Chapitre 15 : Espace vectoriel euclidien

I Définition et notations

Un espace vectoriel euclidien $\underset{\text{déf}}{=}$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension $n \geqslant 2$, le produit scalaire est noté φ. Pour $x, y \in E$, on note aussi :

- $x \cdot y$ pour $\varphi(x, y)$ (parfois on rencontre aussi $(x|y)$)
- x^2 pour $\varphi(x, x)$
- $\|x\|$ pour $\sqrt{\varphi(x, x)}$ (ainsi, $x \mapsto \|x\|$ est la norme associée au produit scalaire φ, on l'appelle la norme euclidienne)
- $x \perp y$ pour $\varphi(x, y) = 0$

Exemple :
$\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique : on parle de la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque :
Si E est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel F de E est muni naturellement d'une structure euclidienne, obtenue par restriction.

II Bases orthonormales

A) Généralités

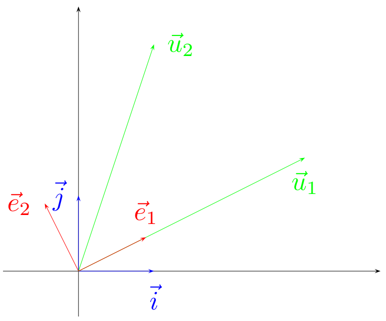
Définition, proposition :
Une base orthonormale (ou orthonormée) $\underset{\text{déf}}{=}$ une famille orthonormale de vecteurs de E qui en forme une base = une famille orthonormale de n vecteurs de E (car une famille orthonormale est libre).

Théorème (Schmidt) :
Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une base quelconque de E.
Alors il existe une unique base orthonormale $(e_1, e_2, \dots e_n)$ telle que :

- $\forall p \in [\![1, n]\!], \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_p)$
- $\forall p \in [\![1, n]\!], e_p \cdot u_p > 0$

On dit que $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est la base orthonormale s'appuyant sur la base $(u_1, u_2, \dots u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Préliminaire (graphique) :



$(\vec{i},\vec{j})$: base orthonormée
$(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$: base quelconque
$(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$: base orthonormée qui s'appuie dessus

Démonstration :

On montre par récurrence sur p que, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, « on a une et une seule manière de construire e_p ».

- Il est évident qu'il y a une seule façon de construire e_1 de sorte que :
  - ◇ $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(u_1)$ (cela impose que $e_1 = \lambda u_1$, avec $\lambda \neq 0$ car $e_1 \neq 0, u_1 \neq 0$)
  - ◇ $\|e_1\| = 1$ (cela impose alors que $|\lambda|\|u_1\| = 1$, ainsi $e_1 = \pm|\lambda|u_1$)
  - ◇ $e_1 \cdot u_1 > 0$, donc $e_1 = +|\lambda|u_1$.

  Ainsi, $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Réciproquement, ce vecteur convient bien.

- Soit $p \in [\![1,n-1]\!]$. Supposons $(e_1, e_2, \dots e_p)$ construit.

  Montrons qu'il y a un et un seul choix de sorte que :

  1. $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_{p+1})$
  2. e_{p+1} est orthogonal aux $e_i, 1 \leqslant i \leqslant p$
  3. $\|e_{p+1}\| = 1$
  4. $e_{p+1} \cdot u_{p+1} > 0$

  - ◇ 1. impose que e_{p+1} soit combinaison linéaire des $u_i, 1 \leqslant i \leqslant p+1$,

  $$e_{p+1} = \lambda u_{p+1} + \underbrace{\text{combinaison linéaire des } u_i, 1 \leqslant i \leqslant p}_{\text{combinaison linéaire des } e_i, 1 \leqslant i \leqslant p} \tag{15.1}$$

  et $\lambda \neq 0$ car sinon $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_{p+1})$ et u_{p+1} serait alors combinaison linéaire des $u_i, 1 \leqslant i \leqslant p$.

  Donc $e_{p+1} = \lambda\left(u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right)$.

  Et inversement, si $e_{p+1} = \lambda\left(u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right)$, alors on a bien 1.

