Chapitre 18 : Espaces affines

I Définitions et notations

A) Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition :

Un espace affine attaché à E est un couple $(\mathscr{E}, +)$ formé d'un ensemble $\mathscr{E}$ non vide et d'une loi externe $+$ qui à un couple (A, u) de $\mathscr{E} \times E$ associe un élément $A + u$ de $\mathscr{E}$ vérifiant les axiomes suivants :

1. $\forall A \in \mathscr{E}, A + \vec{0} = A$
2. $\forall A \in \mathscr{E}, \forall u, v \in E, A + (u + v) = (A + u) + v$
3. $\forall A, B \in \mathscr{E}, \exists! u \in E, B = A + u$

Si $\mathscr{E}$ est un espace affine attaché à E :

- On dit que E est l'espace vectoriel directeur de $\mathscr{E}$;
- Les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés des points, et ceux de E des vecteurs ;
- Si E est de dimension finie n, on dit que $\mathscr{E}$ est de dimension finie n.

B) Translation

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine attaché à E.

Pour chaque $u \in E$, l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à M associe $M + u$ est appelée la translation de vecteur u, nous la noterons t_u. Les axiomes (1), (2), (3) reviennent ainsi à dire que :

- $t_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$
- $\forall u, v \in E, t_{u+v} = t_u \circ t_v$
- $\forall A, B \in \mathscr{E}, \exists! u \in E, t_u(A) = B$

C) Vecteur défini par deux points

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine attaché à E.

Étant donnés deux points A et B de $\mathscr{E}$, l'unique vecteur tel que $B = A + u$ est noté $\overrightarrow{AB}$. Les trois axiomes, joints à cette définition, donnent alors les résultats suivants :

- $\boxed{\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall u \in E, B = A + u \iff u = \overrightarrow{AB}}$

  C'est en effet la définition de $\overrightarrow{AB}$, possible grâce à l'axiome (3).

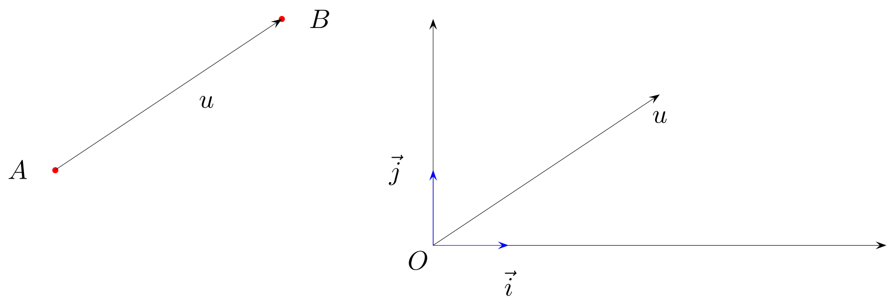
  En plus, l'axiome (1) donne, en particulier : $\forall A, B \in \mathscr{E}, B = A \iff \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- $\boxed{\text{Relation de Chasles : } \forall A, B, C \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$.

  En effet, d'après l'axiome (2) : $A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$

- $\boxed{\forall A, B \in \mathscr{E}, \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$.
  En effet, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

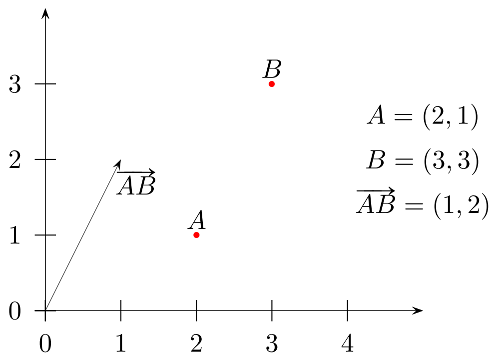
D) Exemples et visualisation

On considère un $\mathbb{R}$-ev E de dimension 2, une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de E et $\mathscr{E}$ un plan (ici le plan de la feuille) :



Exemple :
Si E est un $\mathbb{R}$-ev, alors E est naturellement un espace affine attaché à E, où la loi + externe est la même que la loi + interne. En effet :

- $\forall a \in E, a + \vec{0} = a$
- $\forall a \in E, \forall u, v \in E, a + (u + v) = (a + u) + v$
- $\forall a, b \in E, \exists! u \in E, b = a + u$ (c'est $b - a$!!)



II Repères d'un espace affine de dimension finie

Dans ce paragraphe, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine attaché à E de dimension finie n.

A) Définitions

Définition :

Un repère de $\mathscr{E}$ est un couple $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ formé d'un point O de $\mathscr{E}$ et d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Considérons un repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ de $\mathscr{E}$, avec $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Le point O est appelé origine du repère, et les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont appelés les vecteurs de base du repère. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont appelées les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$. Ainsi, les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ de M dans $\mathscr{R}$ sont caractérisées par l'égalité :

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \tag{18.1}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le repère $\mathscr{R}$, on note $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Remarque :

Si, dans le repère $\mathscr{R}$, $A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, alors, dans la base $\mathscr{B}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$.

En effet, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Les points étant repérés par leurs coordonnées, on peut aussi définir la notion d'équation dans un repère :

Si f est une fonction réelle définie sur une partie K de $\mathbb{R}^n$, la partie de $\mathscr{E}$ d'équation $f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ dans $\mathscr{R}$ est par définition l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans $\mathscr{R}$ vérifient :

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \in K, \text{, et } f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \tag{18.2}$$

B) Changement de repère

Proposition :

Soient $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ et $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{B}')$ deux repères de $\mathscr{E}$, soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et soit B la colonne des coordonnées de O' dans $\mathscr{R}$. Alors si M est un point de $\mathscr{E}$, si X est la colonne des coordonnées de M dans $\mathscr{R}$, et si X' est la colonne des coordonnées de M dans $\mathscr{R}'$, on a la relation : $X = B + PX'$.

Démonstration :

X' est la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{O'M}$ dans $\mathscr{R}'$, donc selon les formules de changement de base, PX' est la colonne des coordonnées du même vecteur $\overrightarrow{O'M}$ dans $\mathscr{R}$, et comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathscr{R}$ est donc $X = B + PX'$.

III Barycentres

Dans cette section, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine attaché à un espace vectoriel E.

A) Définition

Théorème, définition :
Soit $(A_1, A_2, \dots A_n)$ une famille de n points de $\mathscr{E}$, et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ une famille de n réels de somme non nulle. Alors il existe un unique point G tel que $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, il est appelé le barycentre des points pondérés $(A_i, \lambda_i), i \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration :
Soit O un point quelconque de $\mathscr{E}$.

Alors, pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{OM} \tag{18.3}$$

Comme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \neq 0$, il existe bien un unique point G comme voulu, il est défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \tag{18.4}$$

Remarque :
Il résulte de cette démonstration que si $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i = 0$, alors l'application qui à tout point M de $\mathscr{E}$ associe $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ est constante.

B) Propriétés

D'abord, on remarque que la formule 18.4 établie précédemment, valable pour tout point O de $\mathscr{E}$, permet d'obtenir aisément, lorsque $\mathscr{E}$ est de dimension finie, les coordonnées des (A_i, λ_i) à l'aide des coordonnées des A_i dans un repère d'origine O.

Remarquons de plus que cette formule montre que le barycentre des (A_i, λ_i) est inchangé lorsqu'on modifie l'ordre des (A_i, λ_i), et aussi lorsqu'on multiplie tous les λ_i par un même coefficient non nul. On peut ainsi se ramener au cas où les λ_i sont de somme 1.

Proposition (« associativité » du barycentre) :
Soit $(A_i, \lambda_i), i \in [\![1, n]\!]$ une famille de n point pondérés de $\mathscr{E}$, avec $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \neq 0$.

Supposons que m est un entier tel que $1 \leqslant m < n$ et $\sum_{1\leqslant i\leqslant m} \lambda_i \neq 0$.

On introduit alors le barycentre H des $(A_i, \lambda_i), i \in [\![1, m]\!]$.

Alors le barycentre G des $(A_i, \lambda_i), i \in [\![1, n]\!]$ est aussi celui de $(H, \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \lambda_i)$ et des $(A_i, \lambda_i), i \in [\![m+1, n]\!]$.

