Chapitre 19 : Géométrie dans un espace affine euclidien

I Généralités en dimension finie

A) Divers

1) Définition

Un espace affine euclidien, c'est un espace affine $\mathscr{E}$ attaché à un espace vectoriel euclidien E.

2) Repère orthonormé

C'est un repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

3) Distances

- Pour $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$, noté AB.

  L'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathbb{R}(A, B)d(A, B)$ est bien une distance :
  - d est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
  - $d(A, B) = 0 \iff A = B$
  - $d(B, A) = d(A, B)$
  - $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$
- Si $\mathscr{P}$ est une partie non vide de $\mathscr{E}$, et A un point de $\mathscr{E}$, on définit :

$$d(A, \mathscr{P}) = \inf\{d(A, M), M \in \mathscr{P}\} \tag{19.1}$$

- Si $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ sont deux parties non vides de $\mathscr{E}$, on définit :

$$d(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = \inf\{d(M_1, M_2), M_1 \in \mathscr{P}_1, M_2 \in \mathscr{P}_2\} \tag{19.2}$$

4) Notions d'angle, d'orthogonalité,...

Ce sont les notions qui concernent les directions des sous-espaces affines concernés.

Exemple :

Si $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ sont deux droites affines de directions D_1, D_2, l'angle non orienté $(\mathscr{D}_1 \hat{;} \mathscr{D}_2)$ est l'angle non orienté $(D_1 \hat{;} D_2)$.

Remarque :

demi-droite : la demi-droite d'origine $A \in \mathscr{E}$ et de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$, c'est $\{A + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$.

L'angle entre deux demi-droites est l'angle entre les vecteurs correspondants.

5) Projection orthogonale

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

Soit $A \in \mathscr{E}$.

La projection orthogonale de A sur $\mathscr{F} \underset{\text{déf}}{=}$ l'image de A par le projecteur orthogonal sur $\mathscr{F}$ = l'unique point H de $\mathscr{F}$ tel que $\overrightarrow{AH} \perp \mathscr{F}$ (c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AH} \in F^{\perp}$ où F est la direction de $\mathscr{F}$).

Théorème :
La projection orthogonale H de A sur $\mathscr{F}$ est l'unique point de $\mathscr{F}$ tel que $d(A, \mathscr{F}) = d(A, H)$.

Démonstration :
On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{F}$.

Pour $M \in \mathscr{F}$, $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2$.

Donc $\|\overrightarrow{AM}\| \geqslant \|\overrightarrow{AH}\|$, et il y a égalité si et seulement si $M = H$.

Et comme $H \in \mathscr{F}$, on a bien $AH = \min_{M \in \mathscr{F}}(AM)$.

6) Les hyperplans

- L'hyperplan passant par $A \in \mathscr{E}$ orthogonal à $\vec{n} \in E \backslash \{0_E\}$, c'est $H = \{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}\}$
- « Réciproque » : Lignes de niveau de l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} \end{array}$, où $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in E \backslash \{0_E\}$.

  Pour $k \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$, c'est $\mathscr{H}_k = \{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k\}$.

  On peut introduire H sur $(A, \vec{u})$ tel que $H \in \mathscr{H}_k$. En effet, il suffit de prendre H tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{k\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

  Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$:

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{H}_k &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \\ &\iff \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \end{aligned} \tag{19.3}$$

  Donc $\mathscr{H}_k$ est l'hyperplan orthogonal à $\vec{u}$ passant par H.
- Cas particulier : Hyperplan médiateur de deux points distincts.

  Soient $A, B \in \mathscr{E}$, distincts.

  Soit $\mathscr{M} = \{M \in \mathscr{E}, d(A, M) = d(B, M)\} = \{M \in \mathscr{E}, AM = BM\}$.

  Soit I le milieu de $[A, B]$.

  Alors $AM^2 - BM^2 = \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{BM}^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{IM})$

  Donc $AM = BM \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$

  Donc $\mathscr{M} = \{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0\}$, on reconnaît l'hyperplan passant par I orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. On l'appelle l'hyperplan médiateur de A et de B.
- Distance d'un point à un hyperplan.

  Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan passant par A orthogonal à $\vec{n}$.

  Soit $M \in \mathscr{E}$; $d(M, \mathscr{H}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{H}$.

  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \underbrace{\overrightarrow{HM}}_{\lambda \vec{n}}$. Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda \|\vec{n}\|^2$.

  Donc $MH = |\lambda| \|\vec{n}\|^2 = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

B) Les isométries

Définition :

Soit $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$.

f est une isométrie de $\mathscr{E}$ $\underset{\text{déf}}{\iff}$ f conserve les distances, c'est-à-dire :

$$\forall A, B \in \mathscr{E}, d(f(A), f(B)) = d(A, B) \tag{19.4}$$

Proposition :

Les isométries de $\mathscr{E}$ sont exactement les applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire appartient à $\mathcal{O}(E)$ (c'est-à-dire dont la partie linéaire est un automorphisme de E)

Démonstration :

- Si f est une application affine de partie linéaire $\varphi \in \mathcal{O}(E)$, alors, pour tous points $A, B \in \mathscr{E}$, en notant A', B' leurs images par f :

$$d(A', B') = \|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\varphi(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) \tag{19.5}$$

- Supposons que f conserve les distances.

  On admet qu'alors f est affine. Soit alors $\varphi = \operatorname{Lin} f$.

  Montrons que φ conserve les normes (c'est-à-dire que $\varphi \in \mathcal{O}(E)$)

  Soient $\vec{u} \in E$, $A \in \mathscr{E}$, notons $B = A + \vec{u}$. Alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

  Donc $\|\varphi(\vec{u})\| = \|\varphi(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| = A'B' = AB = \|\vec{u}\|$ (en notant avec des $'$ les images par f)

Définition :

Un déplacement de $\mathscr{E}$ est une symétrie directe de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire appartient à $\mathcal{SO}(E)$.

Un antidéplacement de $\mathscr{E}$ est une symétrie indirecte de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire appartient à $\mathcal{O}(E)\backslash\mathcal{SO}(E)$.