  - ◇ 2 impose que pour $j \in [\![1,p]\!], e_j \cdot e_{p+1} = 0$.

  Or, pour $j \in [\![1,p]\!], e_j \cdot e_{p+1} = \lambda\left(u_{p+1} \cdot e_j + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \cdot e_j\right) = \lambda(u_{p+1} \cdot e_j + \alpha_j)$ car on a $e_i \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$, 1 sinon, par hypothèse de récurrence.

  Ainsi, $\forall j \in [\![1,n]\!], \alpha_j = -u_{p+1} \cdot e_j$.

  Inversement, si cette condition est vérifiée, on a bien 2.

  - ◇ 3 impose que $\|e_{p+1}\| = 1$, c'est-à-dire que $1 = |\lambda|\|u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\|$.

  Donc $\lambda = \pm\frac{1}{\|u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\|}$.

  ($u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \neq 0$ car sinon $u_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_p)$)

  Inversement, si on a cette valeur de λ, on a bien 3.

◇ 4 impose le choix de +, car $e_{p+1} \cdot e_{p+1} = \lambda\,(u_{p+1} \cdot e_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \cdot e_{p+1})$.
Or, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \cdot e_{p+1} = 0$ car e_{p+1} est orthogonal aux $e_i, 1 \leqslant i \leqslant p$.
Donc $\underbrace{e_{p+1} \cdot e_{p+1}}_{=1} = \lambda \underbrace{u_{p+1} \cdot e_{p+1}}_{>0}$ donc $\lambda > 0$.
Inversement, si $\lambda > 0$, on a bien 4.

Ce qui achève la récurrence.

Conséquence :

- Dans un espace vectoriel euclidien, il existe au moins une base orthonormale.
- Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

En effet : Soit $(e_1, e_2, \dots e_p)$ une famille orthonormale. Comme elle est libre, on peut la compléter en une base $(e_1, e_2, \dots e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ de E. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on obtient alors une base orthonormale $(e'_1, e'_2, \dots e'_n)$. Mais, d'après le théorème de Schmidt appliqué dans $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots e_n)$, on a $(e_1, \dots e_p) = (e'_1, \dots e'_p)$.

B) Produit scalaire et base orthonormale

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $x \in E$, de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans $\mathscr{B}$, notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Soit $y \in E$, de composantes $(y_1, y_2, \dots y_n)$ dans $\mathscr{B}$, notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On identifie ici $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ pour ne pas charger les notations :

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} x_i e_i \cdot y_j e_j \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = ({}^tX)Y \tag{15.2}$$

Ainsi, $\boxed{x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = ({}^tX)Y}$.

Et, en particulier : $\boxed{x^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ({}^tX)X}$.

Ainsi, l'application $\phi_{\mathscr{B}}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2, \dots x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$, qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev, est aussi un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev euclidien *, $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique.

Remarque :

Inversement, soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ une base de E.

Alors il existe un et un seul produit scalaire tel que $\mathscr{B}$ soit orthonormale dans le $\mathbb{R}$-ev euclidien E muni

*. C'est-à-dire que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n, \phi_{\mathscr{B}}(u) \cdot \phi_{\mathscr{B}}(v) = u \cdot v$, en plus des règles pour un $\mathbb{R}$-ev

de ce produit scalaire.

En effet, c'est l'application φ définie par :

Pour tout $x, y \in E$, de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots y_n)$ dans $\mathscr{B}$, $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Exemple :

$\mathbb{R}^2$, muni de la base $[\underbrace{(1,2)}_{u_1}, \underbrace{(1,1)}_{u_2}]$. On note $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $x = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} = x_1(2u_2 - u_1) + x_2(u_1 - u_2) = (x_2 - x_1)u_1 + (2x_1 - x_2)u_2$.

Ainsi, $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormale pour le produit scalaire naturel, mais (u_1, u_2) n'en est pas une pour ce produit scalaire ; en revanche, c'en est une pour le produit scalaire

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)) & \longmapsto & (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (2x_1 - x_2)(2y_1 - y_2) \end{array} \tag{15.3}$$

III Orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projecteurs et symétries orthogonaux

A) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel (rappel)

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

On définit $F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, x \cdot y = 0\}$.

Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, et $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration :

Déjà, c'est un sous-espace vectoriel de E (vu dans le chapitre précédent).

- Si $F = \{0\}$, alors $F^\perp = E$, et on a bien $E = F \oplus F^\perp$.
- Si $F \neq \{0\}$. On note p la dimension de F ; ainsi, $1 \leqslant p \leqslant n$.

  Soit $(e_1, e_2, \dots e_p)$ une base orthonormale de F.

  On la complète en une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ de E. Soit alors $x \in E$, de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans $\mathscr{B}$.

  On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\iff \forall y \in F, \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \cdot y = 0 \\ &\iff \forall y_1, y_2, \dots y_p \in \mathbb{R}, \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^p y_i e_i\right) = 0 \\ &\iff \forall j \in [\![1,p]\!], \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \cdot e_j = 0 \\ &\iff \forall j \in [\![1,p]\!], x_j = 0 \end{aligned} \tag{15.4}$$

  L'avant-dernière équivalence se justifie dans un sens en prenant, pour $j \in [\![1,p]\!]$ $y_j = 1$ et $\forall i \in [\![1,p]\!] \setminus \{j\}, y_i = 0$, et dans l'autre sens par linéarité de la deuxième variable.

  Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots e_n)$, donc $F^\perp$ est bien supplémentaire de F dans E.

Conséquence :

Dans un espace euclidien, $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

En effet, on a déjà vu que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. De plus, en notant $p = \dim F$, on a :

$\dim(F^{\perp}) = n - p$, donc $\dim((F^{\perp})^{\perp}) = n - (n - p) = p = \dim F$. D'où l'égalité.

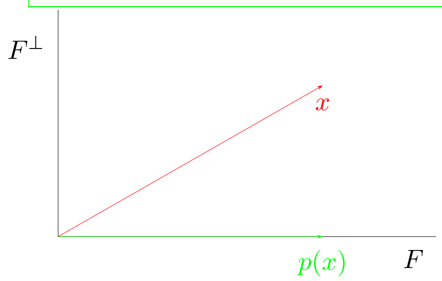
B) Projecteur orthogonal

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Le projecteur orthogonal sur F est, par définition, le projecteur sur F selon $F^{\perp}$.

Pour $x \in E$, p le projecteur orthogonal sur F, alors $p(x)$ est appelée la projection orthogonale de x sur F.



Ainsi, $p(x)$ est l'unique élément de F tel que x s'écrive $x = p(x) + u$, où $u \in F^{\perp}$. (car $E = F \oplus F^{\perp}$, et $x \in E, p(x) \in F$). Autrement dit, $p(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p(x) \in F^{\perp}$. Ainsi, pour

$$y \in E,\ y = p(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}.$$

C) Distance d'un élément à un sous-espace vectoriel

Définition :

Soit A une partie non vide E et soit $x \in E$. Alors la distance de x à A, notée $d(x, A)$, est : $d(x, A) \underset{\text{déf}}{=} \inf_{y \in A} d(x, y)$.

La borne inférieure existe bien, car $\{d(x, y), y \in A\}$ est non vide (car A est non vide), et minorée (par 0).

(Définition : frontière = adhérence d'une partie, privée de l'intérieur)

Théorème :

Soit F un sous-espace vectoriel de E, soit p le projecteur orthogonal sur F.

Soit $x_0 \in E$.

Alors $p(x_0)$ est l'unique élément de F tel que $d(x_0, F) = \|x_0 - p(x_0)\|$. Autrement dit, la distance de x_0 est atteinte, en un et un seul point, qui n'est autre que $p(x_0)$.

Démonstration :

Soit $y \in F$.

Alors $\|y - x_0\|^2 = \|y - p(x_0) + p(x_0) - x_0\|^2$.

Or, $y - p(x_0) \in F$ car $y \in F, p(x_0) \in F$; et $p(x_0) - x_0 \in F^{\perp}$ par définition de p.

