Chapitre 14 : Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev

Ici, E désigne un $\mathbb{R}$-ev.

I Définition

Définition :

Un produit scalaire sur E, c'est une forme bilinéaire symétrique définie–positive sur E,

C'est-à-dire une application $\varphi\colon \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ telle que :

- Pour tous $x, x', y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x+\lambda x', y) = \varphi(x,y) + \lambda\varphi(x',y)$
  Et pour tous $x, y, y' \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, y+\lambda y') = \varphi(x,y) + \lambda\varphi(x,y')$
  (bilinéarité)
- Pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie)
- Pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$ (« positive » seulement)
  Et $\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$ (« définie–positive »)

Exemple :

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\underbrace{(x_1,\dots x_n)}_{x}, \underbrace{(y_1,\dots y_n)}_{y}) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$. Alors φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :

La bilinéarité et la symétrie sont immédiates.

$$\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0 \tag{14.1}$$

II Propriétés essentielles

A) Théorème de Cauchy–Schwarz

Théorème (inégalité de Cauchy–Schwarz) :

Soit φ un produit scalaire sur E.

Alors, pour tous $x, y \in E$, $(\varphi(x,y))^2 \leqslant \varphi(x,x)\times\varphi(y,y)$

Démonstration :

Soient $x, y \in E$

- Si $x = 0$, alors $\varphi(x, y)$ et $\varphi(x, x)$ sont nuls (car φ est une forme bilinéaire)
- Si $x \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\underbrace{\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y)}_{\geqslant 0 \text{ car } \varphi \text{ est positive}} &= \lambda^2\varphi(x, x) + \varphi(y, y) + \lambda\varphi(x, y) + \lambda\varphi(y, x) \\ &= \lambda^2\varphi(x, x) + \varphi(y, y) + 2\lambda\varphi(x, y)\end{aligned} \tag{14.2}$$

Or, $x \neq 0$ et φ est définie–positive. Donc $\varphi(x, x) \neq 0$. On a donc à droite un polynôme du second degré en λ qui reste toujours positif. Son discriminant est donc négatif (ou nul).
Donc $\Delta = 4\varphi(x, y)^2 - 4\varphi(y, y)\varphi(x, x) \leqslant 0$
D'où l'inégalité voulue.

B) Norme associée à un produit scalaire

Définition :

Définition générale d'une norme sur un $\mathbb{R}$-ev :

Une norme sur E, c'est une application $N\colon E \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E, N(x) \geqslant 0$
- $\forall x \in E, (N(x) = 0 \implies x = 0)$
- $\forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Proposition :

Soit φ un produit scalaire sur E. Alors l'application $N\colon x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$ est une norme sur E (ainsi, pour tout $x \in E, N(x)^2 = \varphi(x, x)$, appelé le carré scalaire de x)

Démonstration :

Déjà, pour $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$. Donc $\sqrt{\varphi(x, x)}$ a un sens et est positive, ne peut être nulle que si $\varphi(x, x) = 0$, ce qui n'est le cas que lorsque $x = 0$.
Pour $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2\varphi(x, x)} = |\lambda|\sqrt{\varphi(x, x)}$.
Soient $x, y \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) &\iff \sqrt{\varphi(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x, x)} + \sqrt{\varphi(y, y)} \\ &\iff \varphi(x + y, x + y) \leqslant \varphi(x, x) + 2\sqrt{\varphi(x, x)\varphi(y, y)} + \varphi(y, y) \\ &\iff \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) \leqslant \varphi(x, x) \\ &\qquad + 2\sqrt{\varphi(x, x)\varphi(y, y)} + \varphi(y, y) \\ &\iff \varphi(x, y) \leqslant \sqrt{\varphi(x, x)\varphi(y, y)}\end{aligned} \tag{14.3}$$

Ce qui est vrai car $\varphi(x, y) \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x, x)\varphi(y, y)}$ (Cauchy–Schwartz)

On appelle cette norme la norme associée au produit scalaire φ.

