



# Chapitre 13 : Fractions rationnelles

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  est un sous corps de  $\mathbb{C}$ .

## I Généralités

### A) Définition

On note  $\mathbb{K}(X)$  le corps des fractions de l'anneau intègre  $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ . Les éléments de  $\mathbb{K}(X)$  sont appelés fractions rationnelles formelles à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

### B) Premières conséquences

1.  $\mathbb{K}(X)$  est muni de deux lois  $+$  et  $\times$ , contient  $\mathbb{K}[X]$ , les lois  $+$  et  $\times$  sur  $\mathbb{K}(X)$  prolongent celles de  $\mathbb{K}[X]$ .

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est un corps commutatif, les neutres pour  $+$  et  $\times$  sont :

$$\begin{cases} 0_{\mathbb{K}(X)} = 0_{\mathbb{K}[X]} (= 0_{\mathbb{K}}), & \text{noté } 0 \\ 1_{\mathbb{K}(X)} = 1_{\mathbb{K}[X]} (= 1_{\mathbb{K}}), & \text{noté } 1 \end{cases} \quad (13.1)$$

2. Tout  $F$  de  $\mathbb{K}(X)$  s'écrit sous la forme  $P \times Q^{-1}$ , où  $P \in \mathbb{K}[X]$ , et  $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  ( $Q^{-1}$  désigne l'inverse dans le corps  $\mathbb{K}(X)$  de l'élément  $Q$  non nul de ce corps).

$P \times Q^{-1}$  est noté  $\frac{P}{Q}$  (c'est aussi  $Q^{-1} \times P$  car le corps est commutatif)

Il en résulte diverses « règles de calcul » :

Pour tous  $P, Q, R, A, D \in \mathbb{K}[X]$  :

- $\frac{P}{1} = P$  (car  $1^{-1} = 1$ )
- Si  $P, Q \neq 0$ , alors  $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-1} = \frac{Q}{P}$  (en effet :  $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-1} = (PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1} = \frac{Q}{P}$ )
- Si  $Q_1, Q_2 \neq 0$ , alors  $\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = P_1 Q_1^{-1} P_2 Q_2^{-1} = (P_1 P_2)(Q_2 Q_1)^{-1} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$
- Si  $Q, D \neq 0$ , alors  $\frac{DP}{DQ} = \frac{P}{Q}$  ( $(DP)(DQ)^{-1} = DPQ^{-1}D^{-1} = D^{-1}DPQ^{-1} = \frac{P}{Q}$ )
- Si  $Q_1, Q_2 \neq 0$ ,  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \iff P_1 Q_2 = P_2 Q_1$
- Si  $Q \neq 0$ ,  $\frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 + P_2}{Q}$
- Si  $Q_1, Q_2 \neq 0$ ,  $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2}{Q_1 Q_2} + \frac{P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}$

### C) Produit externe

Pour  $F \in \mathbb{K}(X)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $\lambda.F$  (ou  $\lambda F$ ) le produit  $\lambda \times F$

Il en résulte que  $(\mathbb{K}(X), +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

## II Diverses notions

### A) Représentant – représentant irréductible

**Définition :**

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ .

- Un représentant de  $F$  est, par définition, un couple  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  tel que  $F = \frac{P}{Q}$
- Un représentant irréductible de  $F$  est, par définition, un couple  $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  tel que  $F = \frac{A}{B}$  et  $\text{pgcd}(A, B) = 1$

**Proposition :**

1. Toute fraction rationnelle  $F$  admet un représentant irréductible.
2. Si  $(A, B)$  est un représentant irréductible de  $F$ , alors les autres représentants de  $F$  sont les  $(DA, DB)$ ,  $D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  (parmi lesquels les irréductibles sont les  $(\lambda A, \lambda B)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ )

**Démonstration :**

1. Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ ,  $(P, Q)$  un représentant de  $F$ . On pose  $G = \text{pgcd}(P, Q)$ . Alors  $P = GP_1$ ,  $Q = GQ_1$ , avec  $\text{pgcd}(P_1, Q_1) = 1$ . Ainsi,  $F = \frac{P}{Q} = \frac{GP_1}{GQ_1} = \frac{P_1}{Q_1}$ .
2. Supposons  $F = \frac{A}{B}$ , avec  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ , soit  $(P, Q)$  un autre représentant. Alors  $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$ , soit  $PB = QA$ . Donc  $B$  divise  $QA$ , donc  $Q$  car  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ . Donc  $Q = Q_1B$ . Donc  $\frac{P}{Q_1B} = \frac{A}{B}$ , soit  $\frac{P}{Q_1} = A$  (car  $B \neq 0$ ). Donc  $P = Q_1A$ . Donc  $(P, Q) = (Q_1A, Q_1B)$ . Inversement, les  $(DA, DB)$ ,  $D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  sont des représentants de  $F$ .