Donc $y - p(x_0) \perp p(x_0) - x_0$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|y - x_0\|^2 = \|y - p(x_0) + p(x_0) - x_0\|^2 = \|y - p(x_0)\|^2 + \|p(x_0) - x_0\|^2 \qquad (15.5)$$

D'où $\|y - x_0\| \geqslant \|p(x_0) - x_0\|$, et il n'y a égalité que si $y = p(x_0)$ (car sinon $\|y - x_0\|^2 - \|p(x_0) - x_0\|^2 = \|y - p(x_0)\|^2 \neq 0$)

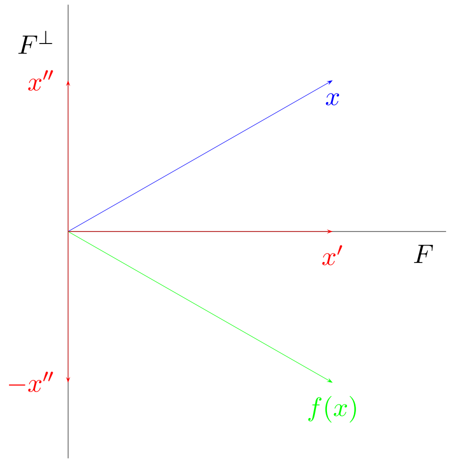
D) Symétries orthogonales

Ce sont les symétries par rapport à un sous-espace vectoriel F, selon $F^{\perp}$.

Autrement dit :

La symétrie orthogonale par rapport à F est, par définition, l'application

$$\begin{array}{rccc} f\colon & E = F \oplus F^{\perp} & \longrightarrow & E \\ & x = x' + x'' & \longmapsto & x' - x'' \end{array} \qquad (15.6)$$



Remarque :

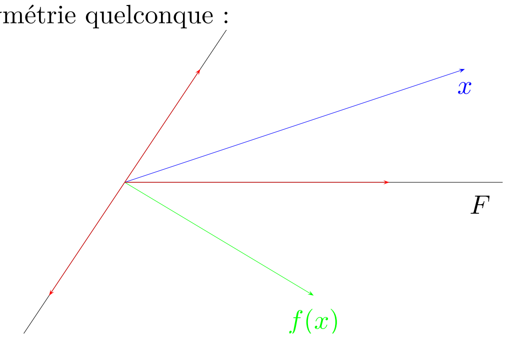
$f(x) = 2p(x) - x$, où p est la projection orthogonale sur F.

Proposition :

Soit f une symétrie sur E. On a l'équivalence :

$$f \text{ est une symétrie orthogonale} \iff \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$$

Symétrie quelconque :



Démonstration :

Soit f une symétrie par rapport à F selon G. (où G est tel que $E = F \oplus G$).

Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$, et $f(x) = x_F - x_G$.

Donc $\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + 2x_F \cdot x_G + \|x_G\|^2$ et $\|f(x)\|^2 = \|x_F\|^2 - 2x_F \cdot x_G + \|x_G\|^2$.

Ainsi :

- Si $G = F^\perp$, alors $x_F \cdot x_G$ vaudra toujours 0. Donc $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$
- Si $G \neq F^\perp$, on peut trouver $x' \in F, x'' \in G$ tel que $x' \cdot x'' \neq 0$. Alors, en prenant $x = x' + x''$ $(\in E)$, on aura trouvé x tel que $\|f(x)\| \neq \|x\|$. D'où l'équivalence.

IV Formes linéaires et hyperplans

A) Formes linéaires

Théorème :

Les formes linéaires sur E sont exactement les applications du type : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a \cdot x \end{array}$, où $a \in E$. Plus précisément :

- Les applications du type $x \mapsto a \cdot x$ sont linéaires, et
- Si $h \in E^*$, alors il existe un et un seul élément a de E tel que $\forall x \in E, h(x) = a \cdot x$. (on retrouve ainsi le fait que $\dim(E^*) = \dim(E)$)

Démonstration :

Le premier point résulte de la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable. Pour le deuxième :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $h \in E^*$.

