# Chapitre 2 : Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

$a$ et $b$ désignent deux réels, avec $a < b$

## I Intégrale des fonctions en escalier

### A) Subdivisions

**Définition :**

On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie $(a_0, a_1, \dots a_n)$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.

Si $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$ et $\sigma' = (a'_0, a'_1, \dots a'_m)$ sont deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que $\sigma'$ est plus fine que $\sigma$ lorsque $\{a_0, a_1, \dots a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \dots a'_m\}$

Si $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$ et $\sigma' = (a'_0, a'_1, \dots a'_m)$ sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, il est clair qu'on peut toujours fabriquer une subdivision plus fine que $\sigma'$ et que $\sigma$ en réordonnant les points de l'ensemble $\{a_0, a_1, \dots a_n\} \cup \{a'_0, a'_1, \dots a'_m\}$.

### B) Fonctions en escalier

**Définition :**

On dit qu'une fonction $f$ définie sur $[a, b]$ est en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$ de $[a, b]$ telle que $f$ soit constante sur chaque intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$, $i$ allant de 1 à $n$.

**Vocabulaire :**

La subdivision $\sigma$ est alors dite subordonnée à la fonction en escalier $f$.

On voit que si $f$ est une fonction en escalier, et si $\sigma$ est une subdivision subordonnée à $f$, alors toute subdivision plus fine que $\sigma$ est subordonnée à la fonction $f$.

Comme une fonction en escalier sur $[a, b]$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle y est bornée.

**Proposition :**

Étant données deux fonctions $f$ et $g$ en escalier sur $[a, b]$, de subdivisions subordonnées respectives $\sigma$ et $\sigma'$, toute subdivision $\sigma''$ plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$ est subordonnée à la fois à $f$ et à $g$. Il est alors clair que toute combinaison linéaire de $f$ et $g$, ainsi que le produit $fg$, sont en escalier sur $[a, b]$, de subdivision subordonnée $\sigma''$.

De là, il résulte que l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ (qui contient les fonctions constantes sur $[a, b]$, donc en particulier la constante 1) est une sous algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions définies sur $[a, b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$).

### C) Intégrale des fonctions en escalier

**Proposition :**
Soit $f$ en escalier sur $[a, b]$, et soit $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$ une subdivision subordonnée à $f$. Notons, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$, $y_i$ la valeur constante prise par $f$ sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$. Alors la valeur prise par le nombre $I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})y_i$ ne dépend pas du choix de la subdivision $\sigma$ subordonnée à $f$.

**Démonstration (Idée) :**
On peut d'abord montrer aisément que si $\sigma'$ se déduit de $\sigma$ en ajoutant un point, alors $I(f, \sigma') = I(f, \sigma)$.

De là, on montre par récurrence sur le nombre de points ajoutés que si $\sigma'$ est plus fine que $\sigma$, alors $I(f, \sigma') = I(f, \sigma)$.

Enfin, dans le cas général, on introduit une subdivision $\sigma''$ plus fine que $\sigma'$ et $\sigma$, et on a alors $I(f, \sigma') = I(f, \sigma'') = I(f, \sigma)$.

**Définition :**
On peut donc définir l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ comme étant la valeur de $I(f, \sigma)$, indépendante du choix de la subdivision $\sigma$ subordonnée à $f$. Cette intégrale est notée $\int_{[a,b]} f$. Ainsi, avec les notations précédentes : $\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})y_i$.

Cette définition correspond à une vision « géométrique » de l'intégrale : somme des aires algébriques des rectangles délimités par la courbe de $f$ et l'axe $Ox$.

On peut remarquer au passage que l'intégrale d'une fonction constante sur $[a, b]$ est $k(b-a)$ où $k$ est la valeur de cette constante.

**Propriétés :**
On montre aisément que cette intégrale des fonctions en escaliers a les propriétés suivantes : ($f$ et $g$ désignent deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, et $\lambda$ et $\mu$ deux réels)

- Positivité : si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$
- Linéarité : $\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$
- Additivité : Si $a < c < b$, alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ (on vérifie aisément que $f$ est bien en escalier sur $[a, c]$ et $[c, b]$).
- Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$ (propriété de croissance déduite de la linéarité et de la positivité)

## II Fonctions intégrables

Soit $f$ une fonction définie sur $[a, b]$, que l'on suppose bornée. On peut donc introduire $\sup f$ et $\inf f$.