Proposition :

$\operatorname{Is}(\mathscr{E})$, ensemble des isométries de $\mathscr{E}$, constitue un groupe pour $\circ$ (un sous-groupe de $\mathcal{GA}(\mathscr{E})$), et l'ensemble $\operatorname{Dep}(\mathscr{E})$ des déplacement de $\mathscr{E}$ en constitue un sous-groupe.

Exemple :

Les symétries orthogonales sont dans $\operatorname{Is}(\mathscr{E})$.

En effet : Si f est la symétrie par rapport à un sous-espace affine $\mathscr{F}$ selon G, alors f est affine, et la partie linéaire de f est la symétrie vectorielle par rapport à F selon G (où F est la direction de $\mathscr{F}$). En particulier, quand $G = F^{\perp}$, on dit que f est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{F}$; sa partie linéaire est alors la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à F, dont on sait qu'elle est dans $\mathcal{O}(E)$

Précision :

Si $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$, alors f, symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{F}$, est un déplacement lorsque $n - p$ est pair, un antidéplacement sinon.

Cas particulier :

Les réflexions affines (symétries orthogonales affines par rapport à un hyperplan) sont des isométries indirectes.

Proposition :

Étant donnés deux points A et B de $\mathscr{E}$, il existe une et une seule réflexion qui les échange, et c'est la réflexion d'hyperplan l'hyperplan médiateur de A et B.

II Étude d'un espace affine euclidien orienté de dimension 2

(Un espace affine orienté est un espace affine dont on a orienté la direction)

A) Les isométries en dimension 2

1) Les isométries directes

Étude :

Soit f une isométrie directe, posons $\varphi = \operatorname{Lin} f$ (ainsi, $f \in \operatorname{Dep}(\mathscr{E})$ et $\varphi \in \mathcal{SO}(E)$). On sait que φ est alors une rotation, éventuellement d'angle nul.

- Premier cas : φ est d'angle nul, c'est donc l'identité.

  Donc f est une translation, éventuellement de vecteur nul.

  Réciproquement, les translations sont bien dans $\operatorname{Dep}(\mathscr{E})$.

- Deuxième cas : φ est d'angle θ non nul (modulo 2π).

  Recherche des points invariants par f.

  Soit $O \in \mathscr{E}$, O' son image par f.

  Soit $M \in \mathscr{E}$.

  Alors $f(M) = f(O + \overrightarrow{OM}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM})$.

  $$\begin{aligned} \text{Donc } M \text{ est fixe } &\iff \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M} \iff \varphi(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O} \\ &\iff (\varphi - \operatorname{Id}_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'O} \end{aligned} \tag{19.6}$$

  On a :

  $$\ker(\varphi - \operatorname{Id}_E) = \{u \in E, \varphi(u) = u\} = \{0_E\} \tag{19.7}$$

  Donc φ est injective, donc bijective (on est en dimension finie)

  Donc M est fixe $\iff \overrightarrow{OM} = (\varphi - \operatorname{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{O'O})$.

  On a donc un et un seul point fixe Ω. (à savoir $\Omega = O + (\varphi - \operatorname{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{O'O})$)

  Mais alors : $\forall M \in \mathscr{E}, \underbrace{f(M)}_{M'} = f(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$

  Ainsi, $\overrightarrow{\Omega M'} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

  On dit que f est la rotation de centre Ω et d'angle θ. Inversement, une telle application est bien un déplacement, c'est celle qui envoie Ω sur Ω et de partie linéaire $\rho_\theta \in \mathcal{SO}(E)$.

Remarque :

Dire que $M' = f(M)$ revient à dire $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\widehat{\vec{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \mod 2\pi \end{cases}$

Classification de $\mathrm{Dep}(\mathscr{E})$

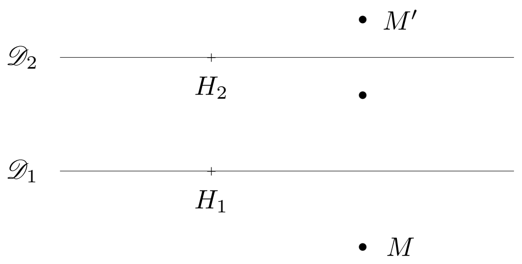
<table>
<tr><td></td><td>Ensemble des invariants</td><td>Nature du déplacement</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\varnothing$</td><td>Translation de vecteur non nul</td><td rowspan="2">Translation</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rotation</td><td>$\mathscr{E}$</td><td>Identité</td></tr>
<tr><td>$\{\Omega\}$</td><td>Rotation d'angle non nul et de centre Ω</td><td></td></tr>
</table>

2) Composée de réflexions

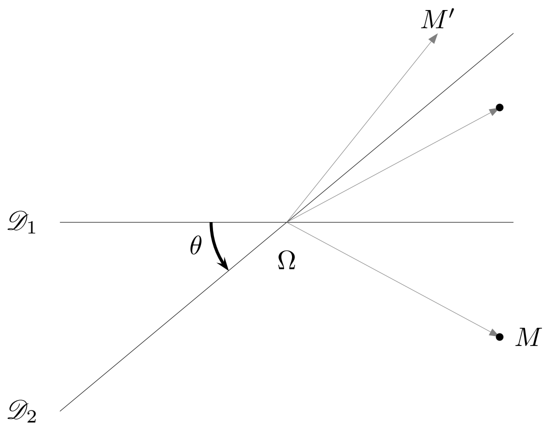
Soit s_1 une réflexion de droite $\mathscr{D}_1$, s_2 une réflexion de droite $\mathscr{D}_2$.

Si $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$, alors $s_1 \circ s_2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.

Si $\mathscr{D}_1 \neq \mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_1 \,//\, \mathscr{D}_2$, alors $s_1 \circ s_2 = t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$:



Sinon :



$s_1 \circ s_2$ est la rotation de centre Ω l'intersection des deux droites et d'angle 2θ où θ est l'angle orienté $(\widehat{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2})$

(Il suffit pour justifier l'angle de raisonner avec les parties linéaires)

Inversement, étant donnée une translation/rotation, on peut fixer une droite $\mathscr{D}_1$ orthogonale au vecteur de translation/passant par Ω et construire une autre droite de sorte que la composée des deux réflexions soit la translation/la rotation.