### B) Degré

**Définition :**

Soit  $F = \frac{P}{Q}$ . La valeur de  $\deg P - \deg Q$  est indépendante du choix du représentant  $(P, Q)$  de  $F$  (immédiat), on l'appelle le degré de  $F$ . Alors  $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

**Exemple :**

$F = \frac{2X+1}{3X+2}$  est de degré 0.

$F = \frac{2X+1}{5X^2+4}$  est de degré -1.

**Proposition :**

On a :

$$\deg(F_1F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2) \quad (13.2)$$

$$\deg(\lambda F) = \deg(F) \text{ si } \lambda \neq 0 \quad (13.3)$$

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2)) \quad (13.4)$$

(Démonstration immédiate en raisonnant sur les degrés des représentants)

**C) Zéros, pôles****Définition :**

Soit  $F = \frac{A}{B}$ , irréductible.

- Un zéro de  $F$  est, par définition, une racine de  $A$ . Son ordre de multiplicité est celui qu'il a en tant que racine de  $A$ .
- Un pôle de  $F$  est, par définition, une racine de  $B$ . Son ordre de multiplicité est celui qu'il a en tant que racine de  $B$ .

**Exemple :**

$F = \frac{X^3-1}{X^2-3X+2} = \frac{(X-1)(X-j^2)}{X-2}$ . Donc  $j$  et  $j^2$  sont des zéros d'ordre 1, et 2 est un pôle d'ordre 1.

**Remarque :**

Si  $F = \frac{P}{Q}$ , non nécessairement irréductible :

- Si  $\lambda$  est racine de  $P$  d'ordre  $\alpha$ , alors  $\lambda$  est racine de  $F$  d'ordre  $\leq \alpha$  (voire 0)
- Si  $\lambda$  est racine de  $Q$  d'ordre  $\alpha$ , alors  $\lambda$  est pôle de  $F$  d'ordre  $\leq \alpha$  (voire 0)

**D) Fonction rationnelle associée****Notation :**

Soit  $F = \frac{A}{B}$ , irréductible.

On note  $D_F = \mathbb{K} \setminus \{\text{pôles de } F\}$  : domaine de définition de la fonction rationnelle associée à  $F$  (Remarque : l'ensemble des pôles de  $F$  est fini car  $B \neq 0$ )

On note alors  $\tilde{F} : D_F \rightarrow \mathbb{K}$

$$x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$$
**Proposition :**

- Si  $F = \frac{P}{Q}$  non irréductible, et si  $x$  n'est pas une racine de  $Q$ , alors  $x \in D_F$ , et  $\tilde{F}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- Si  $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors :
  - ◊  $D_{F_1} \cap D_{F_2} \subset D_{F_1+F_2}$  et  $\forall x \in D_{F_1} \cap D_{F_2}, \widetilde{F_1+F_2}(x) = \tilde{F}_1(x) + \tilde{F}_2(x)$
  - ◊  $D_{F_1} \cap D_{F_2} \subset D_{F_1 F_2}$  et  $\forall x \in D_{F_1} \cap D_{F_2}, \widetilde{F_1 \times F_2}(x) = \tilde{F}_1(x) \times \tilde{F}_2(x)$
  - ◊  $D_{F_1} \subset D_{\lambda F_1}$  et  $\forall x \in D_{F_1}, \widetilde{\lambda F_1} = \lambda \tilde{F}_1$

**Proposition :**

Soient  $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$ . S'il existe un ensemble infini  $E$  inclus dans  $D_{F_1} \cap D_{F_2}$  tel que  $\forall x \in E, \tilde{F}_1(x) = \tilde{F}_2(x)$ , alors  $F_1 = F_2$ .

**Démonstration :**

$F_1 = \frac{A_1}{B_1}, F_2 = \frac{A_2}{B_2}$  irréductibles.

Donc  $\forall x \in E, A_1(x)B_2(x) = A_2(x)B_1(x)$ . Donc  $A_1B_2$  et  $A_2B_1$  coïncident sur une infinité de valeurs.

Donc  $A_1B_2 = A_2B_1$ . Donc  $F_1 = F_2$ .

**Conséquence (des propriétés) :**

De même que pour les fonctions polynomiales, on peut enlever les  $\sim$  sur les fonctions rationnelles.

### E) Dérivation formelle

**Définition :**

Soit  $F = \frac{P}{Q}$ . La valeur de  $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$  ne dépend que de  $F$  (immédiat). On l'appelle  $F'$ .

Toutes les règles de calcul valables pour les dérivées formelles de polynômes sont aussi valables ici.

### F) Substitution

**Exemple :**

$$F = \frac{X^3 - 2X + 4}{X^2 + X + 1}. \text{ Alors } F(-X) = \frac{-X^3 + 2X + 4}{X^2 - X + 1}, F(X^2) = \frac{X^6 - 2X^2 + 4}{X^4 + X^2 + 1}.$$

*Attention :* étant donnée  $F \in \mathbb{K}(X)$ , on ne parlera de  $F(Q)$  que lorsque  $Q$  est un polynôme ou une fraction rationnelle autre que constant et égal à un pôle de  $F$ .

