



Chapitre 3 : Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Notations, Remarques :

- Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans \mathbb{R} .
- Soit S un segment de \mathbb{R} .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux (noté parfois c.p.m.)

Alors f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans S (évident).

Pour a, b de I , on note :

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[a,b]} f & \text{si } a > b \end{cases} \quad (3.1)$$

I Premières propriétés

Ici, a et b désignent deux réels quelconques

A) Positivité

Proposition :

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$, avec $a \leq b$.

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

Démonstration :

La fonction nulle appartient à $\mathcal{E}^-(f)$.

Or, par définition, $\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$. Donc $\int_a^b f \geq \int_a^b 0 = 0$.

B) Linéarité

Proposition :

Soient f_1, f_2 continues par morceaux sur un segment $[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \quad (3.2)$$

$$\int_a^b \lambda f_1 = \lambda \int_a^b f_1 \quad (3.3)$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto \int_a^b f$, définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, est linéaire (rappel : cet ensemble est un sev de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$).

Démonstration :

- Dans le cas $a > b$

◇ Preuve de (3.2). Soit $\varepsilon > 0$

Il existe $\varphi_1 \in \mathcal{E}^-(f_1)$ et $\psi_1 \in \mathcal{E}^+(f_1)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f_1 \right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b f_1 \leq \int_a^b \psi_1 \leq \left(\int_a^b f_1 \right) + \varepsilon \quad (3.4)$$

En effet :

$$\int_a^b f_1 = \sup \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f_1) \right\} \quad (3.5)$$

Donc $\left(\int_a^b f_1 \right) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\sup \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f_1) \right\}$. Il existe donc $\varphi_1 \in \mathcal{E}^-(f_1)$ tel que $\left(\int_a^b f_1 \right) - \varepsilon < \int_a^b \varphi_1$

Et comme $\int_a^b f_1$ est un majorant de cet ensemble, on a $\int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b f_1$

Mais, par ailleurs, $\int_a^b f_1 = \inf \left\{ \int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f_1) \right\}$. Donc en raisonnant de la même façon, on trouve les deux dernières inégalités de (3.4)

De même, il existe $\varphi_2 \in \mathcal{E}^-(f_2)$ et $\psi_2 \in \mathcal{E}^+(f_2)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f_2 \right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_2 \leq \int_a^b f_2 \leq \int_a^b \psi_2 \leq \left(\int_a^b f_2 \right) + \varepsilon \quad (3.6)$$

En sommant (3.4) et (3.6), on obtient alors :

$$\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 - 2\varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \leq \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + 2\varepsilon \quad (3.7)$$

Par ailleurs :

$\varphi_1 + \varphi_2$ est une fonction en escalier, et $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f_1 + f_2$

Donc $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{E}^-(f_1 + f_2)$.

De même, $\psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{E}^+(f_1 + f_2)$

Donc

$$\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) \leq \int_a^b (f_1 + f_2) \leq \int_a^b (\psi_1 + \psi_2) \quad (3.8)$$

En effet, $\int_a^b (f_1 + f_2)$ est la borne supérieure de l'ensemble des $\int_a^b \varphi$ pour $\varphi \in \mathcal{E}^-(f_1 + f_2)$ et la borne inférieure de l'ensemble des $\int_a^b \psi$ pour $\psi \in \mathcal{E}^+(f_1 + f_2)$.

Or, comme $\varphi_1 + \varphi_2$ est une fonction en escaliers, $\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2$.

Il résulte alors de (3.7) et (3.8) que

$$\left| \int_a^b (f_1 + f_2) - \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 \right| \leq 4\varepsilon \quad (3.9)$$

Enfin, comme c'est valable pour tout ε , on obtient, en le faisant tendre vers 0 :

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \quad (3.10)$$

Remarque :

Seule l'intégrabilité a ici été utilisée.

◇ Preuve de (3.3).

— Premier cas : $\lambda \geq 0$

Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\left(\int_a^b f_1 \right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b f_1 \leq \int_a^b \psi_1 \leq \left(\int_a^b f_1 \right) + \varepsilon \quad (3.11)$$

D'où $\lambda \int_a^b f_1 - \lambda\varepsilon \leq \lambda \int_a^b \varphi_1 \leq \lambda \int_a^b f_1 \leq \lambda \int_a^b \psi_1 \leq \lambda \int_a^b f_1 + \lambda\varepsilon$

Par ailleurs, $\lambda\varphi_1$ et $\lambda\psi_1$ sont en escalier et $\lambda\varphi_1 \leq \lambda f_1 \leq \lambda\psi_1$.