Il existe alors $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$ de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans $\mathscr{B}$, $h(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a \cdot x$, avec $a = \sum_{i=1}^n a_ie_i$ (on introduit en fait $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, matrice de h dans les bases $\mathscr{B}$ et (1)). D'où l'existence.

Unicité :

Si il existe $a, a' \in E$ tels que $\forall x \in E, h(x) = a \cdot x$ et $h(x) = a' \cdot x$, alors $\forall x \in E, (a - a') \cdot x = 0$ (linéarité par rapport à la première variable).

Donc $a - a' \in E^\perp = \{0\}$, d'où $a = a'$.

B) Hyperplans

Soit H un hyperplan de E. Alors H est le noyau d'une forme linéaire sur E, h, non nulle (attention, il n'y a pas unicité !).

Or, il existe $\vec{n} \in E$ tel que $\forall x \in E, h(x) = \vec{n} \cdot x$.

Ainsi, $H = \ker h = \{x \in E, h(x) = 0\} = \{x \in E, \vec{n} \cdot x = 0\} = [\text{Vect}(\vec{n})]^\perp$.

Donc $\vec{n}$ dirige la droite vectorielle $N = H^\perp$. On dit que N est la normale à H : $N = H^\perp$, ou encore $N^\perp = H$, et que $\vec{n}$ est un vecteur normal à H.

Remarque :

Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base orthonormale de E,

Si H a pour équation $H :\ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ dans $\mathscr{B}$, alors le vecteur $\vec{n}$ de composantes

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$ est normal à H. En effet, l'équation « dit » : $x \in H \iff \vec{n} \cdot x = 0$.

C) Projection orthogonale sur un hyperplan

On considère un hyperplan H, un vecteur $\vec{n}$ normal à H et p le projecteur orthogonal sur H.

Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{x'}_{\in H} + \underbrace{x''}_{\in H^\perp}$, et $\begin{cases} x' = p(x) \\ x'' = \lambda\vec{n}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Donc $\boxed{x = p(x) + \lambda\vec{n}}$

Ainsi, $x \cdot \vec{n} = \underbrace{p(x) \cdot \vec{n}}_{=0 \text{ car } p(x) \in H} + \lambda\|\vec{n}\|^2$

D'où $\lambda = \frac{x \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$, et, par conséquent :

$p(x) = x - x'' = x - \lambda.\vec{n}$, soit $\boxed{p(x) = x - \left(\frac{x \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{n}}$

Conséquence :

Pour tout $x \in E$, $\boxed{d(x, H) = \|x - p(x)\| = \frac{|x \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \frac{|x \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$.

D) Réflexion

Une réflexion $\underset{\text{déf}}{=}$ une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition :

Étant donnés deux vecteurs x, x' de E, distincts et de même norme, il existe une et une seule réflexion qui les échange.

Démonstration :

- Existence :

  Soit H l'hyperplan tel qu'un vecteur normal soit $x - x'$, et soit f la réflexion d'hyperplan H. On note enfin p la projection orthogonale sur H. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) = 2p(x) - x &= 2\left(x - \frac{x \cdot (x - x')}{\|x - x'\|^2}(x - x')\right) - x \\ &= -2\frac{\|x\|^2 - x \cdot x'}{\|x\|^2 - 2x \cdot x' + \|x'\|^2}(x - x') - x \\ &= -2\frac{\|x\|^2 - x \cdot x'}{2\|x\|^2 - 2x \cdot x'}(x - x') - x \\ &= -(x - x') - x = x' \end{aligned} \tag{15.7}$$

  Et, de même, $f(x') = x$.

- Unicité :

  Supposons qu'il existe deux réflexions f, g d'hyperplans F, G telles que :

$$f(x) = x' \qquad f(x') = x \qquad g(x) = x' \qquad g(x') = x \tag{15.8}$$

Alors :

Déjà, $x - x'$ est normal à F. En effet :

Pour tout $y \in F$, on a déjà :

$$\|f(x-y)\| = \|x-y\| = \|f(x)-f(y)\| = \|x'-y\| \tag{15.9}$$

D'où $\|x-y\| = \|x'-y\|$.