En effet :

$$\vec{0} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} \lambda_i\right)\overrightarrow{GH} + \underbrace{\sum_{1\leqslant i\leqslant m} \lambda_i \overrightarrow{HA_i}}_{=\vec{0}} + \sum_{m<i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} \lambda_i\right)\overrightarrow{GH} + \sum_{m<i\leqslant n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} \tag{18.5}$$

IV Sous-espaces affines

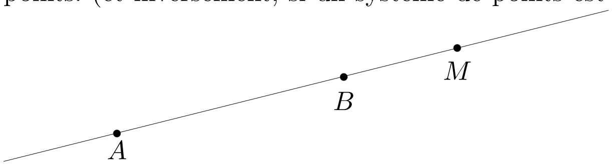
$\mathscr{E}$ désigne toujours un espace affine attaché à un espace vectoriel E.

A) Généralités

Définition :
Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ lorsque $\mathscr{F}$ est non vide et est stable par « barycentration », c'est-à-dire lorsque tout barycentre de points de $\mathscr{F}$ est encore un point de $\mathscr{F}$.

Visualisation en dimension 2 :

- Si on choisit un point de $\mathscr{E}$, tout barycentre de ce point est encore ce point. Donc $\mathscr{F}$ est réduit à un singleton.
- Si on prend deux points A et B distincts, on doit avoir toute la droite qui passe par ces deux points. (et inversement, si un système de points est sur la droite, le barycentre y est alors aussi).



Ici : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc M est barycentre de $(A, -\frac{1}{2})$ et $(B, \frac{3}{2})$ (ou $(A, -1)$ et $(B, 3)$) : $2\overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$, soit $-\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

- Avec trois points, on obtient une droite ou un plan (une droite si les vecteurs formés par les trois points sont liés deux à deux).

Proposition :
Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

Alors l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, M et N décrivant $\mathscr{F}$, est un sous-espace vectoriel de E, appelé la direction de $\mathscr{F}$. On le note $\operatorname{dir}(\mathscr{F})$.

Ainsi, on vérifie aisément que $\mathscr{F}$ est un espace affine attaché à $\operatorname{dir}(\mathscr{F})$. (Les 3 axiomes à vérifier sont des restrictions de ceux correspondant dans $\mathscr{E}$, et par construction, $\forall (A, \vec{u}) \in \mathscr{F} \times \operatorname{dir}(\mathscr{F}), A + \vec{u} \in \mathscr{F}$)

Démonstration :
Notons $F = \left\{\overrightarrow{MN}, M, N \in \mathscr{F}\right\}$.

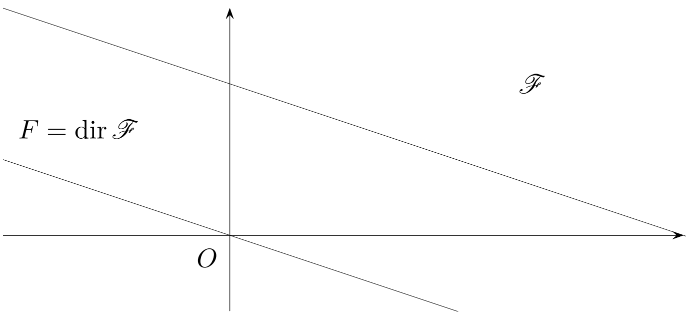
Alors déjà F contient le vecteur nul, car $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, où A est un point quelconque de $\mathscr{F}$, qui est non vide.

Soient $u, v \in F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit $A, B, C, D \in \mathscr{F}$ tels que $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{CD}$

Soit $M \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = u + \lambda v$. Alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AD}$.

Donc M est barycentre de $(B,1)$, $(C,-\lambda)$ et (D,λ), donc $M \in \mathscr{F}$, soit $u+\lambda v \in F$.

Exemple (en dimension 2) :



Théorème :
Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit A un point de $\mathscr{E}$. Alors il existe un et un seul sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant A et de direction F, c'est l'ensemble, qu'on note $A+F$, des points $A+u$, u décrivant F, on encore l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \in F$.

Démonstration :
Notons $\mathscr{F} = A+F$. Montrons alors que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ passant par A et de direction F.

- Déjà, $\mathscr{F}$ contient A car $\vec{0} \in F$.
- $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, car si M est un barycentre de points $M_i, i \in [\![1,n]\!]$ de $\mathscr{F}$, alors $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire des $\overrightarrow{AM_i}$, qui sont dans F. Donc $\overrightarrow{AM} \in F$, donc $M \in \mathscr{F}$
- La direction de $\mathscr{F}$ est F : en effet, si M et N sont dans $\mathscr{F}$, alors $\overrightarrow{MN} \in \operatorname{dir}(F)$, et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \in F$ (donc $\operatorname{dir}(F) \subset \mathscr{F}$), et inversement, pour $u \in F$, $B = A+u$ est dans $\mathscr{F}$ donc $u = \overrightarrow{AB}$ est dans la direction de $\mathscr{F}$, d'où l'égalité.

Supposons maintenant que $\mathscr{F}'$ est un sous espace affine de $\mathscr{E}$ contenant A et de direction F :

- Déjà, $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$, puisque si $M \in \mathscr{F}'$, alors $\overrightarrow{AM} \in F$, donc $M \in \mathscr{F}$
- Ensuite, $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$. En effet, si $M \in \mathscr{F}$, alors $\overrightarrow{AM} \in F$, donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$, où $B, C \in \mathscr{F}'$, et alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc M est le barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,1)$. Donc $M \in \mathscr{F}'$

D'où l'égalité, et donc l'unicité.

Remarque :
Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, A un point de $\mathscr{F}$, alors $\operatorname{dir}(\mathscr{F}) = \left\{\overrightarrow{AM}, M \in \mathscr{F}\right\}$.
En effet : Selon le théorème, si on note $F = \operatorname{dir}(\mathscr{F})$, alors $\mathscr{F} = \left\{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \in F\right\}$.

Si $u \in F$, alors $M = A+u \in \mathscr{F}$ puisque $u = \overrightarrow{AM} \in F$. Donc $u = \overrightarrow{AM}$ avec $M \in \mathscr{F}$

Si u s'écrit $u = \overrightarrow{AM}$, où $M \in \mathscr{F}$, alors $u \in \operatorname{dir}(\mathscr{F}) = F$ car $A, M \in \mathscr{F}$.

Vocabulaire :
Un sous-espace affine dont la direction est de dimension finie p est dit de dimension p.

Un sous-espace de dimension 1 est appelé une droite affine, et un sous-espace de dimension 2 est appelé un plan affine.

Un sous-espace affine de dimension 0 n'est rien d'autre qu'un singleton.

B) Parallélisme et inclusion entre deux sous-espaces affines

Proposition :

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$, de directions respectives F et G.

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, alors $F \subset G$.

Inversement, si $F \subset G$ et $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide, alors $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$.

En effet : Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$, notons $F = \mathrm{dir}(\mathscr{F})$, $G = \mathrm{dir}(\mathscr{G})$.

- Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, alors $F = \left\{\overrightarrow{MN}, M, N \in \mathscr{F}\right\} \subset \left\{\overrightarrow{MN}, M, N \in \mathscr{G}\right\} = G$
- Si $F \subset G$ et $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide : soit $A \in \mathscr{F} \cap G$.
  Alors $\mathscr{F} = \left\{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \in F\right\} \subset \left\{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \in G\right\} = \mathscr{G}$.

Deux sous-espaces affines sont dits parallèles (au sens fort) lorsqu'ils ont la même direction, et plus généralement sont dits parallèles (au sens faible) lorsqu'il y a une inclusion entre leurs directions. On peut souvent se permettre de ne pas préciser : si par exemple on parle d'un plan et d'une droite parallèles, il s'agit bien évidemment de parallélisme au sens faible.

Il résulte de la proposition précédente que si deux sous-espaces affines sont parallèles au sens fort, alors ils sont soit disjoints soit égaux.

On remarque aussi que, en dimension finie, une inclusion entre deux sous-espaces affines de même dimension finie p implique leur égalité.