C) Distance associée à un produit scalaire

Définition :

Définition générale de distance sur un ensemble E :

Une distance sur E, c'est une application $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x, y \in E, d(x, y) \geqslant 0$
- $\forall x, y \in E, (d(x, y) = 0 \implies x = y)$
- $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Proposition :

Si N est une norme sur le $\mathbb{R}$-ev E, alors l'application $(x, y) \mapsto N(x-y)$ est une distance sur E, appelée la distance associée à la norme N.

Démonstration :

On note $d(x, y) = N(y - x)$

- $d(x, y) = N(y - x) \geqslant 0$, n'est nul que si $y - x = 0$ soit $y = x$.
- $d(y, x) = N(x - y) = N(-(y - x)) = |-1|N(y - x) = d(x, y)$
- $d(x, z) = N(z - x) = N(z - y + y - x) \leqslant N(z - y) + N(y - x) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Cas particulier :

Si N est la norme associée à un produit scalaire φ, alors la distance associée à cette norme s'appelle la distance associée au produit scalaire φ.

D) Orthogonalité

On suppose E muni d'un produit scalaire φ.

Définition :

Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux (pour le produit scalaire φ) lorsque $\varphi(x, y) = 0$. On note alors $x \perp y$ ($\perp$ est donc un symbole – courant – pour la relation « être orthogonal à »).

Remarque :

$\forall x \in E, x \perp 0_E$ car $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = 0$.

Théorème (de Pythagore) :

Soit N la norme associée au produit scalaire φ. Alors, pour tous $x, y \in E$, on a l'équivalence : $x \perp y \iff N(x+y)^2 = N(x)^2 + N(y)^2$

Démonstration :

Soient $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 &= \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) \\ &= N(x)^2 + 2\varphi(x, y) + N(y)^2 \end{aligned} \tag{14.4}$$

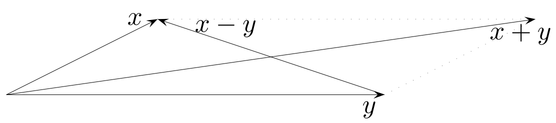
Ainsi, $N(x+y)^2 = N(x)^2 + N(y)^2 \iff \varphi(x, y) = 0 \iff x \perp y$.

E) Divers

On suppose E muni d'un produit scalaire φ, la norme associée N.

Diverses égalités :

- $N(x+y)^2 = N(x)^2 + 2\varphi(x,y) + N(y)^2$ (Égalité de Al Kashi)
- $N(x-y)^2 = N(x)^2 - 2\varphi(x,y) + N(y)^2$
- $N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2$ (Égalité du parallélogramme)
- $N(x+y)^2 - N(x-y)^2 = 4\varphi(x,y)$



F) Familles orthogonales, orthonormales

On suppose E muni d'un produit scalaire φ.

Définition :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- $$\text{La famille est orthogonale} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall i,j \in I, (i \neq j \implies u_i \perp u_j) \tag{14.5}$$
- $$\begin{aligned} \text{La famille est orthonormale} &\underset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} \forall i,j \in I, (i \neq j \implies u_i \perp u_j) \\ \text{et } \forall i \in I, u_i \text{ est de norme } 1 \end{cases} \\ &\iff \forall i,j \in I, \varphi(u_i,u_j) = \delta_{i,j} \end{aligned} \tag{14.6}$$

(Où $\delta_{i,j} = 1$ si $i=j$, 0 sinon)

Rappel :

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \text{La famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est libre} &\underset{\text{déf}}{\iff} \text{pour tout } J \subset I \text{ fini, la famille } (u_i)_{i\in J} \text{ est libre.} \\ &\iff \text{pour tout } J \subset I \text{ fini, pour toute famille } (\lambda_i)_{i\in J} \\ &\qquad \text{de scalaires : } \sum_{i\in J} \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in J, \lambda_i = 0 \end{aligned} \tag{14.7}$$

Proposition :

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls (et en particulier si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale), alors $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

Démonstration :

Soit $(u_i)_{i\in I}$, famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Soit $J \subset I$, fini. Soit $(\lambda_i)_{i\in J}$ une famille de réels. Supposons que $\sum_{i\in J} \lambda_i u_i = 0_E$.

