Chapitre 16 : $\mathbb{R}$-ev euclidien orienté de dimension 2

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev euclidien orienté de dimension 2.

Exemple :

$\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique.

$\mathbb{C}$, en tant que $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, on peut le munir de sa structure euclidienne orientée naturelle, c'est-à-dire celle pour laquelle la base naturelle $(1, \boldsymbol{i})$ est une base orthonormée directe.

Alors, pour $z = x + \boldsymbol{i}y$, $z' = x' + \boldsymbol{i}y'$, on a $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|x\|$, $z \cdot z' = xx' + yy' = \mathrm{Re}(z\overline{z'})$

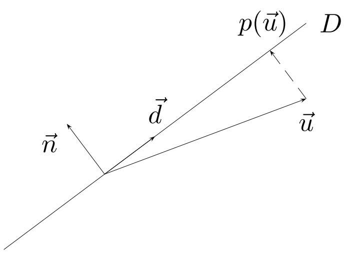
I Rappels : droites du plan E.

Ce sont les hyperplans de E :

Si $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E, une droite a pour équation $D : \ ax + by = 0$ dans $\mathscr{B}$.

Le vecteur $\vec{d}$ de composantes $(-b, a)$ dans $\mathscr{B}$ dirige D ($D = \mathrm{Vect}(\vec{d})$), et $\vec{n}$ de composantes (a, b) dans $\mathscr{B}$ est normal à D. ($D^{\perp} = \mathrm{Vect}(\vec{n})$).

Pour $\vec{u} \in E$, on note $p(\vec{u})$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur D.



Alors $p(\vec{u}) = \vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$, $d(\vec{u}, D) = \|\vec{u} - p(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Donc si la droite a pour équation $D : \ ax + by = 0$ dans une base orthonormée directe $\mathscr{B}$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$, alors $d(\vec{u}, D) = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

II Angle orienté de deux vecteurs non nuls du plan

Proposition, définition :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E.

Alors il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que :

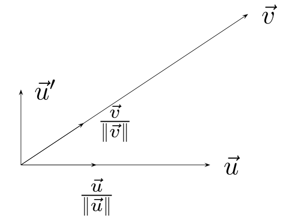
$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta \vec{u}', \tag{16.1}$$

où $\overrightarrow{u'}$ désigne le vecteur de E tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \overrightarrow{u'}\right)$ soit une base orthonormée directe de E.
On dit alors que θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. On note $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \theta \ [2\pi]$.

Remarque :
L'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \underset{\text{déf}}{=}$ l'ensemble de ses mesures $= \left\{\theta \in \mathbb{R}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta \overrightarrow{u'}\right\}$

Cette définition est rarement utilisée : on devrait écrire $\theta \in (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Démonstration (de la proposition) :
$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est de norme 1. Il existe donc un unique $\overrightarrow{u'}$ tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \overrightarrow{u'}\right)$ soit une base orthonormée directe.



$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est de norme 1 ; soit $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ la colonne de ses composantes dans $\mathscr{B} = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)$.

Alors $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Et, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta \vec{u}' \iff \begin{cases}\cos\theta = \alpha\\ \sin\theta = \beta\end{cases}$.

Propriétés :

- $$(\widehat{\vec{u},\vec{u}}) \equiv 0 \ [2\pi] \qquad (\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) \equiv \pi \ [2\pi] \qquad (\widehat{\vec{v},\vec{u}}) \equiv -(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \ [2\pi] \qquad \left(\widehat{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'}\right) \equiv +\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \quad (16.2)$$
- $$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad \left(\text{car } \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta\vec{u}'\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) \quad (16.3)$$
- $$\sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad (16.4)$$

En effet : On prend $\mathscr{B} = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)$, base orthonormée directe. Alors :

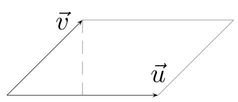
$$\det_{\mathscr{B}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \det_{\mathscr{B}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta\vec{u}'\right) \quad (16.5)$$

Soit :

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})}_{=\det(\vec{u},\vec{v})} = \cos\theta\underbrace{\det_{\mathscr{B}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)}_{=0} + \underbrace{\sin\theta\det_{\mathscr{B}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)}_{=\sin\theta\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}=\sin\theta} \quad (16.6)$$