En effet, en introduisant les mêmes notations que dans la proposition :

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, alors $F \subset G$; or, $\dim(F) = \dim(G) = p$, donc $F = G$.

Donc $G \subset F$, et $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$ (car $\mathscr{F}$ est non vide et $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$), donc $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$.

C) Intersection entre deux sous-espaces affines

Proposition :

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$, de directions respectives F et G. Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction $F \cap G$.

Démonstration :

Supposons $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$.

Soit alors $A \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Alors : $\mathscr{F} = \left\{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \in \mathscr{F}\right\}$, $\mathscr{G} = \left\{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \in \mathscr{G}\right\}$.

Donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \left\{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \in G \text{ et } \overrightarrow{AM} \in F\right\} = \left\{M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} \in F \cap G\right\}$.

On reconnaît le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ passant par A et de direction le sous-espace vectoriel $F \cap G$ de E.

Proposition (précision de certains cas par rapport à la proposition précédente) :

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$, de directions respectives F et G.

- Si $F \cap G = \{0\}$, alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est soit vide soit un singleton.

- Si $F+G=E$, alors $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ n'est pas vide.
- Si $F\subset G$, alors $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ est vide ou $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$.

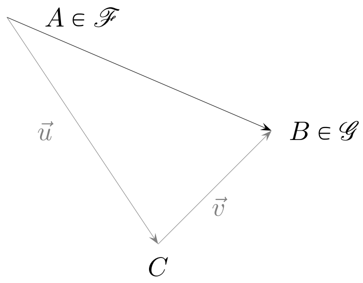
Démonstration :

- Si $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ n'est pas vide, alors c'est un sous-espace affine de dimension la dimension de $\{0\}$, c'est-à-dire de dimension 0.
- Supposons que $F+G=E$. Soient $A\in\mathscr{F}, B\in\mathscr{G}$. Alors $\overrightarrow{AB}=\underbrace{\vec{u}}_{\in F}+\underbrace{\vec{v}}_{\in G}$.

  Soit $C=A+\vec{u}$. Alors $C\in\mathscr{F}$.

  Mais $C=A+\vec{u}=A+(\overrightarrow{AB}+(-\vec{v}))=(A+\overrightarrow{AB})+(-\vec{v})=B+(-\vec{v})$.

  Donc $C\in\mathscr{G}$.



- C'est la proposition vue en B).

Il résulte de cette proposition que si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de directions supplémentaires, alors $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ est un singleton.

D) Équations et paramétrages en dimension 2 ou 3.

1) En dimension 2

Ici, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine de dimension 2, qu'on munit d'un repère $\mathscr{R}=(O,(\vec{\imath},\vec{\jmath}))$ (On peut ne pas mettre les parenthèses : $\mathscr{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$).

Paramétrage d'une droite Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$, définie par un point $A\in\mathscr{E}$ et sa direction F.

Alors $\boxed{M\in\mathscr{D}\iff\overrightarrow{AM}\in F}$

Supposons que $F=\text{Vect}(\vec{u})$, où $\vec{u}\in E\backslash\{0\}$.

Alors $\boxed{M\in\mathscr{D}\iff\exists t\in\mathbb{R},\overrightarrow{AM}=t\vec{u}}$.

Soit $\boxed{\mathscr{D}=\{A+t\vec{u},t\in\mathbb{R}\}}$.

Ou encore, $\boxed{\text{avec } A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} : M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathscr{D}\iff\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=a+t\alpha\\y=b+t\beta\end{cases}}$

Remarque :

Si $\mathscr{D}$ est donnée par deux points A, A' distincts.

On peut se ramener au cas précédent avec $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$ ou exploiter les barycentres :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{D} &\iff \exists t \in \mathbb{R}, M = \text{bary}\big((A,t),(A',1-t)\big) \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = ta + (1-t)a' \\ y = tb + (1-t)b' \end{cases} \end{aligned} \tag{18.6}$$

Avec $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

Équation Soit $\mathscr{D}$ passant par A de direction F.

F est une droite vectorielle en dimension 2, soit un hyperplan, donc admet dans $(\vec{i},\vec{j})$ une équation du type $\alpha x + \beta y = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM} \in F \\ &\iff \alpha(x-a) + \beta(y-b) = 0, \text{ où } M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\iff \alpha x + \beta y = h, \text{ où } h = \alpha a + \beta b \end{aligned} \tag{18.7}$$

Inversement, une partie de $\mathscr{E}$ admettant une équation du type $\alpha x + \beta y = h$, où $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ est la droite affine de direction $\mathscr{D} : \alpha x + \beta y = 0$ passant par A où $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est tel que $\alpha a + \beta b = h$.

Remarque :
Si $\mathscr{D}$ passe par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{D} &\iff (\overrightarrow{AM},\vec{u}) \text{ est liée} \\ &\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{18.8}$$

2) En dimension 3

Représentation paramétrique de droite Soit $\mathscr{D}$ passant par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{u} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \end{aligned} \tag{18.9}$$

Pour les plans Soit $\mathscr{P}$ passant par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de direction $P: \ ax + by + cz = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \in P \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff ax + by + cz = h \end{aligned} \tag{18.10}$$

Inversement, si $\mathscr{P}: \ ax + by + cz = h$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors $\mathscr{P}$ est un plan de direction $P: \ ax + by + cz = 0$ passant par A où $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 = h$.

Paramétrage d'un plan , obtention pratique d'une équation de plan $\mathscr{P}$ donné par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ engendrant la direction de $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \\ &\iff \exists t, s \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v} \\ &\iff \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_0 + t\beta + s\beta' \\ z = z_0 + t\gamma + s\gamma' \end{cases} \end{aligned} \tag{18.11}$$

Ou alors :

$$
\begin{aligned}
M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \in \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \\
&\iff \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
\tag{18.12}
$$

V Applications affines

$\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ désignent ici des espaces affines attachés à des espaces vectoriels E et E'.

A) Généralités

Définition :
Soit f une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$. On dit que f est affine lorsque f conserve les barycentres, c'est-à-dire lorsque l'image d'un barycentre de points de $\mathscr{E}$ est le barycentre des images de ces points, affectés des mêmes coefficients.

Proposition, définition :
Soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$. Il existe une unique application φ de E dans E' telle que $\forall M, N \in \mathscr{E}, f(N) = f(M) + \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Cette application est linéaire et est appelée la partie linéaire de f, notée $\operatorname{Lin} f$

Démonstration :
Dans cette démonstration, on convient que pour un point de $\mathscr{E}$ désigné par une lettre, la même lettre avec un « prime » désigne son image par f.

- Déjà, l'égalité $f(N) = f(M) + \varphi(\overrightarrow{MN})$ équivaut à l'égalité $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$.
  Comme tout vecteur de E s'écrit $\overrightarrow{MN}$, où $M, N \in \mathscr{E}$, il nous faut donc montrer que $\overrightarrow{M'N'}$ ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{MN}$ et non pas des points M et N.
  Supposons alors que M, N, P, Q sont quatre points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.
  On a alors $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$, donc Q est barycentre de $(P, 1), (N, 1), (M, -1)$.
  Donc Q' est barycentre de $(P', 1), (N', 1), (M', -1)$, puisque f est affine.
  Donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$.
  On introduit ainsi l'unique application φ de E dans E' qui à un vecteur u de E associe le vecteur $\varphi(u) = \overrightarrow{M'N'}$, où M et N sont deux points de $\mathscr{E}$ tels que $u = \overrightarrow{MN}$.
- Alors φ est linéaire :
  Soient u, v deux vecteurs de E, et λ un réel.
  On note O, M, N, P des points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{OM} = u$, $\overrightarrow{ON} = v$ et $\overrightarrow{OP} = u + \lambda v$.
  On a alors $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{ON}$. Donc P est le barycentre de $(O, -\lambda), (M, 1), (N, \lambda)$, donc P' est barycentre de $(O', -\lambda), (M', 1), (N', \lambda)$.