De plus, pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned}(x-x')\cdot y = x'\cdot y - x\cdot y &= \frac{1}{2}\left(\|x'\|^2+\|y\|^2-\|x'-y\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2\right)\\ &= 0 \text{ car } \|x'\| = \|x\| \text{ et } \|x'-y\| = \|x-y\|\end{aligned} \tag{15.10}$$

Donc $F^\perp = \operatorname{Vect}(x-x')$.

De même, $G^\perp = \operatorname{Vect}(x-x')$

Donc $F^\perp = G^\perp$, d'où $F = G$.

V Automorphismes orthogonaux

A) Définition, théorème

Définition, théorème :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a les équivalences :

$$f \text{ est un automorphisme orthogonal} \underset{\text{déf}}{\iff} f \text{ « conserve le produit scalaire » :} \tag{15.11}$$

$$\forall x, y \in E, f(x)\cdot f(y) = x\cdot y$$

$$\iff f \text{ « conserve la norme » :} \tag{15.12}$$

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

$$\iff f \text{ « conserve les bases orthonormales » :} \tag{15.13}$$

Pour toute base orthonormale $(e_1, e_2, \dots e_n)$,

$(f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est orthonormale

$$\iff f \text{ « conserve une base orthonormale » :} \tag{15.14}$$

Il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots e_n)$

telle que $(f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est orthonormale

Démonstration :

- (15.11) $\implies$ (15.12) : évident ; si (15.11), alors $f(x)^2 = x^2$
- (15.12) $\implies$ (15.11) : supposons (15.12).

Soient $x, y \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x)\cdot f(y) &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= x\cdot y \end{aligned} \tag{15.15}$$

- (15.11) $\implies$ (15.13) : supposons (15.11).
  Soit $(e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale.
  Alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i)\cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}$
- (15.13) $\implies$ (15.14) : il en existe puisque l'ensemble des bases orthonormales n'est pas vide.
- (15.14) $\implies$ (15.11) : supposons (15.14).
  Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale telle que $\mathscr{B}' = (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ soit aussi orthonormale.
  Soient alors $x, y \in E$, de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots y_n)$ dans $\mathscr{B}$.
  Alors $x\cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
  Et $f(x)\cdot f(y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ car $\mathscr{B}'$ est aussi orthonormale, et les composantes de $f(x)$ et $f(y)$ dans $\mathscr{B}'$ sont $(x_1, x_2, \dots x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots y_n)$ puisque f est linéaire (rappel : pour une application linéaire, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \implies f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$)

Remarque :

Si une application f est un automorphisme orthogonal, alors c'est aussi un automorphisme.
En effet : Si f est un automorphisme orthogonal, alors :

$$f(x) = 0 \implies \|f(x)\| = 0 \implies \|x\| = 0 \implies x = 0 \tag{15.16}$$

Donc $\ker f = \{0\}$. Donc f est injective, donc bijective (puisque E est de dimension finie)

Définition, proposition :

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. Alors $\mathcal{O}(E)$ constitue un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ des automorphismes de E. On l'appelle le groupe orthogonal de E. Les éléments de $\mathcal{O}(E)$ sont aussi appelés des isométries vectorielles.

Démonstration :

- $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$
- Si $f, g \in \mathcal{O}(E)$, alors $f\circ g \in \mathcal{O}(E)$ et $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$:
  $\|(f\circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|$, et $\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\| = \|x\|$.

Exemple :

Les symétries orthogonales sont des éléments de $\mathcal{O}(E)$.

B) Matrices orthogonales

Théorème :
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{mat}(f, \mathscr{B})$.
Alors :

$f \in \mathcal{O}(E) \iff$ les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire naturel $\iff A^tA = I_n \iff A$ est inversible et $A^{-1} = {}^tA$

Démonstration :
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(E) &\iff (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n)) \text{ est orthonormée} \\ &\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!], f(e_i)\cdot f(e_j) = \delta_{i,j} \\ &\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j} \\ &\iff \text{ les colonnes de } A \text{ forment une famille orthonormale de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\dots \end{aligned} \tag{15.17}$$

et

$$\begin{aligned} \forall i,j \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j} &\iff {}^tAA = I_n \\ &\iff A \text{ est inversible et } A^{-1} = {}^tA \\ &\iff A^tA = I_n \end{aligned} \tag{15.18}$$

D'où le résultat.