Donc $\lambda\varphi_1 \in \mathcal{E}^-(\lambda f_1)$ et $\lambda\psi_1 \in \mathcal{E}^+(\lambda f_1)$

Donc $\int_a^b \lambda\varphi_1 \leq \int_a^b \lambda f_1 \leq \int_a^b \lambda\psi_1$

Il en résulte que :

$\left| \int_a^b \lambda f_1 - \lambda \int_a^b f_1 \right| \leq 2\varepsilon$ d'où le résultat cherché en faisant tendre ε vers 0.

— Deuxième cas : $\lambda < 0$, la démonstration est analogue en « retournant » les inégalités.

- Le cas où $a = b$ est immédiat.
- Le cas où $a > b$ peut être traité en écrivant les résultats montrés pour le cas où $a < b$ et en multipliant les inégalités par -1 .

C) Additivité par rapport aux intervalles, théorème de Chasles

Théorème :

Soit S un segment de \mathbb{R} , et f une fonction définie sur S .

Alors, pour tous a, b, c de S , on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad (3.12)$$

Démonstration :

- Premier cas : si $a < c < b$

Soit $\varepsilon > 0$.

On note $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ les ensembles des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$

On introduit alors $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ telles que :

$$\left(\int_a^b f \right) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi \leq \left(\int_a^b f \right) + \varepsilon \quad (3.13)$$

On a alors : $\int_a^c \varphi \leq \int_a^c f \leq \int_a^c \psi$.

En effet, $\varphi|_{[a,c]}$ est en escalier sur $[a, c]$

Et $\varphi|_{[a,c]} \leq f|_{[a,c]}$

D'où, d'après la définition de $\int_a^c f$, $\int_a^c \varphi \leq \int_a^c f$, et, de même, on montre la deuxième inégalité.

De même, on a aussi : $\int_c^b \varphi \leq \int_c^b f \leq \int_c^b \psi$

Ainsi, en sommant (et en prenant en compte les propriétés des fonctions en escalier) : $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f + \int_c^b f \leq \int_a^b \psi$

On montre ensuite le résultat de la même manière que dans les autres théorèmes.

- Pour les autres cas, on montre aisément le résultat grâce à celui-ci, par exemple :
 - ◊ Si $a = b < c$, immédiat...
 - ◊ Si $b < a < c$, alors $\int_b^a f = \int_b^c f + \int_c^a f$
 D'où $\int_b^a f = \int_b^c f - \int_a^c f$, soit $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

D) Croissance

Théorème :

Si f, g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ avec $a < b$, et si $f < g$, alors :

$$\int_a^b f < \int_a^b g \tag{3.14}$$

La démonstration est immédiate en utilisant la linéarité et la positivité.

II Majorations, minorations d'intégrales

Théorème :

Soit f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, avec $a \leq b$.

(Alors f est bornée sur $[a, b]$).

On a :

$$(b - a) \inf f \leq \int_a^b f \leq (b - a) \sup f \tag{3.15}$$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \tag{3.16}$$

Démonstration (cas où $a = b$ évident) :

- (3.15) $\inf f \leq f \leq \sup f$, donc, par croissance (puisque $a < b$) :
 $\int_a^b \inf f \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sup f$, d'où l'inégalité (puisque $\inf f$ et $\sup f$ sont constantes)
- (3.16) On a : $-|f| \leq f \leq |f|$ Donc $\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, soit $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, d'où le résultat (on utilise le fait que si $-A \leq X \leq A$, alors $|X| \leq A$)

Conséquence :

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ avec $a \leq b$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \inf_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad (3.17)$$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \int_a^b |f(x)| dx \quad (3.18)$$

Pour la dernière inégalité, on a en effet : $\forall x \in [a, b], |f(x)g(x)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |g(t)| \times |f(x)|$, et la croissance de l'intégrale.