Donc $\varphi(u+\lambda v)=\varphi(\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{O'P'}=\overrightarrow{O'M'}+\lambda\overrightarrow{O'N'}=\varphi(\overrightarrow{OM})+\lambda\varphi(\overrightarrow{ON})$
Soit $\varphi(u+\lambda v)=\varphi(u)+\lambda\varphi(v)$.

Théorème :
Soit A un point de $\mathscr{E}$, A' un point de $\mathscr{E}'$ et φ une application linéaire de E dans E'.

Il existe une unique application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$ de partie linéaire φ et telle que $f(A)=A'$, et c'est l'application f définie par $\forall M\in\mathscr{E}, f(M)=A'+\varphi(\overrightarrow{AM})$.

Démonstration :
Compte tenu de la proposition précédente, si f est affine, de partie linéaire φ et est telle que $f(A)=A'$, alors $\forall M\in\mathscr{E}, f(M)=A'+\varphi(\overrightarrow{AM})$. Soit alors f définie ainsi.

Déjà, $\varphi(\vec{0})=\vec{0}$ car φ est linéaire. Donc $f(A)=A'$.

De plus, f est affine : si M est le barycentre des (M_i,λ_i), avec $\sum\lambda_i=1$, on a, toujours en notant avec des « primes » les images des points de $\mathscr{E}$ par f :

$$\overrightarrow{A'M'}=\varphi(\overrightarrow{AM})=\varphi(\sum\lambda_i\overrightarrow{AM_i})=\sum\lambda_i\varphi(\overrightarrow{AM_i})=\sum\lambda_i\overrightarrow{A'M_i'} \tag{18.13}$$

Donc M' est le barycentre des (M_i',λ_i).

Enfin, la partie linéaire de f est φ :

Soit u un vecteur de E, notons M le point de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AM}=u$ et M' son image par f. Alors l'image de u par la partie linéaire de f est $\overrightarrow{A'M'}$, qui n'est autre que $\varphi(\overrightarrow{AM})$, soit $\varphi(u)$.

Remarque :
Il en résulte que, étant donné un point A quelconque de $\mathscr{E}$, une application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$ est affine si et seulement si l'application φ définie par $\forall u\in E, f(A+u)=f(A)+\varphi(u)$ est linéaire, et dans ce cas f est l'application affine de partie linéaire φ qui envoie A sur $f(A)$.

B) Exemples

- Les applications $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & ax+b\end{array}$, a et b décrivant $\mathbb{R}$, sont des applications affines de l'espace affine $\mathbb{R}$ vers lui-même, et ce sont les seules.

  En effet : L'application $x\mapsto ax+b$ est l'application qui envoie 0 sur b et de partie linéaire $x\mapsto ax$, et c'est la seule possibilité ($f(0)\in\mathbb{R}$, et les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les $x\mapsto ax$)
- Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Les translations sont exactement les applications affines de partie linéaire Id_E (valable en toute dimension)

  Démonstration :

  Déjà, une translation est bien affine puisque si un point M est barycentre des (M_i,λ_i), i décrivant un ensemble I fini, en notant M_i' les images par la translation des M_i, $\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{M'M_i'}=\sum_{i\in I}\lambda_i(\underbrace{\overrightarrow{M'M}}_{-\vec{u}}+\overrightarrow{MM_i}+\underbrace{\overrightarrow{M_iM_i'}}_{\vec{u}})=\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{MM_i}=\vec{0}$.

  Donc une translation est stable par barycentration, donc est affine.

  Soit f une translation de vecteur $\vec{u}\in E$, φ sa partie linéaire.

  Soit A un point de $\mathscr{E}$, et $A'=f(A)=A+\vec{u}$ (donc $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$).

  Soit alors un autre point M de $\mathscr{E}$, M' son image et $\vec{v}$ tel que $M=A+\vec{v}$. On a :

  $M'=f(M)=f(A+\vec{v})=A'+\varphi(\vec{v})$, et $M'=M+\vec{u}$, soit $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$.

Donc $\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} = -\vec{u} + \overrightarrow{AM} + \vec{u} = \overrightarrow{AM} = \vec{v}$.

Or, tout vecteur de E s'écrit $\overrightarrow{AM}$, où M est un point de $\mathscr{E}$. Donc $\varphi = \mathrm{Id}_E$.

Réciproquement, soit f une application affine telle que sa partie linéaire soit Id_E.

Soit A un point de $\mathscr{E}$, et $A' = f(A)$.

Alors, pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = A' + \overrightarrow{AM} = A' + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = M + \overrightarrow{AA'}$.

Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

C) Applications affines et composition

Proposition :
Soient $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$, $g\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$ deux applications affines.

Alors $g \circ f$ est affine, et $\mathrm{Lin}(g \circ f) = (\mathrm{Lin}\, g) \circ (\mathrm{Lin}\, f)$

Démonstration :
Soit $\varphi = \mathrm{Lin}\, f$, $\psi = \mathrm{Lin}\, g$. Soit $u \in E, A \in \mathscr{E}$. Alors :

$$g \circ f(A + u) = g(f(A + u)) = g(f(A) + \varphi(u)) = g(f(A)) + \psi(\varphi(u)) \tag{18.14}$$

Ainsi, $\forall A \in \mathscr{E}, \forall u \in E, (g \circ f)(A + u) = (g \circ f)(A) + (\psi \circ \varphi)(u)$

Ce qui montre que $g \circ f$ est affine et $\mathrm{Lin}(g \circ f) = (\mathrm{Lin}\, g) \circ (\mathrm{Lin}\, f)$

Proposition :
Soit $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$. Alors :

- f est injective $\iff$ $\mathrm{Lin}\, f$ est injective,
- f est surjective $\iff$ $\mathrm{Lin}\, f$ est surjective,
- f est bijective $\iff$ $\mathrm{Lin}\, f$ est bijective,

Et dans ce dernier cas f^{-1} est affine et $\mathrm{Lin}(f^{-1}) = (\mathrm{Lin}\, f)^{-1}$

Démonstration :
Soit f une application affine, et φ sa partie linéaire.

- Supposons f injective. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$. Supposons que $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v})$. Soit A un point de $\mathscr{E}$. Alors $f(A) + \varphi(\vec{u}) = f(A) + \varphi(\vec{v})$. Donc $f(A + \vec{u}) = f(A + \vec{v})$, donc, comme f est injective, $A + \vec{u} = A + \vec{v}$, donc $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, d'où $\vec{u} = \vec{v}$, donc φ est injective.

  Supposons f non injective. Soient alors A, A' deux points distincts de $\mathscr{E}$ tels que $f(A) = f(A')$. Alors $f(A') = f(A + \overrightarrow{AA'}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AA'}) = f(A') + \varphi(\overrightarrow{AA'})$.

  Donc $\varphi(\overrightarrow{AA'}) = \vec{0}$, et comme $\overrightarrow{AA'} \neq \vec{0}$, on a $\ker \varphi \neq \{\vec{0}\}$, c'est-à-dire que φ n'est pas injective.

  D'où la première équivalence.

- Supposons f surjective. Soit $\vec{v} \in E'$. Soient $M', N' \in \mathscr{E}'$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{M'N'}$. Alors, comme f est surjective, il existe $M, N \in \mathscr{E}$ tels que $M' = f(M)$, $N' = f(N)$. Alors $N' = f(N) = f(M + \overrightarrow{MN}) =$

$M' + \varphi(\overrightarrow{MN})$. Donc $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$. On a donc trouvé $\vec{u} \in E$ (à savoir $\overrightarrow{MN}$) tel que $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$. Donc φ est surjective.

Supposons φ surjective. Soit alors $A \in \mathscr{E}$, $A' = f(A)$. Soit alors $M' \in \mathscr{E}'$. Comme φ est surjective, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{A'M'}$. Alors $f(A + \vec{u}) = A' + \overrightarrow{A'M'} = M'$. On a donc trouvé $M \in \mathscr{E}$ (à savoir $A + \vec{u}$) tel que $f(M) = M'$. Comme ce résultat est valable pour tout $M' \in \mathscr{E}'$, f est bien surjective.

D'où la deuxième équivalence

- La troisième équivalence découle des deux autres.
- Supposons f bijective. Montrons que f^{-1} est affine, et que $\operatorname{Lin}(f^{-1}) = \varphi^{-1}$.