Ainsi, tout déplacement est composé de deux réflexions.

Toute isométrie est ainsi composée de réflexions, et même de 0, 1, 2, ou 3 réflexions.

En effet : Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{E})$.

Si f est un déplacement, on a vu qu'il fallait 0 ou 2 réflexions.

Sinon : pour un réflexion s quelconque, $s \circ f \in \operatorname{Dep}(\mathscr{E})$, donc $s \circ f$ est composée de 0 ou 2 réflexions, donc $f = s^{-1} \circ s \circ f$ est composé de 1 ou 3 réflexions.

3) Les isométries indirectes

Soit $f \in \operatorname{Is}(\mathscr{E}) \backslash \operatorname{Dep}(\mathscr{E})$.

Posons $\varphi = \operatorname{Lin} f$. Alors $\varphi \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$.

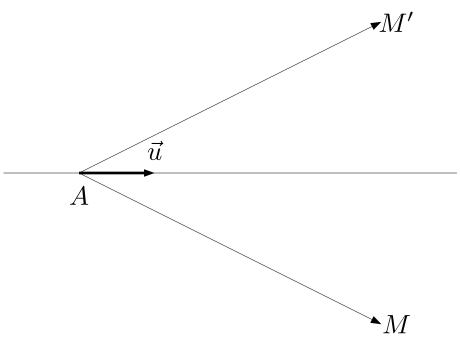
Donc φ est une réflexion vectorielle, disons de droite $D = \operatorname{Vect}(\vec{u})$.

- 1^{er} cas : f a un point fixe A.

  Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$, en notant M' son image par f, on a :

$$M' = f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = A + \varphi(\overrightarrow{AM}) \tag{19.8}$$

  Donc $\overrightarrow{AM'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$



  Donc f est la réflexion de droite $\mathscr{D}$ passant par A et de direction D.

  Inversement, les réflexions sont bien dans $\operatorname{Is}(\mathscr{E}) \operatorname{Dep}(\mathscr{E})$

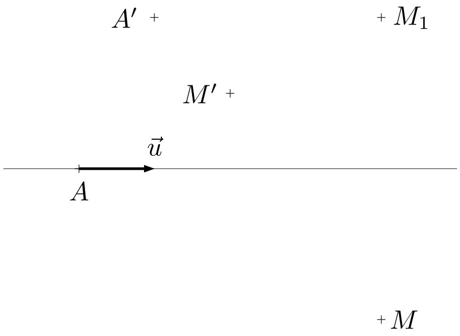
- $2^{\text{ème}}$ cas : f n'a pas de point fixe.

  Soit $A \in \mathscr{E}$, posons $A' = f(A)$.

  On considère la translation t qui envoie A' sur A.

  Alors $t \circ f$ laisse A invariant, et a pour partie linéaire $\operatorname{Id}_E \circ \varphi = \varphi$.

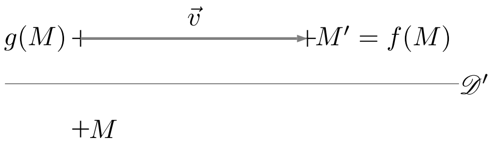
  Donc $s = t \circ f$ est la réflexion de droite $\mathscr{D}$ passant par A de direction D et $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ s$.



Mais par ailleurs, $\overrightarrow{AA'}$ s'écrit $\overrightarrow{AA'} = \underbrace{\vec{v}}_{\in D} + \underbrace{\vec{w}}_{\in D^\perp}$. Donc $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ s = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s$.

On note $g = t_{\vec{w}} \circ s$. Alors $\operatorname{Lin} g = \mathrm{Id}_E \circ \varphi = \varphi$. Mais g a un point fixe (au moins), par exemple $B = A + \frac{1}{2}\vec{w}$. Donc g est une réflexion de droite la droite $\mathscr{D}' \mathbin{//} \mathscr{D}$ passant par $A + \frac{1}{2}\vec{w}$ (et donc de direction D)

Ainsi, $f = t_{\vec{v}} \circ g$, où g est une réflexion et $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur « parallèle » à la droite de la réflexion.



Une telle transformation est évidemment sans point fixe et est bien une isométrie indirecte. On appelle ce type de transformation une réflexion glissée.

Classification :

	Ensemble des points fixes	Nature de la transformation
Direct	$\varnothing$	Translation de vecteur non nul
	$\mathscr{E}$	$\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$
	$\{\Omega\}$	Rotation d'angle non nul et de centre Ω
Indirect	$\mathscr{D}$	Réflexion de droite $\mathscr{D}$
	$\varnothing$	Réflexion glissée (c'est-à-dire $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathscr{D}}$ où $s_{\mathscr{D}}$ est la réflexion de droite $\mathscr{D}$ et $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} \in \operatorname{dir} \mathscr{D} \backslash \{0_E\}$)

B) Géométrie analytique en dimension 2

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, direct si besoin.

Une droite a pour équation $\mathscr{D} : ax + by = h$ dans $\mathscr{R}$, où $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur normal à $\mathscr{D}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

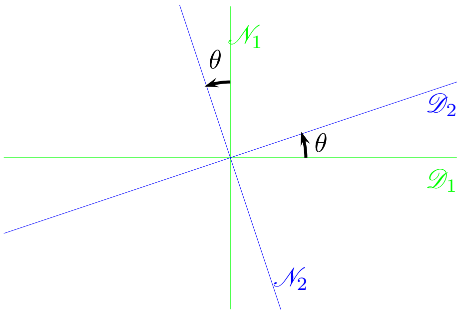
Distance d'un point à une droite Soit $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\mathscr{D} : ax + by = h$. On note $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Soit $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{D}$.

Alors $d(M_0, D) = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(x_0 - x_1)a + (y_0 - y_1)b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - h|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Angle de droites

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1 &: a_1x + b_1y = h_1 \\ \mathscr{D}_2 &: a_2x + b_2y = h_2 \end{aligned} \tag{19.9}$$



L'angle non orienté θ, c'est l'angle non orienté $(\widehat{\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2})$.