Ainsi, cette formule montre que :

$$|\det(\vec{u},\vec{v})| = \|\vec{u}\|\underbrace{\|\vec{v}\||\sin\theta|}_{\text{hauteur}} = \text{aire du parallélogramme correspondant aux deux vecteurs.} \quad (16.7)$$



III Étude de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}_2$

A) Étude

Soit $A \in \mathcal{O}_2 : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, avec $\begin{cases} ac+bd=0 & \text{(orthogonaux)} \\ a^2+b^2=c^2+d^2=1 & \text{(de norme 1)} \end{cases}$. On a alors les équivalences :

$$ac+bd=0 \iff \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix} = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \left(\text{puisque } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{16.8}$$

Donc $\begin{cases} d=-\lambda a \\ c=\lambda b \end{cases}$, et $d^2+c^2=\lambda^2(a^2+b^2)=\lambda^2$. Donc $\lambda=\pm 1$.

Donc $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, et une matrice de ce type est bien dans $\mathcal{SO}_2$ ($\det A = 1$)

Ou $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, et une matrice de ce type est bien dans $\mathcal{O}_2 \backslash \mathcal{SO}_2$ ($\det A=-1$)

(Avec dans les deux cas $a^2+b^2=1$)

Conclusion :
Les éléments de $\mathcal{SO}_2$ sont les $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a^2+b^2=1$.

Les éléments de $\mathcal{O}_2 \backslash \mathcal{SO}_2$ sont les $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a^2+b^2=1$.

B) Étude de $\mathcal{SO}(E)$ et $\mathcal{SO}_2$

Les éléments de $\mathcal{SO}_2$ sont exactement les matrices du type $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (résulte de l'étude précédente).

On a, pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \tag{16.9}$$

Ainsi :

$\mathcal{SO}_2$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{SO}_2, \times)$ est un groupe commutatif.

Théorème, définition :
Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. Alors il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que la matrice de f dans toute base orthonormée directe soit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On dit alors que f est la rotation (vectorielle) d'angle θ.

Démonstration :

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe, soit $A = \text{mat}(f, \mathscr{B})$.

Comme $f \in \mathcal{SO}(E)$, on sait qu'alors $A \in \mathcal{SO}_2$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Soit $\mathscr{B}'$ une autre base orthonormée directe. Soit alors P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors, comme $P \in \mathcal{SO}_2$ (et $\mathcal{SO}_2$ est commutatif), on a $\text{mat}(f, \mathscr{B}') = P^{-1}AP = P^{-1}PA = A$.

Notation :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note ρ_θ la rotation d'angle θ.

Proposition :

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{SO}(E) \\ \theta & \longmapsto & \rho_\theta \end{array}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{SO}(E), \circ)$, et dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration :

- $\rho_0 = \text{Id}_E$
- $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \rho_{\theta+\theta'} = \rho_\theta \circ \rho_{\theta'}$ (résulte du calcul matriciel précédent).
- Surjectivité : résulte du théorème précédent
- Noyau : $\rho_\theta = \text{Id}_E \iff \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

Autres résultats :

- $(\rho_\theta)^{-1} = \rho_{-\theta}, \qquad \rho_\pi = -\text{Id}_E$
- Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et $\theta \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$\rho_\theta(\vec{u}) = \vec{v} \iff \begin{cases} \|\vec{u}\| & = \|\vec{v}\| \\ (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \tag{16.10}$$

En effet : on a :

◇ Si $\rho_\theta(\vec{u}) = \vec{v}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ car ρ_θ est un automorphisme orthogonal.
Notons $\vec{u}'$ le vecteur tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)$ soit une base orthonormée directe.
Alors la matrice de ρ_θ dans cette base est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\rho_\theta\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = \cos\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta \vec{u}'$.
Donc $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\rho_\theta\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = \cos\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta \vec{u}'$. Donc $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \theta \quad [2\pi]$

◇ Inversement, si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \theta \quad [2\pi]$, alors :
$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta \vec{u}'$, où $\vec{u}'$ est tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)$ soit une base orthonormée directe. Donc $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \rho_\theta\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$ (première colonne de la matrice de ρ_θ dans $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{u}'\right)$, orthonormée)
Donc $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\rho_\theta(\vec{u})$, soit $\rho_\theta(\vec{u}) = \vec{v}$.