  Comme f est bijective, φ l'est aussi, et on introduit alors φ^{-1}. Soit A un point de $\mathscr{E}$, et $A' = f(A)$. Soit alors g l'application affine de $\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{E}$ telle que $g(A') = A$ et de partie linéaire φ^{-1}. Ainsi, $\forall M \in \mathscr{E}', g(M) = A + \varphi^{-1}(\overrightarrow{A'M})$.

  Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}'$:

$$(f \circ g)(M) = f(g(M)) = f(A + \varphi^{-1}(\overrightarrow{A'M})) = \underbrace{f(A)}_{A'} + \underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(\overrightarrow{A'M}))}_{\overrightarrow{A'M}} = M \tag{18.15}$$

  Et, pour tout $M \in \mathscr{E}$:

$$(g \circ f)(M) = g(f(M)) = g(A' + \varphi(\overrightarrow{AM})) = \underbrace{g(A')}_{A} + \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi(\overrightarrow{AM}))}_{\overrightarrow{AM}} = M \tag{18.16}$$

  Donc $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Donc $g = f^{-1}$, et comme g est affine de partie linéaire φ^{-1}, f^{-1} est bien affine, et $\operatorname{Lin}(f^{-1}) = \varphi^{-1} = (\operatorname{Lin} f)^{-1}$.

Proposition, définition :

On note $\mathcal{GA}(\mathscr{E})$ l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$. Alors $(\mathcal{GA}(\mathscr{E}), \circ)$ est un groupe, appelé le groupe affine de $\mathscr{E}$.

(La démonstration est immédiate, compte tenu des propositions précédentes).

D) Application affine, et sous-espace affine

Théorème :

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ affine, de partie linéaire φ.

- Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, de direction F.

  Alors $f(\mathscr{F})$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}'$, de direction $\varphi(F)$
- Soit $\mathscr{G}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}'$, de direction G.

  Alors $f^{-1}(\mathscr{G})$ est vide ou est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, de direction $\varphi^{-1}(G)$.

Démonstration (on se place à chaque fois dans les hypothèses du théorème) :

- Soit M le barycentre de (M_i, λ_i), i décrivant I fini, où les $M_i \in f(\mathscr{F})$ et $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$. Montrons que $M \in f(\mathscr{F})$.

  Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie de points de $\mathscr{E}$ telle que $\forall i \in I, f(A_i) = M_i$ (qui existe puisque les M_i sont dans $f(\mathscr{F})$). Soit A le barycentre des $(A_i, \lambda_i), i \in I$.

Alors, comme f est affine, $f(A)$ est le barycentre des $(f(A_i), \lambda_i), i \in I$, c'est-à-dire des $(M_i, \lambda_i), i \in I$.

Donc, par unicité du barycentre, $f(A) = M$. Donc $M \in f(\mathscr{F})$.

Donc $f(\mathscr{F})$ est stable par barycentration et non vide, donc affine.

Soit $A' \in f(\mathscr{F})$. Alors $\mathrm{dir}(f(\mathscr{F})) = \{\overrightarrow{A'M'}, M' \in f(\mathscr{F})\}$.

Montrons que $\mathrm{dir}(f(\mathscr{F})) = \varphi(F)$:

- Soit $\vec{u} \in \mathrm{dir}(f(\mathscr{F}))$

  Soit $M' \in f(\mathscr{F})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{A'M'}$.

  Soient $A, M \in \mathscr{F}$ tels que $f(M) = M'$ et $f(A) = A'$

  Alors $\overrightarrow{AM} \in \mathscr{F}$, et $M' = f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) = A' + \varphi(\overrightarrow{AM})$.

  Donc $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.

  Donc $\overrightarrow{A'M'} \in \varphi(\mathscr{F})$, c'est-à-dire $\vec{u} \in \varphi(\mathscr{F})$, d'où une première inclusion.

- Soit $\vec{v} \in \varphi(\mathscr{F})$

  Soit $\vec{u} \in F$ tel que $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$.

  Soit $M' \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{A'M'} = \vec{v}$. On doit alors montrer que $M' \in f(\mathscr{F})$.

  Soit $A \in \mathscr{F}$ tel que $f(A) = A'$, et $M \in \mathscr{F}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

  Alors $f(M) = f(A + \vec{u}) = A' + \vec{v} = M'$. Donc $M' \in f(\mathscr{F})$ (puisque $M \in \mathscr{F}$).

  Donc $\vec{v} \in \mathrm{dir}(f(\mathscr{F}))$, d'où l'autre inclusion, et l'égalité.

- Supposons que $f^{-1}(\mathscr{G})$ n'est pas vide :

  Soit M le barycentre de (M_i, λ_i), i décrivant I fini, où les $M_i \in f^{-1}(\mathscr{G})$ et $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$. Montrons que $M \in f^{-1}(\mathscr{G})$.

  Alors $f(M)$ est le barycentre des $(f(M_i), \lambda_i)$, car f est affine.

  Donc $f(M) \in \mathscr{G}$, car $\mathscr{G}$ est stable par barycentration.

  Donc $M \in f^{-1}(\mathscr{G})$.

  Donc $f^{-1}(\mathscr{G})$ est stable par barycentration et non vide, donc c'est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

  Donc $f^{-1}(\mathscr{G})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

  Supposons ici que $f^{-1}(\mathscr{G})$ est non vide (c'est donc un sous-espace affine de $\mathscr{E}$).

  Soit $A \in f^{-1}(\mathscr{G})$. Alors $\mathrm{dir}(f^{-1}(\mathscr{G})) = \{\overrightarrow{AM}, M \in f^{-1}(\mathscr{G})\}$.

  Montrons que $\mathrm{dir}(f^{-1}(\mathscr{G})) = \varphi^{-1}(\mathscr{G})$.

  - Soit $\vec{u} \in \mathrm{dir}(f^{-1}(\mathscr{G}))$.

    Soit $M \in f^{-1}(\mathscr{G})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.

    On note $M' = f(M)$, $A' = f(A)$.

    Alors $M' = f(M) = f(A + \vec{u}) = A' + \varphi(\vec{u})$. Donc $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{A'M'}$.

    Or, $A' \in \mathscr{G}$ et $M' \in \mathscr{G}$ (car $A, M \in f^{-1}(\mathscr{G})$).

    Donc $\varphi(\vec{u}) \in \mathscr{G}$. Donc $\vec{u} \in \varphi^{-1}(\mathscr{G})$. D'où une première inclusion.

  - Soit maintenant $\vec{u} \in \varphi^{-1}(\mathscr{G})$.

    Soit $M \in \mathscr{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$. Posons $A' = f(A)$ (ainsi, $A' \in \mathscr{G}$).

    Alors $f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = \underbrace{A'}_{\in \mathscr{G}} + \underbrace{\varphi(\vec{u})}_{\in G}$, soit $f(M) \in \mathscr{G}$, d'où $M \in f^{-1}(\mathscr{G})$.

    De plus, $A \in f^{-1}(\mathscr{G})$. Donc $\vec{u} = \overrightarrow{AM} \in \mathrm{dir}(f^{-1}(\mathscr{G}))$.

    D'où l'autre inclusion et l'égalité.

VI Applications affines particulières

$\mathscr{E}$ désigne un espace affine de direction E.

A) Translations

Rappel :

Soit $\vec{u} \in E$. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $t_{\vec{u}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ M & \longmapsto & M+\vec{u} \end{array}$.

Proposition :

L'ensemble des translations sur $\mathscr{E}$ est un sous-groupe de $\mathcal{GA}(\mathscr{E})$, noté $T(\mathscr{E})$.

$T(\mathscr{E})$ est exactement l'ensemble des applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire est Id_E

Démonstration :

On a déjà vu que l'ensemble des translations sur $\mathscr{E}$ est l'ensemble des applications affines de partie linéaire l'identité.