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \tag{19.10}$$

Équation de la médiatrice Soient $A_1\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $A_2\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

L'équation de la médiatrice est donc :

$$(a_2 - a_1)(x - \underbrace{\frac{a_1+a_2}{2}}_{x_0}) + (b_2 - b_1)(y - \underbrace{\frac{b_1+b_2}{2}}_{y_0}) = 0. \tag{19.11}$$

C) Les similitudes du plan

1) Définition

Définition :

Soit $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$.

f est une similitude $\underset{\text{déf}}{\iff} \exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall A, B \in \mathscr{E}, d(f(A), f(B)) = kd(A,B)$

Proposition, définition :

Si f est une similitude, alors $\exists! k \in \mathbb{R}_+^*, \forall A, B \in \mathscr{E}, d(f(A), f(B)) = kd(A,B)$.

k est alors appelé le rapport de la similitude.

Proposition :

Soit $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, soit $k > 0$.

On a les équivalences :

f est une similitude de rapport $k \iff f$ est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k

$\iff f$ est affine et sa partie linéaire s'écrit $k\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{O}(E)$

$\iff f$ conserve les angles non orientés de vecteurs.

Définition, proposition :

Soit f une similitude de rapport k. Soit ψ sa partie linéaire.

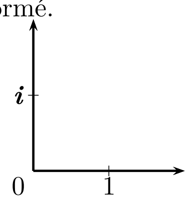
Alors $\varphi = \frac{1}{k}\psi \in \mathcal{O}(E)$.

- Si φ est dans $\mathcal{SO}(E)$, on dit que f est directe, sinon on dit que f est indirecte.
- f multiplie les distances par k, et les aires par k^2 (admis)
- Si f est directe, f conserve les angles orientés, sinon elle les retourne.

L'ensemble des similitudes de $\mathscr{E}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GA}(\mathscr{E}), \circ)$.

2) Étude des similitudes du plan complexe

On se place dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne orientée naturelle où $(0, 1, \boldsymbol{i})$ constitue un repère orthonormé.



a) Quelques similitudes

- Translation de vecteur b où $b \in \mathbb{C}$.
  $z \mapsto z + b$
- Symétrie orthogonale (réflexion) par rapport à l'axe réel :
  $z \mapsto \bar{z}$
- Homothétie de centre O et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$:
  $z \mapsto \alpha z$
  Homothétie de centre z_0 et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$:
  $z \mapsto z_0 + \alpha(z - z_0) \qquad (f(M_0 + \overrightarrow{M_0M}) = M_0 + \alpha\overrightarrow{M_0M})$
- Rotation de centre O et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:
  $z \mapsto e^{i\theta} z$
  Rotation de centre z_0 et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:
  $z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$

b) Les similitudes directes

Proposition :

Les similitudes directes de $\mathbb{C}$ sont exactement les applications du type $z \mapsto az + b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Démonstration :

- Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
  a s'écrit $\alpha e^{i\theta}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  Alors $z \mapsto az + b$ est composée de :

- ◇ $z \mapsto e^{i\theta} z$ (isométrie directe)
- ◇ $v \mapsto v + \dfrac{b}{\alpha}$ (translation)
- ◇ Et $u \mapsto \alpha u$ (homothétie)

C'est donc la composée d'une homothétie et d'une isométrie directe, donc une similitude directe.

- Inversement, soit f une similitude directe.
  Elle est composée d'une homothétie et d'une isométrie directe (c'est-à-dire d'une translation ou rotation), et ces trois applications sont du type $z \mapsto az + b$ et il est immédiat que l'ensemble des applications du type $z \mapsto az + b$ est stable par $\circ$.

Étude :

Soit $f\colon z \mapsto az + b$.

z_0 est fixe $\iff az_0 + b = z_0 \iff (1-a)z_0 = b$

Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il n'y a pas de point fixe, et $z \mapsto z + b$ est une translation.

Si $a = 1$ et $b = 0$, f est l'identité sur $\mathbb{C}$.

Si $a \neq 1$, on a un seul point fixe z_0.

Alors $f(z) = az + b$, $z_0 = az_0 + b$.

Donc $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$.

a s'écrivant $\alpha e^{i\theta}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on voit que f est la composée, commutative, de l'homothétie de centre z_0 et de rapport α et de la rotation de centre z_0 et d'angle θ.

Il en résulte que les similitudes indirectes sont les $z \mapsto a\bar{z} + b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

En effet, si une application f s'écrit sous la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$, alors c'est la composée de $z \mapsto \bar{z}$ et $u \mapsto au + b$, et est donc une similitude indirecte.

Inversement, si f est une similitude indirecte, alors en notant $s\colon z \mapsto \bar{z}$, $f \circ s$ est une similitude directe, disons g, et donc g s'écrit sous la forme $g\colon u \mapsto au + b$, et $f = g \circ s$, soit $f\colon z \mapsto a\bar{z} + b$.

c) Conclusion sur les similitudes directes du plan complexe

Ensemble des invariants	Nature de la similitude
$\varnothing$	Translation de vecteur non nul
$\mathbb{C}$	Identité
$\{z_0\}$	Similitude directe à centre, c'est-à-dire composée (commutative) d'une rotation de centre z_0 et d'angle θ et d'une homothétie de centre z_0 et de rapport α (et $\alpha e^{i\theta} \neq 1$)

(Résultat valable dans tout plan affine euclidien)

Proposition :

Soient $[A, B]$ et $[A', B']$ deux segments de longueur non nulle du plan (complexe).

Alors il existe une et une seule similitude directe qui envoie $[A, B]$ sur $[A', B']$ (et plus précisément A sur A' et B sur B')

Démonstration :

Dans $\mathbb{C}$, on introduit les affixes de A, B, A', B'. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Soit $f\colon z \mapsto \alpha z + \beta$.

Alors f convient si et seulement si $\begin{cases} \alpha z_A + \beta = z_{A'} \\ \alpha z_B + \beta = z_{B'} \end{cases}$, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} \alpha(z_B - z_A) = z_{B'} - z_{A'} \\ \beta = z_{A'} - \alpha . z_A \end{cases}$.