Définition, proposition :

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

  $$A \text{ est orthogonale } \underset{\text{déf}}{\iff} {}^tAA = I_n \iff A \text{ est inversible et } A^{-1} = {}^tA.$$

- L'ensemble des matrices carrées et orthogonales, noté $\mathcal{O}_n$ (ou $\mathcal{O}(n)$, ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$), forme un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$
- Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E, si f est une application linéaire de E dans E, et si $A = \mathrm{mat}(f, \mathscr{B})$, alors $f \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}_n$
- $\mathscr{B}$ étant une base orthonormale de E, l'application $\begin{array}{rccl}\phi\colon & \mathcal{O}(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_n \\ & f & \longmapsto & \mathrm{mat}(f,\mathscr{B})\end{array}$ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ dans $(\mathcal{O}_n, \times)$.

En effet : déjà, ϕ est correctement définie, puisque pour $f \in \mathcal{O}(E)$, $\mathrm{mat}(f, \mathscr{B})$ est bien orthogonale.

- $\phi(f \circ g) = \mathrm{mat}(f \circ g, \mathscr{B}) = \mathrm{mat}(f, \mathscr{B}) \times \mathrm{mat}(g, \mathscr{B}) = \phi(f) \times \phi(g)$
- $\varphi(\mathrm{Id}_E) = I_n$
- C'est surjectif d'après le point précédent : pour $A \in \mathcal{O}_n$, on trouve $f \in \mathcal{O}(E)$.
- C'est aussi injectif : $\ker \varphi = \{\mathrm{Id}\}$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n \tag{15.19}$$

C) Déterminant d'un automorphisme orthogonal

Proposition :
Si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det f = \pm 1$.
Si $A \in \mathcal{O}_n$, alors $\det A = \pm 1$

Démonstration :
Si $A \in \mathcal{O}_n$, on a alors :
${}^tAA = I_n$, donc $\det({}^tAA) = 1$, soit $\det({}^tA) \times \det(A) = 1$, d'où $\det(A)^2 = 1$
Si $f \in \mathcal{O}(E)$: soit $A = \mathrm{mat}(f, \mathscr{B})$, où $\mathscr{B}$ est une base orthonormale.
Alors $\det f = \det A = \pm 1$ car A est orthogonale.

Définition, proposition :
On note $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{O}(E)$ tels que $\det f = 1$.
On note $\mathcal{SO}_n$ l'ensemble des $A \in \mathcal{O}_n$ tels que $\det(A) = 1$.
Alors $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial de E. Et $\mathcal{SO}_n$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n, \times)$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial d'ordre n (attention, $\mathcal{SO}_n$ n'est pas pour autant de cardinal $n\,!$)

Ces deux groupe sont isomorphes ; plus précisément, si $\mathscr{B}$ désigne une base orthonormale de E, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_n \\ f & \longmapsto & \mathrm{mat}(f, \mathscr{B}) \end{array}$ définit, par restriction, un isomorphisme de $\mathcal{SO}(E)$ vers $\mathcal{SO}_n$.

Remarque :
$\mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$ n'est pas un sous-groupe, puisque si $\det f = -1$ et $\det g = -1$, alors $\det f \circ g = 1\,!$)

Exemple :
Soit f une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel quelconque F de E. (on note p la dimension de F).
Alors $f \in \mathcal{O}(E)$ (puisque f conserve la norme)
On considère la matrice de f dans une base adaptée (le « début » dans F, le « reste » dans $F^\perp$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15.20}$$

Ainsi, $\det f = (-1)^{n-p}$

Vocabulaire :
Un élément de $\mathcal{SO}(E)$ est un automorphisme orthogonal direct / une isométrie vectorielle directe. (et indirect(e) pour les éléments de $\mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$)
Ainsi :

- Les réflexions sont toujours indirectes $(n - p = 1)$

- Les symétries orthogonales par rapport à une droite (appelées aussi retournements) sont indirectes en dimension 2, directes en dimension 3.