De plus, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{GA}(\mathscr{E}) \\ \vec{u} & \longmapsto & t_{\vec{u}} \end{array}$ est évidemment un morphisme injectif du groupe $(E,+)$ vers le groupe $(\mathcal{GA}(\mathscr{E}),\circ)$. Donc l'image de ce morphisme, c'est-à-dire $T(\mathscr{E})$, est un sous-groupe de $(\mathcal{GA}(\mathscr{E}),\circ)$ (et $(T(\mathscr{E}),\circ)$ est isomorphe à $(E,+)$)

B) Homothéties

Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $\Omega \in \mathscr{E}$. L'homothétie affine de centre Ω et de rapport α, qu'on note ici $h_{\Omega,\alpha}$ est l'application : $\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ M & \longmapsto & \Omega+\alpha\overrightarrow{\Omega M} \end{array}$ (c'est-à-dire que l'image de M est le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \alpha\overrightarrow{\Omega M}$)

Proposition :

- Pour $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, on a l'équivalence :

  f est une homothétie affine $\iff$ f est affine, admet au moins un point fixe et la partie linéaire de f est une homothétie vectorielle.

- Pour $\Omega \in \mathscr{E}$ et $\alpha \in \mathscr{R}$, on a :
  - ◇ Si $\alpha \neq 0$, alors $h_{\Omega,\alpha}$ est bijective et $(h_{\Omega,\alpha})^{-1} = h_{\Omega,1/\alpha}$.
  - ◇ Si $\alpha = 1$, $h_{\Omega,\alpha} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.
  - ◇ Si $\alpha \neq 1$, $h_{\Omega,\alpha}$ a un unique point fixe, à savoir Ω.

En effet :

- Si f est une homothétie affine de centre Ω et de rapport α :

  Alors f est bien affine, admet comme point fixe Ω (car $f(\Omega) = \Omega + \alpha\overrightarrow{\Omega\Omega} = \Omega$), et est de partie linéaire $\varphi : M \mapsto \alpha\overrightarrow{\Omega M}$, qui est bien une homothétie vectorielle.

Réciproquement, si f est affine, admet au moins un point fixe Ω et la partie linéaire φ de f est une homothétie vectorielle de rapport α, alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$:

$$f(M) = f(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}) = f(\Omega) + \varphi(\overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + \alpha\overrightarrow{\Omega M} \tag{18.17}$$

Donc f est bien une homothétie affine (de rapport α et de centre Ω)

- Si $\alpha \neq 0$, alors $h_{\Omega,1/\alpha}$ est bien définie, et on a, pour tout $M \in \mathscr{E}$:

$$\begin{aligned}(h_{\Omega,\alpha} \circ h_{\Omega,1/\alpha})(M) &= h_{\Omega,\alpha}(h_{\Omega,1/\alpha}(M)) = h_{\Omega,\alpha}(\Omega + \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{\Omega M})\\ &= h_{\Omega,\alpha}(\Omega) + \varphi_\alpha(\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + \frac{1}{\alpha}\varphi_\alpha(\overrightarrow{\Omega M})\\ &= \Omega + \frac{1}{\alpha}\alpha\overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \overrightarrow{\Omega M} = M\end{aligned} \tag{18.18}$$

  (Où on a noté φ_α l'homothétie vectorielle de rapport α)

  Donc $h_{\Omega,\alpha} \circ h_{\Omega,1/\alpha} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$, et de même $h_{\Omega,1/\alpha} \circ h_{\Omega,\alpha} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$. Donc $h_{\Omega,\alpha}$ est inversible, d'inverse $h_{\Omega,1/\alpha}$, donc est bijective.

  Si $\alpha = 1$, alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$: $h_{\Omega,1}(M) = \Omega + 1\overrightarrow{\Omega M} = M$ donc $h_{\Omega,1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.

  Si $\alpha \neq 1$. Soit $M \in \mathscr{E}$.

  Si $h_{\Omega,\alpha}(M) = M$, alors $\Omega + \alpha\overrightarrow{\Omega M} = M$, soit $\alpha\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M}$, donc $(\alpha - 1)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$ car $\alpha \neq 1$. Donc $M = \Omega$. Réciproquement, Ω est bien fixe par $h_{\Omega,\alpha}$.

Cas particulier :

L'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est aussi appelée la symétrie par rapport à Ω.

Théorème :

L'ensemble des applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport non nul est un sous-groupe de $\mathcal{GA}(\mathscr{E})$, constitué de la réunion de l'ensemble des translations sur $\mathscr{E}$ et de l'ensemble des homothéties affines de rapport non nul.

Ce sous-groupe est appelé le groupe des homothéties–translations de $\mathscr{E}$, noté $\mathcal{HT}(\mathscr{E})$.

Démonstration :

Notons $\mathcal{HT}(\mathscr{E})$ l'ensemble des applications affines de $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport non nul.

- Déjà, il est facile de voir que $\mathcal{HT}(\mathscr{E})$ est contenu dans $\mathcal{GA}(\mathscr{E})$, contient $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$, est stable par $\circ$ et passage à l'inverse (d'après la proposition précédente), donc c'est bien un sous-groupe de $\mathcal{GA}(\mathscr{E})$.
- Ensuite, $\mathcal{HT}(\mathscr{E})$ contient évidemment $T(\mathscr{E})$ et l'ensemble des homothéties affines de rapport non nul.
- Soit maintenant $f \in \mathcal{HT}(\mathscr{E})$:

  Soit $\alpha \in R^*$ tel que la partie linéaire de f soit $\alpha\,\mathrm{Id}_E$.

  - Si $\alpha = 1$, f est une translation.
  - Si $\alpha \neq 1$, montrons que f est une homothétie :

    Selon la propriété précédente, il suffit de montrer que f admet un point fixe.

    Soit $A \in \mathscr{E}$, posons $A' = f(A)$. Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$:

    $f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = A' + \alpha\overrightarrow{AM}$.

Donc $f(M) = M \iff \alpha\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M} \iff M$ est barycentre de $(A, \alpha), (A', -1)$.

Donc f a bien un point fixe, et est bien une homothétie.

Remarque :

L'ensemble des homothéties affines de $\mathscr{E}$ n'est pas stable par $\circ$:

En effet, si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, et si $\Omega_1 \neq \Omega_2$, alors $h_{\Omega_2,\alpha} \circ h_{\Omega_1,1/\alpha}$ est une translation puisque sa partie linéaire est l'identité, et de vecteur non nul car l'image de Ω_1 est :

$$\Omega_1' = h_{\Omega_2,\alpha}(\Omega_1) = \Omega_2 + \alpha\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} \neq \Omega_1 \text{ car } \alpha\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} \neq \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} \tag{18.19}$$

Remarque :

Si $f \in \mathcal{HT}(\mathscr{E})$, l'image d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ par f est un sous-espace affine $\mathscr{F}'$ parallèle à $\mathscr{F}$. (puisque si on note F la direction de $\mathscr{F}$, F' celle de $\mathscr{F}'$, et φ la partie linéaire de f, alors $F' = \varphi(F) = F$).

Application (Thalès) :

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites sécantes en Ω d'un plan affine.

Soient $A_1, A_1' \in \mathscr{D}_1$, $A_2, A_2' \in \mathscr{D}_2$ de sorte que $(A_1A_2) \,//\, (A_1'A_2')$.

Alors si $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que $\overrightarrow{\Omega A_1'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A_1}$, on a $\overrightarrow{\Omega A_2'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A_2}$.

Démonstration :

L'homothétie h de centre Ω et de rapport λ envoie A_1 sur A_1'.

L'image de $\mathscr{D}_2$ par h est $\mathscr{D}_2$ (car c'est une droite parallèle à $\mathscr{D}_2$ qui doit passer par $h(\Omega) = \Omega$)

L'image de (A_1A_2) par h est $(A_1'A_2')$ (car c'est une droite parallèle à (A_1A_2) qui passe par $h(A_1) = A_1'$)

Donc, puisque $A_2 \in \mathscr{D}_2 \cap (A_1, A_2)$, on a $h(A_2) \in \mathscr{D}_2 \cap (A_1', A_2')$, donc $h(A_2) = A_2'$, d'où $\overrightarrow{\Omega A_2'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A_2}$.

C) Projections

Proposition, définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F.