On a donc bien une unique solution $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.

f est une translation si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Sinon, f est une similitude à centre de rapport $\frac{A'B'}{AB}$ et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$:

$\alpha = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$, donc $|\alpha| = \frac{|z_{B'} - z_{A'}|}{|z_B - z_A|} = \frac{A'B'}{AB}$

et :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(\alpha) &= \operatorname{Arg}(z_{B'} - z_{A'}) - \operatorname{Arg}(z_B - z_A) \\ &= (Ox, \overrightarrow{A'B'}) - (Ox, \overrightarrow{AB}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \mod 2\pi \end{aligned} \tag{19.12}$$

D) Coordonnées polaires

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien orienté.

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$.

Soit $M \in \mathscr{E}$ et $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

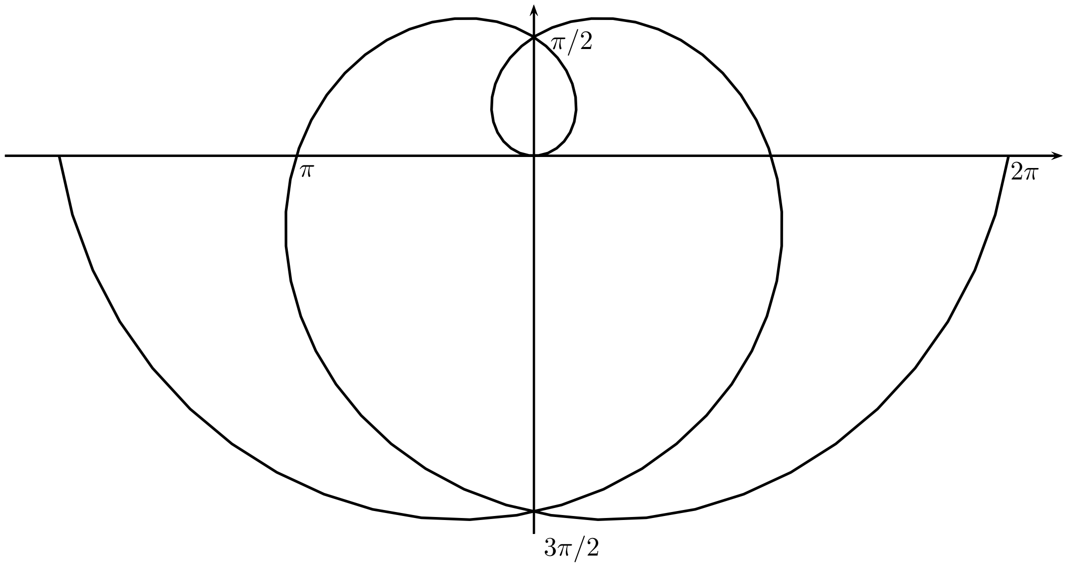
On dit que (ρ, θ) est un système de coordonnées polaires de M dans le repère $\mathscr{R}$ lorsque $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}(\theta)$, où $\vec{u}(\theta)$ désigne le vecteur $\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$, c'est-à-dire le vecteur unitaire tel que $(\vec{i}, \vec{u}(\theta)) = \theta \mod 2\pi$.

Commentaire :
Il résulte de la définition qu'un point M a toujours une infinité de systèmes de coordonnées polaires, plus précisément :

- Le point $M = O$ admet exactement les couples $(\rho = 0, \theta)$ comme systèmes de coordonnées polaires.
- Un point $M \neq O$ admet exactement comme systèmes de coordonnées polaires les couples $(\rho = OM, \alpha + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, (\rho = -OM, \alpha + \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, où α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Équations de courbes en polaire, exemples

- La courbe C d'équation polaire $\rho = 3$ (relativement à $\mathscr{R}$) est l'ensemble des $M \in \mathscr{E}$ tels qu'au moins un des systèmes de coordonnées polaires (ρ, θ) de M vérifie $\rho = 3$. Autrement dit, c'est l'ensemble des $M \in \mathscr{E}$ tels qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ de sorte que $\overrightarrow{OM} = 3\vec{u}(\theta)$, c'est donc le cercle de centre O et de rayon 3.
- Courbe d'équation polaire $\rho = \theta$, $\theta \in \mathbb{R}_+$ (puis $\theta \in \mathbb{R}$) :



III En dimension 3

Ici, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct.

(Les antidéplacements sont hors programme en dimension 3)

A) Les déplacements

1) Étude

Soit $f \in \mathrm{Dep}(\mathscr{E})$, φ sa partie linéaire.

Alors $\varphi \in \mathcal{SO}(E)$.

C'est donc une rotation, disons d'axe $(D, \vec{\omega})$ et d'angle θ.

- Si $\theta = 0 \mod 2\pi$, alors $\varphi = \mathrm{Id}_E$, donc f est une translation.
- Si $\theta \neq 0 \mod 2\pi$:
  - Soit l'ensemble des points fixes de f n'est pas vide, disons que A en est un.

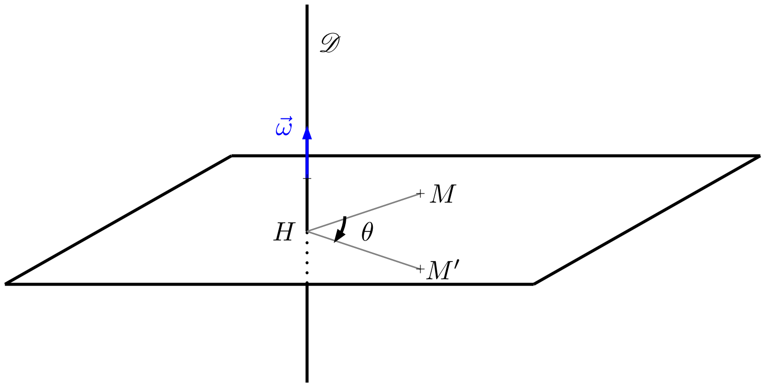
    Alors pour tout $M \in \mathscr{E}$, $f(M)$ est le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$.

    Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A de direction D, H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

    $H \in \mathscr{D}$, donc $\overrightarrow{AH} \in D$, donc $\overrightarrow{AH}$ est invariant par φ, donc H est invariant par f (car $\overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{AH}$).