Vocabulaire (Autre) :

Les éléments de $\mathscr{SO}(E)$ s'appellent aussi des rotations.

VI Orientation et changement de base

A) Orientation d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n

Définition :

Orienter E, c'est choisir une base $\mathscr{B}$ de E, décréter qu'elle est directe, et convenir qu'étant donnée une base $\mathscr{B}'$ de E :

- $\mathscr{B}'$ est directe $\iff$ $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' > 0$
- $\mathscr{B}'$ est indirecte $\iff$ $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' < 0$

Ainsi, étant données deux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ de E, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont de même sens (c'est-à-dire toutes les deux (in)directes) si et seulement si $\det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}'' > 0$

En effet : $\det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}'' = \det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B} \times \det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'' = (\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}')^{-1} \times \det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}''$, qui est positif si et seulement si les deux déterminants on même signe.

Exemple :

- En dimension 2 :
  Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est directe, alors $(\vec{\jmath}, \vec{\imath})$ est indirecte, $(-\vec{\jmath}, \vec{\imath})$ est directe, $(-\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$ aussi.
  (Les déterminants sont « multipliés par -1 » lorsqu'on échange deux vecteurs)
- En dimension 3 : Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est directe, alors $(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})$ est directe, $(\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k})$ est indirecte, et $(\vec{\jmath}, \vec{\imath}, -\vec{k})$ directe.

On considère dorénavant E orienté.

Proposition :

Si $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est une famille orthonormale de E, avec $p < n$, on peut la compléter en une base orthonormée directe de E.

Démonstration :

On sait construire $(u_1, u_2, \dots u_n)$ base orthonormale. Ainsi, soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$, soit $(u_1, u_2, \dots - u_n)$ sera directe.

B) Changement de base orthonormale

Proposition :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots e'_n)$ une autre base de E, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors $\mathscr{B}'$ est orthonormale $\iff$ P est orthogonale.

Plus précisément :

$\mathscr{B}'$ est orthonormale de même sens que $\mathscr{B} \iff P \in \mathcal{SO}_n$.

$\mathscr{B}'$ est orthonormale de sens contraire à $\mathscr{B} \iff P \in \mathcal{O}_n \backslash \mathcal{SO}_n$.

Démonstration :

P donne les composantes de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$, qui est orthonormale.

Donc, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!], e'_i \cdot e'_j = C_i \cdot C_j$ (produit scalaire naturel des colonnes de P), et donc $\mathscr{B}'$ est orthonormale si et seulement si les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. (Par ailleurs, $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \det P$, d'où le sens...)

Ainsi, si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe et si $\mathscr{B}'$ est une autre base, P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée directe si et seulement si $P \in \mathcal{SO}_n$

C) Automorphismes orthogonaux et orientation

Proposition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

On sait déjà que $f \in \mathcal{O}(E) \iff (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale.

On a, plus précisément :

$f \in \mathcal{SO}(E) \iff (f(e_1), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale de même sens que $\mathscr{B}$.

$f \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E) \iff (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale de sens opposé à $\mathscr{B}$.

Démonstration :

Si $\mathscr{B}' = (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det f$.

D) Déterminant en base orthonormée directe

Proposition, définition :

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E.

Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots u_n)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe $\mathscr{B}$, et s'appelle le produit mixte de $u_1, u_2, \dots u_n$, qu'on note $\det(u_1, u_2, \dots u_n)$ ou $[u_1, u_2, \dots u_n]$.

Démonstration :

Si $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormées directes :

$$\det_{\mathscr{B}'}(u_1, u_2, \dots u_n) = \underbrace{\det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}}_{\substack{=1 \text{ car } \mathscr{B}, \mathscr{B}' \\ \text{sont deux bases} \\ \text{orthonormales} \\ \text{de même sens}}} \times \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots u_n) \tag{15.21}$$