Pour chaque $M \in \mathscr{E}$, notons $\mathscr{G}_M$ le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ passant par M et de direction G, alors $\mathscr{G}_M$ rencontre $\mathscr{F}$ en un unique point M'.

L'application $p\colon M \mapsto M'$, de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, ainsi définie, s'appelle la projection affine sur $\mathscr{F}$ suivant la direction G, et on a les propriétés :

- p est affine, sa partie linéaire est la projection vectorielle sur $\mathscr{F}$ selon G.
- L'ensemble des points fixes par p est $\mathscr{F}$.
- $p \circ p = p$

Démonstration :

- Soit $M \in \mathscr{E}$. Alors $\mathscr{G}_M \cap \mathscr{F}$ est bien un singleton, puisque $E = F \oplus G$ (vu en C)). La définition de p a bien un sens.
- Soit $A \in \mathscr{F}$. Alors $A \in \mathscr{G}_A$ et $A \in \mathscr{F}$, donc $\mathscr{G}_A \cap \mathscr{F} = \{A\}$, donc $p(A) = A$.

  Soit maintenant $M \in \mathscr{E}$, quelconque. Notons $M' = p(M)$.

  Alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$ et $\begin{cases} \overrightarrow{AM'} \in F & (\text{car } A, M' \in \mathscr{F}) \\ \overrightarrow{MM'} \in G & (\text{car } M, M' \in \mathscr{G}_M) \end{cases}$

  Donc $\overrightarrow{AM'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$, où φ est la projection vectorielle sur F parallèlement à G, et $p(M) = M' = A + \overrightarrow{AM'} = p(A) + \varphi(\overrightarrow{AM})$

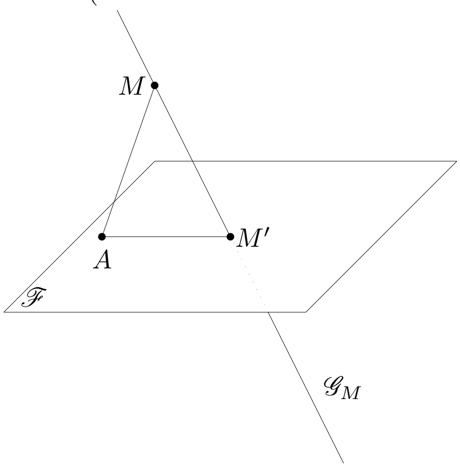
  Donc p est affine, de partie linéaire φ.

- On a vu que si $A \in \mathscr{F}$, alors $p(A) = A$.

  Réciproquement, si $p(A) = A$, alors comme $p(A) \in \mathscr{F}$ par définition, on a $A \in \mathscr{F}$.

- Comme $\forall M \in \mathscr{E}, p(M) \in \mathscr{F}$ et comme les éléments de $\mathscr{F}$ sont invariants par p, on a bien $p \circ p = p$.

Dessin illustrant la proposition la définition, et sa démonstration en dimension 3 lorsque $\mathscr{F}$ est un plan affine (et donc G une droite vectorielle) :



Remarque pratique :
Le point M' tel que $p(M) = M'$ est caractérisé par $M' \in \mathscr{F}$ et $M' \in \mathscr{G}_M$, ou encore :

$p(M) = M' \iff M' \in \mathscr{F}$ et $\overrightarrow{MM'} \in G$.

Exemple :
Dans $\mathbb{R}^3$ affine rapporté à son repère canonique, on veut l'image de $M(x, y, z)$ par la projection sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z = 1$ parallèlement à la direction du vecteur $\vec{u} = (1, 0, 2)$.

On écrira :

Soit $M'(x', y', z')$ l'image cherchée de M.

Alors $M' \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Donc $x' + y' + z' = 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x' - x = \lambda \\ y' - y = 0 \\ z' - z = 2\lambda \end{cases}$

D'où $(x + \lambda) + y + (z + 2\lambda) = 1$, donc $\lambda = \frac{1}{3}(1 - x - y - z)$

Ainsi, $\begin{cases} x' &= x + \lambda = \frac{1}{3}(1 + 2x - y - z) \\ y' &= y \\ z' &= z + 2\lambda = \frac{1}{3}(2 - 2x - 2y + z) \end{cases}$

D) Symétries

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, de direction F. Soit G un supplémentaire de F dans E. La symétrie affine par rapport à $\mathscr{F}$ selon la direction G est l'application qui à $M \in \mathscr{E}$ associe le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$ où H désigne la projection de M sur $\mathscr{F}$ selon G.

Proposition :
Cette application est affine, et sa partie linéaire n'est autre que la symétrie vectorielle par rapport à F selon G.

Démonstration :

Soit $A \in \mathscr{F}$. Déjà, $f(A) = A$.

Soit $\varphi\colon E \to E$ définie par : $\forall \vec{u} \in E, f(A+\vec{u}) = A + \varphi(\vec{u})$,

C'est-à-dire telle que $\forall M \in \mathscr{E}, M' = A + \varphi(\overrightarrow{AM})$ (où $M' = f(M)$)

Où encore telle que $\forall M \in \mathscr{E}, \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM'}$.

On a alors :

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HM}$, et comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, φ est l'application qui à $\underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G}$ associe $u - v$.

Donc φ est linéaire, c'est la symétrie par rapport à F selon G, et f est affine, de partie linéaire φ.

E) Affinités

On suppose ici $\mathscr{E}$ de dimension finie.

Définition :

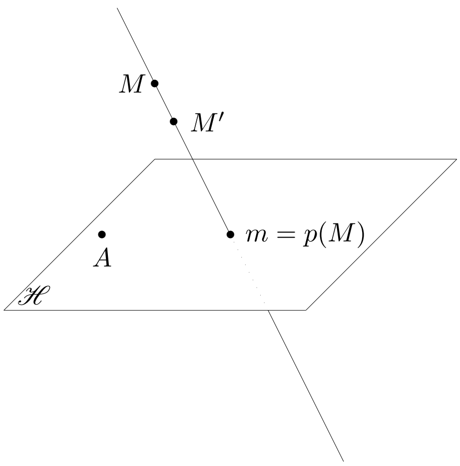
Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan de $\mathscr{E}$ de direction H.

Soit D une droite vectorielle non contenue dans H (ainsi, $H \oplus D = E$)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. L'affinité (ou encore la dilatation) d'hyperplan $\mathscr{H}$, de direction D et de rapport α est l'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$ où M' est tel que $\overrightarrow{mM'} = \alpha\overrightarrow{mM}$ où m est la projection de M sur $\mathscr{H}$ parallèlement à D.

Étude :

Dessin en dimension 3 :



Soit f l'affinité d'hyperplan $\mathscr{H}$, de direction D, de rapport α. Soit p la projection affine sur $\mathscr{H}$ parallèlement à D :

- Déjà, les points de $\mathscr{H}$ sont invariants par f.

  En effet, si $M \in \mathscr{H}$, le point $m = p(M)$ coïncide avec M, donc $M' = f(M)$ est tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$.

- Soit maintenant $A \in \mathscr{H}$, soit $M \in \mathscr{E}$, notons $m = p(M)$ et $M' = f(M)$.

  Alors par définition, $M' = m + \alpha\overrightarrow{mM} = A + \overrightarrow{Am} + \alpha\overrightarrow{mM}$.

  Si on note φ l'application linéaire : $\begin{array}{ccc} E = H \oplus D & \longrightarrow & E \\ v + w & \longmapsto & v + \alpha w \end{array}$

  (C'est-à-dire que $\varphi = \varphi_1 + \alpha\varphi_2$ où φ_1 est la projection vectorielle sur H parallèlement à D et φ_2 la projection vectorielle sur D parallèlement à H)

On a alors : $\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{Am}}_{\in H} + \underbrace{\overrightarrow{mM}}_{\in D}$, et donc $\overrightarrow{Am} + \alpha\overrightarrow{mM} = \varphi(\overrightarrow{AM})$

Donc $M' = A + \varphi(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM})$

Donc f est affine, et sa partie linéaire est φ.