    Donc $\overrightarrow{HM'} = \varphi(\overrightarrow{HM})$.

    On dit que f est la rotation d'axe $(D, \vec{\omega})$ et d'angle θ :



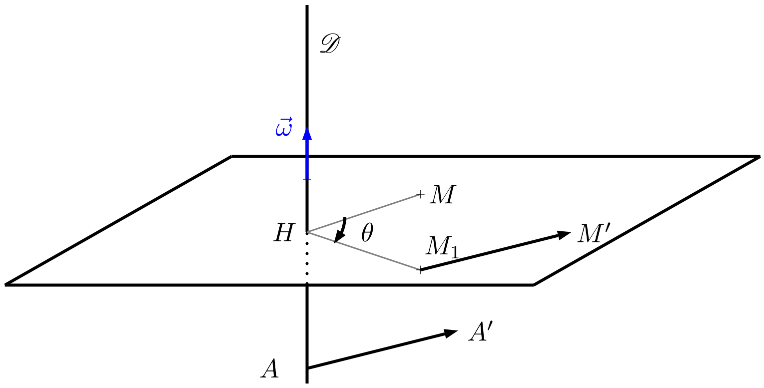
$\mathscr{D}$ est l'ensemble des points fixes par f.

Inversement, une application de ce type est bien une isométrie directe.

- Soit l'ensemble des points fixes est vide :

Soit $A \in \mathscr{E}$, A' son image.

Considérons alors $g = t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f$. Alors g a pour partie linéaire $\mathrm{Id}_E \circ \varphi = \varphi$ et laisse A invariant. C'est donc une rotation d'axe $(\mathscr{D}, \vec{\omega})$ et d'angle θ où $\mathscr{D}$ est la droite passant par A de direction D, et θ l'angle de la rotation vectorielle φ, et on a alors $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ g$:



Mais $\overrightarrow{AA'}$ s'écrit $\overrightarrow{AA'} = \underbrace{\vec{u}}_{\in D} + \underbrace{\vec{v}}_{\in D^\perp}$.

Et donc $f = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} \circ g$.

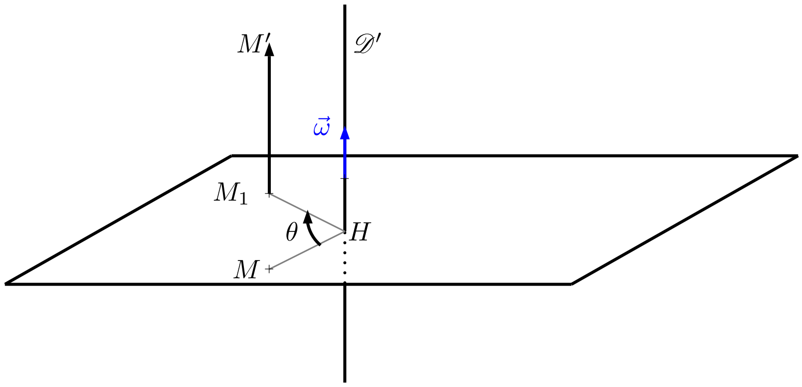
Soit $\mathscr{P}$ un plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par A.

Alors g laisse stable $\mathscr{P}$ (car A est fixe par g et φ laisse stable $D^\perp$ c'est-à-dire $\mathrm{dir}(\mathscr{P})$)

De même, $\mathscr{P}$ est stable par $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{v}} \circ g$ restreinte à $\mathscr{P}$ est une isométrie directe de $\mathscr{P}$, à savoir une rotation puisque φ n'est pas l'identité. On note alors B le point fixe de $t_{\vec{v}} \circ g_{|\mathscr{P}}$. Donc B est aussi un point fixe de $t_{\vec{v}} \circ g$. C'est donc une rotation d'axe $(\mathscr{D}', \vec{\omega})$ et d'angle θ où $\mathscr{D}'$ passe par B et a pour direction D.

Conclusion :

$f = t_{\vec{u}} \circ f_1$, où f_1 est une rotation d'axe $(\mathscr{D}', \vec{\omega})$ et d'angle θ, et $\vec{u}$ un vecteur de D.



M et M' n'appartiennent pas au même plan orthogonal à $\mathscr{D}'$ (car $\vec{u} \neq \vec{0}$), donc il n'y a aucun point fixe.

On dit que f est un vissage (vrai) d'axe $(\mathscr{D}', \vec{\omega})$, d'angle θ et de vecteur $\vec{u}$.

Classification (tous sont appelés des vissages) :

Ensemble des points invariants	Partie linéaire	Nature du vissage
$\varnothing$	Id_E	Translation
$\mathscr{E}$	Id_E	$\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$
$\mathscr{D}$	ρ_θ, $\theta \neq 0$ d'axe $(D, \vec{\omega})$ où $D = \mathrm{dir}(\mathscr{D})$	Rotation d'axe $(\mathscr{D}, \vec{\omega})$ d'angle θ
$\varnothing$	ρ_θ, $\theta \neq 0$ d'axe $(D, \vec{\omega})$	Vissage vrai d'axe $(\mathscr{D}, \vec{\omega})$ d'angle θ, où $\mathscr{D}$ est de direction D, et de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0} \in D$

Détermination pratique, exemple Reconnaître la transformation $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = 2 - y \\ z' = z + 2 \end{cases}$

1. C'est une application affine :

   C'est en effet l'application affine qui envoie O sur $O'\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de partie linéaire l'application $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{u}'\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'application linéaire φ de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   En effet, cette application affine f est telle que :

   $$\forall M \in \mathscr{E}, f(M) = f(O + \overrightarrow{OM}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM}) \tag{19.13}$$

   Soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. Identification de la partie linéaire :

   C'est une rotation d'angle π autour de Oz (ou aussi une symétrie orthogonale par rapport à Oz, appelé aussi retournement d'axe Oz)

   C'est une isométrie directe (car $\det \varphi = 1$ donc $\varphi \in \mathcal{SO}(E)$)

Donc f est un déplacement. Comme $\varphi \neq \mathrm{Id}_E$, f est soit un vissage vrai, soit une rotation d'axe dirigé par $\vec{k}$.