Remarque à propos de la croissance

- La théorie, c'est $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- En pratique, on utilise : $(\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

On dit « intégrer une inégalité »

Dans les cas où $a > b$, en pratique, on « retourne » : $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Il peut cependant être utile de savoir que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$ (même quand $a \geq b$)

III Considérations à propos de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Proposition :

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ qui ne diffèrent que sur un nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Démonstration :

$f - g$ est une fonction en escalier dont l'intégrale est évidemment nulle. (car sa valeur constante sur chaque intervalle ouvert d'une subdivision subordonnée est nulle).

Étude :

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$ (et non continue)

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision subordonnée à f .

On sait que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut introduire f_i , prolongement par continuité de $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ à $[x_{i-1}, x_i]$.

Alors $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i$

Donc $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i$.

Ce qui ramène l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à une somme d'intégrales de fonctions continues sur des segments.

IV Positivité stricte

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

Si f est positive et non identiquement nulle, alors $\int_a^b f > 0$

Remarque :

c'est faux pour une fonction continue par morceaux et non continue.

Démonstration :

On se place dans les hypothèses du théorème : il existe alors $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$.

Comme f est continue en c , il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \underbrace{[a, b] \cap [c - \alpha, c + \alpha]}_{\text{segment du type } [c', c'']}, f(x) \geq \frac{f(c)}{2} \quad (3.19)$$

avec $a \leq c' < c'' \leq b$

$$\text{Alors } \int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c'} f}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{c'}^{c''} f}_{\geq (c'' - c') \frac{f(c)}{2} > 0} + \underbrace{\int_{c''}^b f}_{\geq 0} > 0$$

V Inégalité de Cauchy–Schwartz pour les intégrales

Dans cette section, a et b sont deux réels tels que $a < b$

A) Un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$

(Rappel : $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -ev)

Proposition :

L'application $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f \times g$$

Démonstration :

- Pour tous $f, f', g, g' \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b f(g + \lambda g') = \int_a^b fg + \lambda fg' = \int_a^b fg + \lambda \int_a^b fg' \quad (3.20)$$

et

$$\int_a^b (f + \lambda f')g = \int_a^b fg + \lambda f'g = \int_a^b fg + \lambda \int_a^b f'g \quad (3.21)$$

D'où la bilinéarité.

- Pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on a :

$$\int_a^b fg = \int_a^b gf \quad (3.22)$$

D'où la symétrie.

- Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on a :

$\int_a^b f^2 \geq 0$ car $\forall x \in [a, b], f(x)^2 \geq 0$ (d'où la positivité)

Si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f^2 = 0$ (positivité stricte puisque f^2 est positive et continue)

D'où $f = 0$

L'application est donc bien définie-positive.

B) Conséquence : inégalité de Cauchy-Schwartz

Conséquence :

Pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on a :

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2 \quad (3.23)$$

Variante :

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2} \quad (3.24)$$

VI Sommes de Riemann

Dans ce paragraphe, a et b désignent deux réels, avec $a < b$.

A) Le théorème

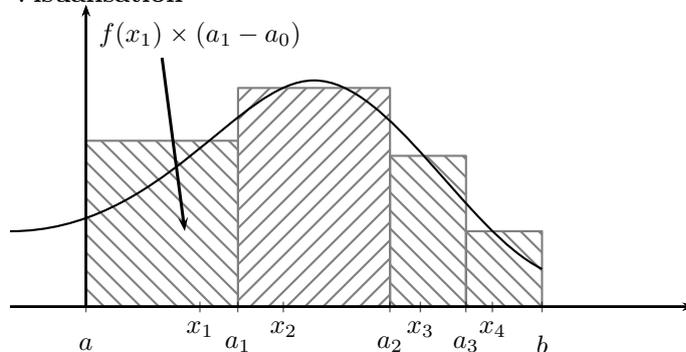
Définition :

Soit f continue sur $[a, b]$, et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$.

Une somme de Riemann attachée à f et σ , c'est une somme du type :

$S_{f, \sigma, x} = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(x_k)$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille de points de $[a, b]$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in [a_{k-1}, a_k]$.

Visualisation



Théorème :

Soit f continue sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision σ de pas inférieur à α et toute somme de Riemann S attachée à f et σ , $|S - \int_a^b f| < \varepsilon$.

(Le pas d'une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ est la valeur de $\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (a_i - a_{i-1})$)

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$.