Soit $\mathscr{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions $\varphi$ en escalier sur $[a, b]$ plus petites que $f$ (c'est-à-dire telles que $\varphi \leqslant f$).

Soit $\mathscr{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions $\psi$ en escalier sur $[a, b]$ plus grandes que $f$ (c'est-à-dire telles que $f \leqslant \psi$).

Les ensembles $\mathscr{E}^-(f)$ et $\mathscr{E}^+(f)$ sont non vides : $\mathscr{E}^-(f)$ contient la fonction constante égale à $\inf f$, et $\mathscr{E}^+(f)$ la fonction constante égale à $\sup f$.

Soit $\mathscr{A}^-(f)$ l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier de $\mathscr{E}^-(f)$.

Soit $\mathscr{A}^+(f)$ l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier de $\mathscr{E}^+(f)$.

Les ensembles $\mathscr{A}^-(f)$ et $\mathscr{A}^+(f)$ sont donc des ensembles non vides de réels, et de plus tout élément de $\mathscr{A}^-(f)$ est inférieur à tout élément de $\mathscr{A}^+(f)$ : en effet, si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, alors $\varphi \leqslant \psi$ et par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier, on a $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.

Donc $\mathscr{A}^-(f)$ admet une borne supérieure, notée $I^-(f)$, et $\mathscr{A}^+(f)$ une borne inférieure, notée $I^+(f)$. Ainsi, $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.

**Définition :**

Si il y a égalité entre ces deux bornes, on dit que $f$ est intégrable sur $[a, b]$, et on appelle l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ la valeur commune de ces bornes.

Dans le cas contraire, ou si $f$ n'est pas bornée sur $[a, b]$, on dira que $f$ n'est pas intégrable sur $[a, b]$.

Cette définition de l'intégrabilité est l'intégrabilité au sens de Riemann.

On peut noter que, selon cette définition, les fonctions en escalier sont bien intégrables sur $[a, b]$, et que leur intégrale au sens de cette définition coïncide avec leur intégrale au sens de la définition du paragraphe précédent (en effet, il suffit de voir que, lorsque $f$ est en escalier, $f$ appartient à $\mathscr{E}^-(f)$ et à $\mathscr{E}^+(f)$...)

Enfin, si $f$ est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale sur $[a, b]$ est notée $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (dans la dernière notation, $t$ est une variable muette, elle peut prendre n'importe quel autre nom).

On voit que la définition correspond encore bien à une vision « géométrique » de l'intégrale : aire algébrique de la surface délimitée par la courbe de $f$ et l'axe $Ox$.

# III Fonctions continues par morceaux

## A) Définition et généralités

**Définition :**

Soit $f$ une fonction définie sur $[a, b]$. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$ de $[a, b]$ telle que :

> Pour chaque $i$ de 1 à $n$, $f$ est continue sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$, admet une limite finie à droite en $a_{i-1}$ et une limite finie à gauche en $a_i$.

La subdivision $\sigma$ est alors dite subordonnée à la fonction continue par morceaux $f$.

On voit que si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, et si la subdivision $\sigma$ est subordonnée à $f$, alors toute subdivision plus fine que $\sigma$ est subordonnée à la fonction $f$.

Il est clair que $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $f$ ne présente qu'un nombre fini de points de discontinuité (voire aucun...), en lesquels $f$ admet néanmoins des limites finies à droite et à gauche (à droite seulement pour $a$ et à gauche seulement pour $b$).

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, et soit $(a_0, a_1, \dots a_n)$ une subdivision subordonnée à $f$. Alors, pour chaque $i$ de $[\![1, n]\!]$, la restriction de $f$ à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ est prolongeable par continuité en une fonction $f_i$ continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$.

Il en résulte qu'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ y est bornée : en effet, avec les notations précédentes, pour chaque $i$ de $[\![1, n]\!]$, la fonction $f_i$ est continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$, donc bornée sur ce segment. Comme les points $a_i$ sont en nombre fini, $f$ est bornée sur $[a, b]$, un majorant de $|f|$ étant :

$$\max\left(|f(a_0)|, |f(a_1)|, \dots |f(a_n)|, \sup_{[a_0,a_1]} |f_1|, \sup_{[a_1,a_2]} |f_2|, \dots \sup_{[a_{n-1},a_n]}\right) \tag{2.1}$$

On montre, comme pour les fonctions en escalier que toute combinaison linéaire ou produit de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est encore continue par morceaux sur $[a, b]$. De là, on tire que les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ forment une sous algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions définies sur $[a, b]$.