3. Recherche des points invariants :
$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est invariant $\iff \begin{cases}x=6-x\\y=2-y\\z=z+2\end{cases} \iff \begin{cases}x=3\\y=1\\2=0\end{cases}$
On n'a donc aucun point invariant, c'est donc un vissage vrai.

4. Caractérisation de l'axe, du vecteur d'un vissage vrai :

   Soit f un vissage d'axe $(\mathscr{D},\vec{\omega})$ d'angle $\theta \neq 0$ et de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.

   $D = \{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{w}\}$, et $\vec{u}$ n'est autre que $\overrightarrow{MM'}$ lorsque M est un point de $\mathscr{D}$.

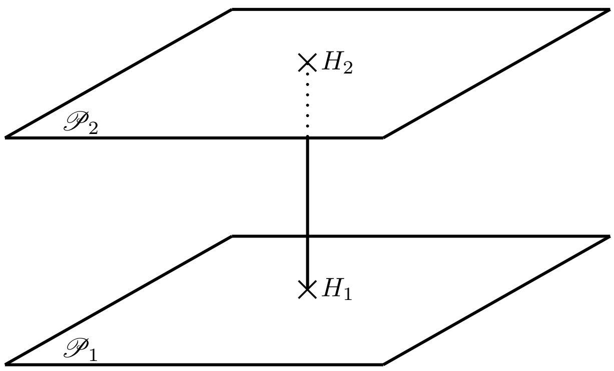
   Dans ce cas là, $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}6-2x\\2-2y\\2\end{pmatrix}$.

   Donc $\overrightarrow{MM'} \in \mathrm{Vect}(\vec{k}) \iff \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

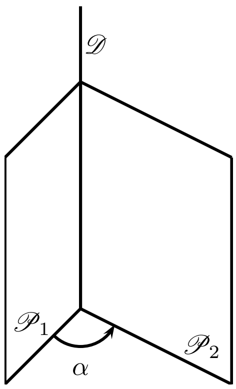
   Donc l'axe est la droite de direction Oz passant par $A\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$.

Composée de deux réflexions

- Si $\mathscr{P}_1 \mathbin{//} \mathscr{P}_2$, alors $s_2 \circ s_1 = t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$ (éventuellement l'identité si $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2$)



- Sinon :



$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{D}$, $s_2 \circ s_1$ est la rotation de droite $\mathscr{D}$ et d'angle 2α.

Remarque :

Un vissage vrai est composé de quatre réflexions, et pas mieux car sinon ce serait 2 (c'est un déplacement, donc sa partie linéaire est une isométrie directe), et se serait donc soit une translation, soit une rotation.

B) Géométrie analytique en dimension 3

Équation de plan $\mathscr{P}:\ ax+by+cz=h$, où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

On a les équivalences, pour tout point $M\in\mathscr{E}$:

$$M\in\mathscr{P}\iff\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=h\iff\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}\iff\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}=0 \tag{19.14}$$

Où H est tel que $\overrightarrow{OH}=\lambda\vec{n}$ avec $\lambda=\frac{h}{\|\vec{n}\|^2}$.

Intersection de deux plans

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_1:\ a_1x+b_1y+c_1z=h_1\\ \mathscr{P}_2:\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2\end{aligned} \tag{19.15}$$

On note $\vec{n}_1\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$.

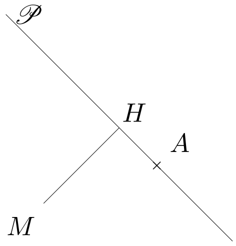
Si $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\vec{0}$, alors $\mathscr{P}_1\ //\ \mathscr{P}_2$.

Si $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\vec{d}\neq\vec{0}$, alors $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est une droite, et $\vec{d}$ dirige cette droite.

En effet : $\vec{d}\perp\vec{n}_1$, donc $\vec{d}\in\mathrm{dir}(\mathscr{P}_1)$, et $\vec{d}\perp\vec{n}_2$ donc $\vec{d}\in\mathrm{dir}(\mathscr{P}_2)$.

Donc $\vec{d}\in\mathrm{dir}(\mathscr{D})=\mathrm{dir}(\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2)$ et $\mathscr{D}$ est une droite (car $\vec{d}\neq\vec{0}$).

Distance d'un point à un plan Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$.

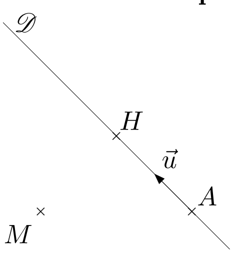


$d(M,\mathscr{P})=MH$, et $\overrightarrow{MH}=\lambda\vec{n}$.

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}$. Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}=\lambda\|\vec{n}\|^2+0=\lambda\|\vec{n}\|^2$

Ainsi, $\overrightarrow{MH}=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$, soit $\overrightarrow{MH}=\frac{|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|ax+by+cz-h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Distance d'un point à une droite



$d(M,\mathscr{D}) = MH$. On a $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}$.

Donc $\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{MH}\|\|\vec{u}\|$ (car $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$).

Donc $d(M,\mathscr{D}) = MH = \frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

C) Coordonnées cylindriques et sphériques

1) Coordonnées cylindriques

Définition :

Soit $M \in \mathscr{E}$, de coordonnées (cartésiennes) (x,y,z) dans $\mathscr{R}$.

On appelle système de coordonnées cylindriques de M relativement au repère $\mathscr{R}$ tout triplet (r,θ,z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

Ainsi, en notant, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$, et en notant, pour chaque $M \in \mathscr{E}$, m sa projection orthogonale sur le plan xOy, on a les équivalences :

(r,θ,z) est un système de coordonnées cylindriques de M relativement à $\mathscr{R}$ $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{k}$ $\Longleftrightarrow$ (r,θ) est un système de coordonnées polaires de m relativement au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de xOy et z est la côte de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Et donc tout point M de $\mathscr{E}$ admet une infinité de systèmes de coordonnées cylindriques :

- Si $M \in Oz$, ils sont du type $(0,\theta,z)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque.
- Si $M \notin Oz$, on obtient l'un d'entre eux en posant :

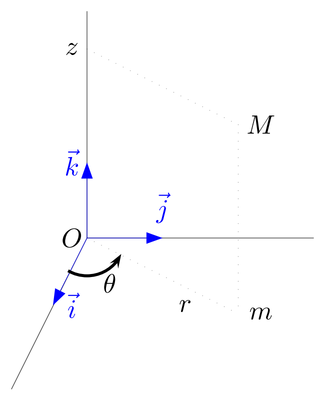
  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{Om})$ (dans xOy orienté par $(\vec{i},\vec{j})$), z la côte de M.