C) Étude de $\mathcal{O}(E)\backslash\mathcal{SO}(E)$ et $\mathcal{O}_2\backslash\mathcal{SO}_2$

- Soit $f \in \mathcal{O}(E)\backslash\mathcal{SO}(E)$, $A = \text{mat}(f, \mathscr{B})$, où $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.
  Alors $A \in \mathcal{O}_2\backslash\mathcal{SO}_2$.

Donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, où $a^2 + b^2 = 1$.
On remarque déjà que ${}^tA = A$.
Or, $A \in \mathcal{O}_2$, donc ${}^tAA = I_2$. Donc $A^2 = I_2$, donc $f^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, f est une symétrie vectorielle.
Mais $f \in \mathcal{O}(E)$, donc f est une symétrie orthogonale (car $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$), et cette symétrie est par rapport à une droite :
La symétrie par rapport à E est l'identité, et celle par rapport à $\{0\}$ est $-\mathrm{Id}_E$, et ces deux éléments sont dans $\mathcal{SO}(E)$ (en dimension 2).
Ainsi, f est une réflexion.

- Inversement, les réflexions sont bien des éléments de $\mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$.

Conclusion :
$\mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$ est l'ensemble des réflexions.

Attention : La matrice d'une réflexion dans une base orthonormée directe dépend de cette base.
La matrice d'une réflexion de droite D est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale dont le premier vecteur dirige D.

D) Résumé, tableau : classification des éléments de $\mathcal{O}(E)$ lorsque $\dim E = 2$

Dimension de l'espace des invariants	Nature	Matrice
0	Rotation d'angle θ non nul (modulo 2π)	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe
2	Id_E (rotation d'angle nul)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute base
1	Réflexion de droite D	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans <u>une</u> base orthonormée directe. Du type $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe.

Remarque :
La matrice de ρ_θ dans une base orthonormée indirecte est $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ (les bases orthonormées indirectes d'une orientation sont les bases orthonormées directes de l'autre orientation)

E) Composées de réflexions

Théorème :
Tout élément de $\mathcal{SO}(E)$ est composé de deux réflexions, l'une pouvant être choisie quelconque.

Démonstration :

Soit $\rho \in \mathcal{SO}(E)$, $s \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$

Alors $\rho \circ s \in \mathcal{O}(E)$, et $\det(\rho \circ s) = \det(\rho) \times \det(s) = -1$.

Donc $\rho \circ s \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$. Donc $\rho \circ s$ est une réflexion s'.

Donc $\rho = \rho \circ (s \circ s) = (\rho \circ s) \circ s = s' \circ s$

De même, $s \circ \rho = s''$, où $s'' \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$. Donc $\rho = s \circ s''$

Conclusion :

Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(E)$.

IV Compléments à propos d'angles orientés

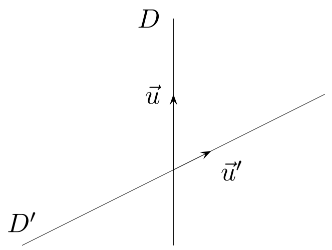
- Relation de Chasles : soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \backslash \{0\}$

$$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) + (\widehat{\vec{w},\vec{v}}) \ [2\pi] \tag{16.11}$$

  Démonstration :

  Conséquence du fait que $\rho_{\theta+\theta'} = \rho_\theta \circ \rho_{\theta'}$.

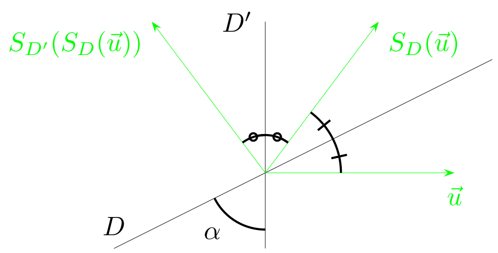
- Angle orienté de deux droites du plan.



  Soient D, D' deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{u}'$. Alors $(\widehat{\vec{u},\vec{u}'})$, modulo π, ne dépend pas du choix de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. On le note alors $(\widehat{D,D'})$

  (Si $\lambda > 0$, $(\widehat{\vec{u},\lambda\vec{u}'}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{u}'}) \ [2\pi]$ et $(\widehat{\vec{u},-\vec{u}'}) \equiv \pi + (\widehat{\vec{u},\vec{u}'}) \ [2\pi]$)

- α = angle orienté $(\widehat{D,D'})$:



  Alors, en notant s_D, $s_{D'}$ les réflexions de droites D, D', on a $s_{D'} \circ s_D = \rho_{2\alpha}$.