Soit $j \in J$. Alors $\varphi\left(u_j, \sum_{i\in J} \lambda_i u_i\right) = \begin{cases} \varphi(u_j, 0) = 0 \\ \sum_{i\in J} \lambda_i \underbrace{\varphi(u_j, u_i)}_{=0 \text{ si } i\neq j} = \lambda_j \varphi\underbrace{(u_j, u_j)}_{\neq 0} \end{cases}$. Donc $\lambda_j = 0$.

Donc $\forall j \in J, \lambda_j = 0$. Donc $(u_i)_{i\in J}$ est libre. Donc $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

Exemple (de famille orthogonale) :

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est évidemment orthonormale pour le produit scalaire naturel sur $\mathbb{R}^n$.
- $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.
  Alors les fonctions $x \mapsto \cos kx, k \in \mathbb{N}$ forment une famille orthogonale. En effet :
  Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)\,\mathrm{d}x \\ \text{si } p \neq q : \quad &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p+q)x) + \frac{1}{p-q}\sin((p-q)x)\right]_0^{2\pi} = 0 \\ \text{si } p = q \neq 0 : \quad &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p+q)x) + x\right]_0^{2\pi} = \pi \neq 0 \\ \text{si } p = q = 0 : \quad &= \frac{1}{2}[2x]_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0 \end{aligned} \tag{14.8}$$

  (Ainsi, les famille des $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, k \in \mathbb{N}^*$ est orthonormale)

G) Sous-espaces orthogonaux

On suppose E muni d'un produit scalaire φ.

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, x \perp y\}$ (ensemble des éléments de E orthogonaux à tout les éléments de F).

Proposition :

$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé l'orthogonal de F.

Démonstration :

- $0_E \in F^\perp$ car $\forall y \in F, \varphi(0_E, y) = 0$
- Soient $x, x' \in F^\perp, \lambda \in \mathbb{R}$.
  Alors $x + \lambda x' \in F^\perp$ car $\forall y \in F, \varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x', y) = 0 + \lambda 0 = 0$.

(Remarque : on n'utilise pas le fait que F est un espace vectoriel pour montrer que $F^\perp$ en est un, donc F peut très bien être un ensemble quelconque…)

Définition, proposition :

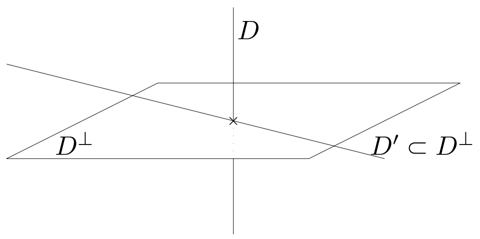
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp \tag{14.9}$$

On note alors $F \perp G$.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire naturel :



Remarque :

- $\{0_E\}^\perp = E$ car $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = 0$
- $E^\perp = \{0_E\}$. En effet : Soit $x \in E^\perp$. Alors $\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0$. En particulier, $\varphi(x, x) = 0$. Donc $x = 0$.
  D'où $E^\perp \subset \{0_E\}$, et l'autre inclusion est évidente…
- $(F^\perp)^\perp \supset F$
  « Les éléments de F sont orthogonaux à "tous les éléments de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de F" ».
  Ou encore :
  Soit $x \in F$, montrons que $x \in (F^\perp)^\perp$, c'est-à-dire que $\forall y \in F^\perp, x \perp y$, ce qui est vrai car $x \in F$, donc pour tout $y \in F^\perp, x \perp y$ (par définition de $F^\perp$)
  L'autre inclusion est fausse en général (en fait, elle est vraie uniquement en dimension finie, comme on le verra dans le chapitre suivant)