  Et les autres sont les $(r, \theta + 2k\pi, z)$ et $(-r, \theta+\pi+2k\pi, z)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ quelconque.

Remarque :

Avec le choix précédent de r et θ (si $M \notin Oz$), on a :

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} \tag{19.16}$$



2) Coordonnées sphériques

Définition :

Soit $M \in \mathscr{E}$, de coordonnées (cartésiennes) (x,y,z) dans $\mathscr{R}$.

On appelle système de coordonnées sphériques de M relativement au repère $\mathscr{R}$ tout triplet (r,θ,φ) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\varphi \tag{19.17}$$

Étude :

Soit $M \in \mathscr{E}$, de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans $\mathscr{R}$. On note toujours m la projection orthogonale de M sur le plan xOy.

Dire que (r, θ, φ) est un système de coordonnées sphériques de M revient à dire que :

$$(r\sin\theta, \varphi) \text{ est un système de coordonnées polaires de } m \text{ relativement à } (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ dans } xOy \text{ et } z = r\cos\theta \tag{19.18}$$

- Si $M = O$, 19.18 impose que $r\cos\theta = r\sin\theta = 0$, donc que $r = 0$. Réciproquement, tout triplet (r, θ, φ) tel que $r = 0$ est alors bien un système de coordonnées sphériques de M.
- Si $M \neq O$, mais $M \in Oz$, 19.18 impose que $z = r\cos\theta$ et $\sin\theta = 0$. Réciproquement, tout triplet (r, θ, φ) vérifiant cela, c'est-à-dire du type :
  $(z, 2k\pi, \varphi)$ ou $(-z, \pi + 2k\pi, \varphi)$ ($\varphi \in \mathbb{R}$ quelconque)
  est bien un système de coordonnées sphériques de M.
- Enfin, si $M \notin Oz$ et si (ρ, α) désigne un système de coordonnées polaires de m relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan xOy, 19.18 impose que :

  $$\begin{cases} & r\cos\theta = z \quad \text{et} \quad r\sin\theta = \rho \quad \text{et} \quad \varphi = \alpha \mod 2\pi \\ \text{ou} & r\cos\theta = z \quad \text{et} \quad r\sin\theta = -\rho \quad \text{et} \quad \varphi = \alpha + \pi \mod 2\pi \end{cases} \tag{19.19}$$

  Réciproquement, tout triplet (r, θ, φ) vérifiant cela est bien un système de coordonnées sphériques de M.

  Il en résulte que tout point M de $\mathscr{E}$ admet une infinité de systèmes de coordonnées sphériques.

Remarque :

Si (r, θ, φ) est un système de coordonnées sphériques de M, on a toujours :

$$r^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 \tag{19.20}$$

En effet :

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 = r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta = r^2 \tag{19.21}$$

Recherche d'un système particulier de coordonnées sphériques pour $M \notin Oz$. Soit $M \in \mathscr{E}$, on suppose ici que $M \notin Oz$ et on note toujours m sa projection orthogonale sur xOy, et (x, y, z) les coordonnées cartésiennes de M dans $\mathscr{R}$.

Posons $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Soit $\theta \in [0, \pi]$ l'angle non orienté $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$:

Alors on a bien $z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = r\cos\theta$.

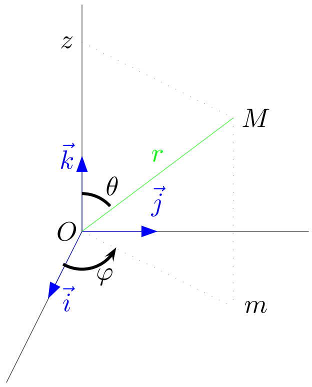
De plus, on a $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{Om}\|^2 + z^2$, donc $\|\overrightarrow{Om}\|^2 = r^2(1 - \cos^2\theta) = r^2\sin^2\theta$

Donc, comme $r \geqslant 0$ et $\sin\theta \geqslant 0$ (car $\theta \in [0, \pi]$), on a $\|\overrightarrow{Om}\| = r\sin\theta$

Soit maintenant φ l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ dans xOy orienté par $(\vec{i}, \vec{j})$.

Alors on a bien $\overrightarrow{Om} = r\sin\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j})$

Et finalement (r, θ, φ) est un système de coordonnées sphériques de M.



Remarque :

Comme on a supposé que $M \notin Oz$, on a en fait $r > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$.

r, θ, φ vérifient les relations :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{z}{r}\right), \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r\sin\theta} \tag{19.22}$$

Ainsi, on a trouvé un système de coordonnées sphériques de M tel que :

$$r > 0, \qquad \theta \in]0, \pi[, \qquad \varphi \in [-\pi, \pi] \tag{19.23}$$

D'après l'étude, les autres systèmes de coordonnées sphériques de M sont les triplets :

$$\begin{aligned} &(r, \theta + 2k\pi, \varphi + 2k'\pi) \\ &(r, -\theta + 2k\pi, \varphi + \pi + 2k'\pi) \\ &(-r, \theta + \pi + 2k\pi, \varphi + 2k'\pi) \\ &(-r, -\theta + \pi + 2k\pi, \varphi + \pi + 2k'\pi) \end{aligned} \tag{19.24}$$

Et remarquons que tout point de $\mathscr{E}$, qu'il soit sur l'axe Oz ou non, admet un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Mais on ne doit pas pour autant se limiter à de tels systèmes, car cela soulèverait des problèmes dans les équations en coordonnées sphériques (continuité par exemple).