- Comme $\alpha \neq 0$, on voit facilement que φ est bijective, donc que f l'est.
- De plus, si $\alpha = 1$, f est évidemment l'identité, mais pour $\alpha \neq 1$:

$$f(M) = M \iff \alpha\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{mM} \iff m = M \iff M \in \mathscr{H}. \tag{18.20}$$

Conclusion :

Soit f l'affinité d'hyperplan $\mathscr{H}$, de direction D et de rapport $\alpha \neq 0$. Alors f est affine et bijective, et si $\alpha \neq 1$, $\mathscr{H}$ est l'ensemble des points fixes par f (si $\alpha = 1$, $f = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$).

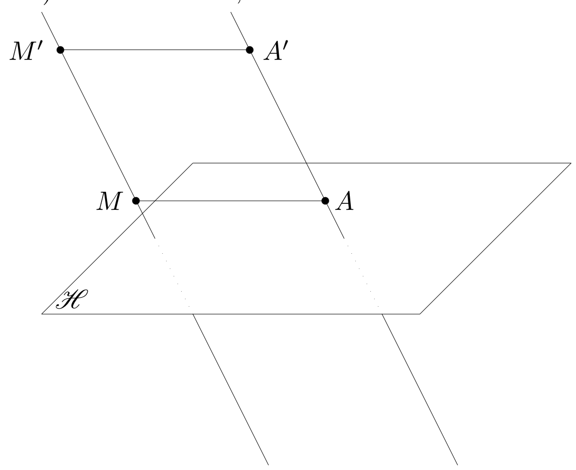
Construction géométrique En reprenant les notations précédentes, on veut construire l'image M' d'un point M connaissant $\mathscr{H}$, un point $A \notin \mathscr{H}$ et son image A' par f.

Comme $A \notin \mathscr{H}$, $A' \neq A$ et la droite (AA') a la direction D.

- Si $(MA) \,//\, \mathscr{H}$:

  Comme H est invariant par φ, on a :

  $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, d'où on tire M' :



- Si (MA) n'est pas parallèle à $\mathscr{H}$.

  Soit I le point d'intersection de (MA) et $\mathscr{H}$.

  Alors l'image de la droite (IA) par f est la droite (IA') (car c'est une droite qui passe par $f(I) = I$ et $f(A) = A'$).

  Notons alors $\mathscr{D}_M$ la droite passant par M de direction D.

  On a : $M' \in \mathscr{D}_M$ et $M' \in (IA')$ (car $M \in (IA)$).

  Si $\mathscr{D}_M$ et (IA') sont sécants, cela détermine M', sinon c'est que $M \in (AA')$:

  On détermine alors d'abord l'image d'un point $B \notin (AA')$, puis on détermine l'image de M en utilisant B et B'...

F) Une remarque générale en dimension finie

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie n et de direction E.

Soit $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, \dots e_n)$ un repère de $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ la base correspondante de E.

Les applications affines de $\mathscr{E}$ sont les applications déterminées par des formules du type $f(M) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM})$ où $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et $O' \in \mathscr{E}$.

Ce qui correspond, sur les coordonnées dans $\mathscr{R}$, à de formules du type :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{de } f(M) \text{ dans } \mathscr{R}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{de } O' = f(O) \\ \text{dans } \mathscr{R}}} + \underbrace{A}_{\substack{\text{matrice de } \varphi \\ \text{dans } \mathscr{B}}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{de } M \text{ dans } \mathscr{R}}} \quad \text{où } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \tag{18.21}$$

VII Parties convexes d'un espace affine

$\mathscr{E}$ désigne toujours un espace affine.

Définition :

Soient $A, B \in \mathscr{E}$. Le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.

Ainsi, $[A, B] = \left\{A + t\overrightarrow{AB}, t \in [0, 1]\right\}$.

En effet : pour tout $M \in \mathscr{E}$:

$$\begin{aligned} M \in [A, B] &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \alpha + \beta \neq 0 \text{ et } \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} = \vec{0} \\ &\iff \exists t \in [0, 1], M \text{ est barycentre de } (A, 1 - t), (B, t) \\ &\iff \exists t \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \end{aligned} \tag{18.22}$$

Définition :

Soit C une partie de $\mathscr{E}$. On dit que C est convexe lorsque :

$\forall (A, B) \in C^2, [A, B] \subset C$.

Proposition :

Soit C une partie de $\mathscr{E}$.

C est convexe si et seulement si tout barycentre de points de C affectés de coefficients positifs est dans C.

Démonstration :

- $\Longleftarrow$: c'est un cas particulier avec seulement le barycentre de deux points.
- $\Longrightarrow$: Supposons C convexe.

  Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, « tout barycentre de n points de C affectés de coefficients positifs est dans C. » ($\mathscr{P}(n)$)

  Pour $n = 2$, cela correspond à la définition de la convexité.

  Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$.

Soient maintenant $(M_1, \lambda_1), (M_2, \lambda_2), \dots (M_{n+1}, \lambda_{n+1})$ $n+1$ points de C affectés de coefficients positifs (non tous nuls). Soit M le barycentre des n premiers. Alors, par hypothèse de récurrence, $M \in C$. De plus, le barycentre de $(M_1, \lambda_1), (M_2, \lambda_2), \dots (M_{n+1}, \lambda_{n+1})$ est le barycentre de $(M, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$ et (M_{n+1}, λ_{n+1}), donc appartient à C car $M, M_{n+1} \in C$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geqslant 0$. Ce qui achève la récurrence.

Proposition :

Toute intersection de convexes est convexe.

En effet : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes indexée par un ensemble I quelconque.

Notons $C = \bigcap_{i \in I} C_i$.

Soient $A, B \in C$. Alors $\forall i \in I, A, B \in C_i$, donc $\forall i \in I, [A, B] \subset C_i$, donc $[A, B] \subset C$.

Donc C est convexe.

Définition, proposition :

On définit l'enveloppe convexe d'une partie $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$ comme l'intersection de tous les convexes qui contiennent $\mathscr{P}$. C'est le plus petit convexe contenant $\mathscr{P}$.

Démonstration :

La définition a bien un sens, puisque l'ensemble $\mathscr{E}_C$ des convexes contenant $\mathscr{P}$ n'est pas vide (il contient déjà $\mathscr{E}$).

C'est bien le plus petit, puisque si un convexe C contient $\mathscr{P}$, il contient nécessairement l'enveloppe convexe puisqu'il appartient à $\mathscr{E}_C$ (puisque $\bigcap_{X \in \mathscr{E}_C} X \subset C$).

Proposition :

L'image d'un convexe par une application affine est un convexe.

L'image réciproque d'un convexe par une application affine est un convexe.

Résulte de la conservation des barycentres par une application affine.

Exemple :

- Un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ est bien sûr convexe.
- Un disque plein de $\mathbb{R}^2$ (ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant r$) est convexe.

Demi-espaces (ouverts) limités par un hyperplan On suppose $\mathscr{E}$ de dimension finie n, muni d'un repère $\mathscr{R}$.

Soit $\mathscr{H}$ l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = h$ dans $\mathscr{R}$.

Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées $(x_1, x_2, \dots x_n)$ vérifient :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - h > 0 \tag{18.23}$$

Et soit $\mathscr{E}_2$ l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées $(x_1, x_2, \dots x_n)$ vérifient :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - h < 0 \tag{18.24}$$

Alors $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont convexes.

Démonstration (pour $\mathscr{E}_1$) :

Soient $A, B \in \mathscr{E}_1$. Les $M \in [A, B]$ s'écrivent $A + t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0, 1]$, et en reportant dans $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - h$ l'expression correspondante des coordonnées de M en fonction de t, on obtient une fonction affine de t (du type $t \mapsto pt+q$), donc une fonction monotone de t. Comme cette fonction est par hypothèse strictement positive en $t = 0$ et $t = 1$, elle est donc strictement positive sur tout $[0, 1]$, d'où la convexité de $\mathscr{E}_1$.

Remarque :

Les demi-espaces fermés limités par $\mathscr{H}$ sont bien sûr aussi convexes (il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges)

Remarque :

En reprenant l'argument précédent et en utilisant cette fois la continuité de la fonction affine de t introduite, on montre que tout segment joignant un point de $\mathscr{E}_2$ à un point de $\mathscr{E}_1$ doit couper $\mathscr{H}$.