On introduit alors $\alpha > 0$ tel que $\forall x, x' \in [a, b], (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$ (ce qui est possible car f est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle y est uniformément continue)

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de pas inférieur à α .

Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on prend $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$

Soit alors $S = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(x_k)$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k) \right| &= \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x_k) dx \right| \\ &= \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(x) - f(x_k)) dx \right| \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(x_k)| dx \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour tout $x \in [a_{k-1}, a_k]$, on a $|f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$ puisque $|x - x_k| \leq a_k - a_{k-1} < \alpha$

Donc $\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k) \right| \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} \varepsilon dx = (a_k - a_{k-1})\varepsilon$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - S \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(x_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k) \right) \right| \end{aligned} \quad (3.26)$$

D'où :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})\varepsilon = (b - a)\varepsilon \quad (3.27)$$

B) Cas particulier : les sommes S_n, s_n, M_n

Soit f continue sur $[a, b]$

On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (3.28)$$

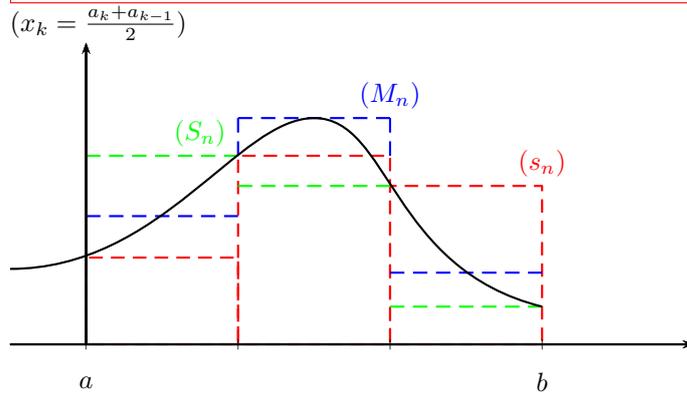
C'est-à-dire :

On prend pour σ la subdivision régulière de $[a, b]$ en n segments, et, en notant $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$, on prend les $x_k = a_k$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + (k-1) \frac{b-a}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (3.29)$$

(Même subdivision, mais $x_k = a_{k-1}$)

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) \quad (3.30)$$



Théorème :

Les suites $(S_n), (s_n), (M_n)$ convergent vers $\int_a^b f$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ comme dans le théorème précédent.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} < \alpha$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, la subdivision régulière de $[a, b]$ en n parties est de pas $\frac{b-a}{n} < \alpha$, donc $|s_n - \int_a^b f| < \varepsilon$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, |s_n - \int_a^b f| < \varepsilon$

(pour les autres suites remplacer simplement s_n)

Exemple :

$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ (pour $k \geq 1$). Montrer que (u_n) converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad .$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

Les $\frac{k}{n}$ sont les points de la subdivision régulière de $[0, 1]$ en n parties : on reconnaît alors une somme de Riemann :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.31)$$

f étant continue sur $[0, 1]$, u_n tend vers $\underbrace{\int_0^1 f}_{\ln 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C) Retour aux sommes de Riemann générales

Majoration de l'erreur quand f est lipschitzienne On suppose ici l'existence de $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x, x' \in [a, b], |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'| \quad (3.32)$$

Soit S une somme de Riemann attachée à f et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ avec le choix $x = (x_1, \dots, x_n)$ des points $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$. Majorons $|\int_a^b f - S|$

En reprenant la démonstration du A) :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - (a_k - a_{k-1})f(x_k) \right| &\leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(x_k)| dx \\
 &\leq M \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - x_k| dx \\
 &\leq M \int_{a_{k-1}}^{a_k} (a_k - a_{k-1}) dx \\
 &\leq M(a_k - a_{k-1})^2 \\
 &\leq M\delta^2
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Où on a noté δ le pas de la subdivision.