## B) Encadrement par des fonctions en escalier

**Théorème :**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors, pour tout réel strictement positif $\varepsilon$, il existe une fonction en escalier $\varphi$ sur $[a, b]$ telle que $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$.

**Démonstration :**

- Commençons par le cas où $f$ est continue sur $[a, b]$.

  Soit $\varepsilon > 0$.

  Comme $f$ est uniformément continue sur le segment $[a, b]$ (théorème de Heine), il existe $\alpha > 0$ tel que :

  $$\forall x \in [a, b], \forall x' \in [a, b], \left(|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon\right) \tag{2.2}$$

  On considère un entier naturel non nul $n$ tel que $\frac{b-a}{n} < \alpha$, et la subdivision régulière $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_n)$ de $[a, b]$ définie par :

  $$\forall k \in [\![0, n]\!], x_k = a + kh, \qquad \text{avec } h = \frac{b-a}{n} \text{ (pas de la subdivision régulière } \sigma) \tag{2.3}$$

  On considère alors la fonction $\varphi$ en escalier définie par :

  $$\forall k \in [\![1, n]\!], \forall t \in [x_{k-1}, x_k[, \varphi(t) = f(x_{k-1}) \text{ et } \varphi(b) = f(b) \tag{2.4}$$

  Alors $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$

  Soit $t \in [a, b]$

  - ◇ Si $t = b$, alors $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$
  - ◇ Sinon, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $t \in [x_{k-1}, x_k[$.

    Alors $|f(t) - \varphi(t)| = |f(t) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$, la dernière inégalité venant du fait que, pour $t \in [x_{k-1}, x_k[$, on a $|t - x_{k-1}| \leqslant \underbrace{x_k - x_{k-1}}_{h} < \alpha$

- Si maintenant $f$ n'est que continue par morceaux : On introduit une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_m)$ subordonnée à $f$, et, pour chaque $i$ de $[\![1, m]\!]$, on considère la fonction $f_i$ comme introduite au début de la section, qui est continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$ et qui coïncide avec $f$ sur $]a_{i-1}, a_i[$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on applique alors le résultat précédent à chaque fonction $f_i$ pour construire, sur chaque segment $[a_{i-1}, a_i]$ une fonction en escalier $\varphi_i$ telle que $\forall t \in [a_{i-1}, a_i], |f_i(t) - \varphi_i(t)| \leqslant \varepsilon$. On peut ensuite construire une fonction $\varphi$ définie sur $[a, b]$ par :

$$\forall i \in [\![0, m]\!], \varphi(a_i) = f(a_i) \tag{2.5}$$

et

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall t \in ]a_{i-1}, a_i[, \varphi(t) = \varphi_i(t). \tag{2.6}$$

Alors $\varphi$ est évidemment en escalier sur $[a, b]$, et $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$.

Autre énoncé du théorème, plus commode pour la suite :

**Théorème (variante) :**
Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors, pour tout réel strictement positif $\varepsilon$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \varphi \leqslant \varepsilon \tag{2.7}$$

Les deux énoncés reviennent au même, car si $\varphi$ est une fonction en escalier telle que $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$, alors les fonctions $\varphi' = \varphi - \varepsilon$ et $\psi' = \varphi + \varepsilon$ sont en escalier et on a $\varphi' \leqslant f \leqslant \psi'$ et $\psi - \varphi \leqslant 2\varepsilon$, et inversement, si $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$, alors évidemment $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$.

## C) Conséquence : intégrabilité

**Théorème :**
Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

**Démonstration :**
Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Selon le théorème précédent, on peut introduire deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.
Alors, en reprenant les notations de la définition du début du chapitre, $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathscr{E}^+(f)$, on a donc $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant I^-(f) \leqslant I^+(f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.
Par linéarité et croissance des intégrales des fonctions en escalier, on a alors :

$$\int_{[a,b]} \varphi - \int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} \varphi - \psi \leqslant \int_{[a,b]} \varepsilon = (b - a)\varepsilon \tag{2.8}$$

Donc $0 \leqslant I^+(f) - I^-(f) \leqslant (b - a)\varepsilon$.
Comme cet encadrement est valable quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il en résulte, par passage à la limite, que $I^+(f) - I^-(f) = 0$.
Ainsi, par définition, $f$ est intégrable sur $[a, b]$.

