

A) Le théorème

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $\varphi \colon [\underset{\leftrightarrow}{a,b}] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant $\varphi([\underset{\leftrightarrow}{a,b}])$ (et à valeurs réelles)

Alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

On dit qu'on a fait le changement de variable $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)dt \end{cases}$

Démonstration :

- La fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est continue sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$.

  En effet, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$, et f est continue sur I, contenant $\varphi([\underset{\leftrightarrow}{a,b}])$.

  Donc $f \circ \varphi$ est continue sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$.

  Enfin, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$, donc φ' est continue sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$.

  Donc, par produit, $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est continue sur $[\underset{\leftrightarrow}{a,b}]$.

- La fonction f est continue sur I. Elle y admet donc une primitive F. Alors $t \mapsto F(\varphi(t))$ est dérivable sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, de dérivée $t \mapsto F'(\varphi(t))\varphi'(t)$, soit $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$
- Ainsi, la fonction continue $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ admet la primitive $t \mapsto F(\varphi(t))$.
  Donc $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_a^b$
- Or, $[F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.
  (Puisque f est continue sur I, qui contient $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et F en est une primitive)

B) Exemples

- $$\int_0^\pi 2t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\text{changement de variable}\\ x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t}}{=} \int_0^{\pi^2} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi^2} = 1-\cos(\pi^2) \tag{4.19}$$

- $$\int_1^2 t^3\ln(1+t^4)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{x=1+t^4\\ \mathrm{d}x=4t^3\,\mathrm{d}t}}{=} \frac{1}{4}\int_2^{17}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[x\ln x - x\right]_2^{17} = \frac{1}{4}(17\ln 17 - 17 - 2\ln 2 + 2) \tag{4.20}$$

- $$\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{u=\ln t\\ \mathrm{d}u=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}}{=} \int_0^{\ln x} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\ln x} = \frac{1}{2}\ln^2 x \tag{4.21}$$

- $$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{t=\cos\theta\\ \mathrm{d}t=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\ \text{pour } \theta=\frac{\pi}{2},t=0\\ \text{pour } \theta=0,t=1}}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{\sin^2\theta}}_{\substack{+\sin\theta\\ \text{pour } \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{4.22}$$

  (dans ce dernier, on va « de droite à gauche » , contrairement aux autres exemples.)
  Ici, $\varphi\colon \theta \mapsto \cos\theta$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), $f\colon t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ (continue sur $[-1,1]$)
  Remarque :
  On pouvait voir que $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ correspond aussi à $\frac{1}{4}$ de l'aire du cercle trigonométrique…

- $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\tan^2\frac{\theta}{2})\,\mathrm{d}\theta}{3+\tan^2\frac{\theta}{2}} \underset{\substack{t=\tan\frac{\theta}{2}\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})\,\mathrm{d}\theta}}{=} 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}\\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} \underset{\substack{u=t/\sqrt{3}\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t/\sqrt{3}}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+u^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}(1/\sqrt{3})\end{aligned} \tag{4.23}$$

  Variante :
  On peut faire aussi plutôt le changement de variable

  $$\begin{cases} \theta &= 2\operatorname{Arctan} t\\ \mathrm{d}\theta &= \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\end{cases} \tag{4.24}$$

  (on a $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; pour $t=0$, $\theta=0$, pour $t=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$)

  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \dots \tag{4.25}$$

C) Application aux fonctions paires, impaires, périodiques

Proposition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et symétrique par rapport à 0.

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

Si f est paire, alors $\forall x \in I, \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (et $\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$)

Si f est impaire, alors $\forall x \in I, \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (et $\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$)

Démonstration :

Pour tout $x \in I$, on a :

$\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{u=-t\\ \mathrm{d}u=-\mathrm{d}t}}{=} \int_0^x -f(-u)\,\mathrm{d}u$, et on obtient le résultat voulu dans les deux cas.

Proposition :

Soit f une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$ et continue. Alors :

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

   (L'intégrale de f est invariante par translation de vecteur T de l'intervalle d'intégration)

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

   (L'intégrale de f sur un segment d'amplitude T ne dépend pas de ce segment)

Démonstration :

1. On fait le changement de variable $u = t + T$ ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$)

2. Relation de Chasles :

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \underbrace{\int_T^{a+T} f}_{=\int_0^a f} = \int_0^T f \tag{4.26}$$

Application :

$$\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} + \underbrace{\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}}_{\substack{=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} \\ \text{car } \theta \mapsto \frac{1}{2+\cos\theta} \text{ est} \\ 2\pi\text{-périodique}}} = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} \underset{\substack{\text{car } \theta \mapsto \frac{1}{2+\cos\theta} \\ \text{est pair}}}{=} 4\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} \tag{4.27}$$

Et : $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} = \lim_{\substack{a\to\pi\\ a<\pi}} \int_0^a \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$ car $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$ est continue, (et même dérivable)

Pour tout $a \in [0, \pi[$:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} = 2\int_0^{\tan\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{a}{2}}{3}\right) \xrightarrow[a\to\pi]{} \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \tag{4.28}$$

Donc $\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

V Un théorème de la moyenne

Théorème :

Soit $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$, continue.

Alors il existe $c \in [a,b]$ (et même $]a,b[$ si $a \neq b$) tel que :

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c)$.

Démonstration :

C'est le théorème des accroissements finis appliqué à une primitive de F de la fonction continue f.

(Le théorème est hors programme, il faut donc le redémontrer à chaque fois…)

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est une valeur atteinte (d'où le nom du théorème). Attention, ce théorème ne se généralise pas aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$!