Ainsi, en continuant la démonstration comme au A) :

$$\left| \int_a^b f - S \right| \leq nM\delta^2 \tag{3.34}$$

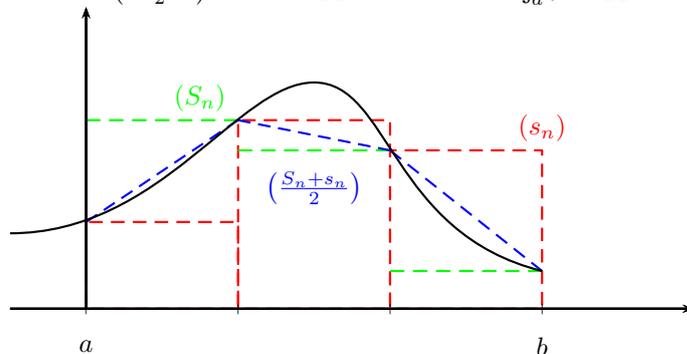
Ou, lorsque la subdivision est régulière :

$$\left| \int_a^b f - S \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{n} \tag{3.35}$$

D) Remarque sur la méthode des trapèzes

Prendre (S_n) ou (s_n) comme approximation de $\int_a^b f$, c'est appliquer la méthode des rectangles. (pour (M_n) aussi)

Prendre $(\frac{S_n+s_n}{2})$ comme approximation de $\int_a^b f$ s'appelle appliquer la méthode des trapèzes :



E) Cas où f est monotone (et toujours continue)

Supposons f croissante; alors, en notant toujours (a_0, \dots, a_n) la subdivision régulière de $[a, b]$ en n parties : $\forall x \in [a_{k-1}, a_k], f(a_{k-1}) \leq f(x) \leq f(a_k)$

Donc

$$\underbrace{\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(a_{k-1}) dx}_{(a_k - a_{k-1})f(a_{k-1})} \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx \leq \underbrace{\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(a_k) dx}_{(a_k - a_{k-1})f(a_k)} \tag{3.36}$$

D'où, en sommant :

$$s_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n \tag{3.37}$$

Il en est de même quand f est décroissante (en retournant les inégalités)

Application :

$$\left| \int_a^b f - S_n \right| \leq |S_n - s_n| \quad (3.38)$$

$$\left| \int_a^b f - s_n \right| \leq |S_n - s_n| \quad (3.39)$$

$$S_n - s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \quad (3.40)$$

Exemple numérique Donner une approximation à 2×10^{-1} près de $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

On note $f: x \rightarrow \frac{1}{1+x^4}$.

f est décroissante. Donc $S_n \leq I \leq s_n$

$$s_n - S_n = \frac{1}{n} (f(0) - f(1)) = \frac{1}{2n} \quad (3.41)$$

On encadre I par S_n et s_n avec n tel que $\frac{1}{2n} \leq 2 \times 10^{-1}$; on prend ainsi $n = 3$.

$$s_3 = \frac{1}{3} \left(f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right) = 0.94 \dots \quad (3.42)$$

$$S_3 = s_3 - \frac{1}{6} = 0.77 \dots \quad (3.43)$$

D'où $0.77 \leq I \leq 0.95$

Donc $I \approx 0.85$ à 10^{-1} près

ou $I \approx 0.8$ à 2×10^{-1} près.

F) Remarque

La théorie parle de $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ pour f continue sur $[a, b]$.

En pratique, on reconnaît le plus souvent $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ où φ est continue sur $[0, 1]$.

Et, en effet, $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = (b-a) \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ avec :

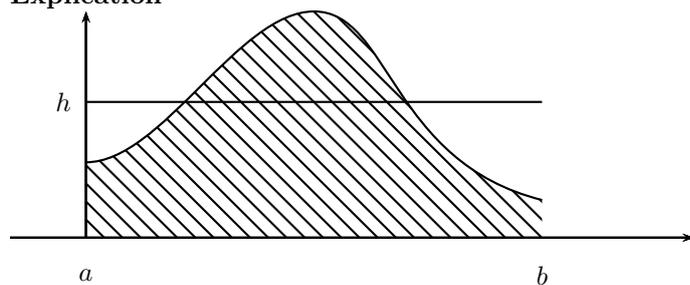
$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f\left(a + t(b-a)\right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

VII Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, avec $a < b$.

On définit la valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

Explication



La valeur moyenne h de f sur $[a, b]$ est le réel h tel que l'aire hachurée soit l'aire correspondante pour la fonction constante égale à h . Ou :

Soit (a_0, \dots, a_n) la subdivision régulière de $[a, b]$. Moyenne arithmétique des $f(a_i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \times \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k)}_{\text{tend vers } \int_a^b f(t) dt} \quad (3.45)$$