# IV Compléments hors programme

**Définition :**
On dit qu'une fonction $f$ définie sur $[a,b]$ est réglée lorsque, pour tout réel strictement positif $\varepsilon$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ sur $[a,b]$ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \varphi \leqslant \varepsilon \tag{2.9}$$

Comme les fonctions en escalier sont bornées, il en résulte que toute fonction réglée est bornée. En regardant les résultat précédents, on remarque que le premier théorème s'énonce alors ainsi : « toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ » est intégrable, et, en regardant la démonstration du deuxième théorème, on voit qu'on peut énoncer le théorème : « toute fonction réglée sur $[a,b]$ est intégrable ».
On a donc les implications :

Continue par morceaux $\Longrightarrow$ réglée $\Longrightarrow$ intégrable $\Longrightarrow$ bornée.

Mais toutes les réciproques sont fausses :

- Exemple de fonction bornée non intégrable.
  Soit $f$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ sur $[0,1]$ (c'est-à-dire $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon)
  Si $\varphi$ est en escalier sur $[0,1]$ et $\varphi \leqslant f$, alors sur tout intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ d'une subdivision subordonnée à $\varphi$, la valeur constante prise par $\varphi$ sera nécessairement inférieure ou égale à 0 puisque $f$ prend la valeur 0 sur $]a_{i-1}, a_i[$ (qui contient des irrationnels). Donc $I^-(f) \leqslant 0$. De même, $I^+(f) \geqslant 1$, d'où la non intégrabilité de $f$ (au sens de Riemann).

- Exemple de fonction non continue par morceaux, même non réglée, mais intégrable : Soit $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, 0 sinon. Déjà, $f$ n'est pas continue par morceaux puisqu'elle n'a pas de limite en 0. De plus, on ne peut pas trouver deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ sur $[0,1]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant 1$. En effet, comme $f$ prend les valeurs $-1$ et 1 sur tout intervalle $[0,\alpha]$ avec $0 < \alpha \leqslant 1$, si deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ encadrent $f$ alors sur le premier intervalle $[0, a_1]$ d'une subdivision subordonnée à $\varphi$ et $\psi$, les valeurs constantes prises par ces fonctions sont distantes d'au moins 2.
  Cependant, soit $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < 1$. Alors $f$ restreinte à $[\varepsilon, 1]$ est continue, donc encadrable, sur cet intervalle, par deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ sur $[\varepsilon, 1]$, distantes d'au plus $\varepsilon$. Si on prolonge $\varphi$ et $\psi$ sur $[0,1]$ en prenant $\varphi(t) = -1$ et $\psi(t) = 1$ pour $t \in [0, \varepsilon[$, alors il est clair que $\varphi$ et $\psi$ sont en escalier sur $[0,1]$, que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, et que :

$$\int_{[0,1]} \psi - \int_{[0,1]} \varphi = \int_{[0,\varepsilon]} \psi - \varphi + \int_{[\varepsilon,1]} \psi - \varphi \leqslant 2\varepsilon + (1-\varepsilon)\varepsilon \leqslant 3\varepsilon \tag{2.10}$$

  D'où, comme dans la fin de la démonstration du deuxième théorème : $I^+(f) - I^-(f) = 0$.

- Exemple de fonction non continue par morceaux, qui est pourtant réglée. Soit $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$ si $x \neq 0$, 0 sinon.
  Alors $f$ n'est pas continue par morceaux, car elle a une infinité de points de discontinuité (les $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$). Cependant, on peut facilement l'encadrer à n'importe quel $\varepsilon$ près par des fonctions en escalier (voir sur un graphique : pour $n$ assez grand (tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$), on encadre $f$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ par les constantes 0 et $\frac{1}{n}$, et on conserve $f$ sur $]\frac{1}{n}, 1]$)
  Ainsi, $f$ est réglée, et aussi intégrable. (d'intégrale $I = \frac{\pi^2}{6} - 1$).