### G) Remarques, définitions complémentaires

On a les équivalences :

$$\bullet \quad F \text{ est paire} \iff \tilde{F} \text{ est paire} \quad (13.5)$$

$$\iff F(-X) = F(X) \quad (13.6)$$

$$\bullet \quad F \text{ est impaire} \iff \tilde{F} \text{ est impaire} \quad (13.7)$$

$$\iff F(-X) = -F(X) \quad (13.8)$$

• Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ . On a l'équivalence :  $F$  n'a pas de pôle dans  $\mathbb{C}(X) \iff F \in \mathbb{C}[X]$ .

• Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Alors :

1. Il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \setminus \{a\}$  ne contienne aucun pôle de  $F$ . On peut donc considérer la fonction :

$$\varphi: ]-r, r[ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \quad (13.9)$$

$$t \longmapsto F(a+t)$$

2.  $a$  est pôle de  $F$  si et seulement si  $\varphi$  admet une limite infinie à droite et à gauche en 0 (et dans ce cas la multiplicité du pôle  $a$  de  $F$  est le plus petit entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $t \mapsto t^k F(a+t)$  ait une limite finie en 0)
3.  $a$  est zéro de  $F$  si et seulement si  $\varphi$  tend vers 0 en 0.
4.  $a$  n'est ni zéro ni pôle de  $F$  si et seulement si  $\varphi$  admet une limite finie non nulle en 0.

## III Partie entière

### A) Proposition et définition

**Proposition, définition :**

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Alors il existe un et un seul polynôme  $E \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $F = E + F_1$  avec  $F_1 \in \mathbb{K}(X)$  et  $\deg F_1 < 0$ .  $E$  s'appelle la partie entière de  $F$ .

**Démonstration :**

**unicité** Si  $F = E_1 + F_1$  et  $F = E_2 + F_2$  avec  $\deg F_1, F_2 < 0$

$$\text{Alors } \underbrace{E_1 - E_2}_{\deg \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} = \underbrace{F_1 - F_2}_{\deg \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2)) < 0}.$$

Donc  $E_1 - E_2 = F_1 - F_2 = 0$ . Donc  $E_1 = E_2$  et  $F_1 = F_2$ .

**existence**  $F = \frac{P}{Q}$ . Division euclidienne de  $P$  par  $Q : P = P_1Q + R_1$ , avec  $R_1 \in \mathbb{K}[X]$ , de  $\deg R_1 < \deg Q$ , et  $P_1 \in \mathbb{K}[X]$ .

$$\text{Donc } F = \frac{P_1Q + R_1}{Q} = P_1 + \frac{R_1}{Q} \text{ avec } \deg R_1 < \deg Q$$

**B) Exemples**

- Partie entière de  $\frac{X+2}{X-1} : 1$ . Partie entière de  $\frac{X^3+2X}{X^3+X^2-1} : 1$
- Plus généralement, partie entière de  $\frac{aX^n+\dots}{bX^n+\dots} : \frac{a}{b}$ .
- Partie entière de  $F = \frac{2X^2+X}{X-3} :$

$$2X^2 + X = 2X(X - 3) + 7X = 2X(X - 3) + 7(X - 3) + 21 = (2X + 7)(X - 3) + 21 \quad (13.10)$$

$$\text{Donc } F = \underbrace{2X + 7}_{\text{partie entière}} + \frac{21}{X-3}$$

- Partie entière de  $F = \frac{(X-1)^7}{(X+2)(X+1)^5} : \text{de la forme } X + b$

$$(X - 1)^7 = X^7 - 7X^6 + 21X^5 + \dots \quad (13.11)$$

$$(X + 2)(X + 1)^5 = (X + 2)(X^5 + 5X^4 + \dots) = X^6 + 7X^5 + \dots \quad (13.12)$$

$$\begin{array}{r} X^7 - 7X^6 + 21X^5 + \dots \\ 14X^6 + \dots \\ \hline X - 14 \end{array} \quad (13.13)$$

$$\text{Donc } F = X - 14 + R_1$$

**IV Décomposition en éléments simples**

**A) Première décomposition**

**Lemme :**

Soit  $F = \frac{P}{Q_1Q_2}$ , où  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$  et  $\text{pgcd}(Q_1, Q_2) = 1$ .

Alors il existe  $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $F = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$

**Démonstration :**

Selon le théorème de Bézout, il existe  $U_1, U_2 \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$

$$\text{Donc } PU_1Q_1 + PU_2Q_2 = P$$

$$\text{Donc } \frac{PU_1Q_1 + PU_2Q_2}{Q_1Q_2} = \frac{P}{Q_1Q_2}.$$

$$\text{Donc } \frac{P}{Q_1Q_2} = \frac{PU_1}{Q_2} + \frac{PU_2}{Q_1}$$

**Théorème :**

Soit  $F = \frac{A}{Q_1Q_2\dots Q_n}$  où  $A \in \mathbb{K}[X]$  et les  $Q_i$  sont des polynômes non nuls premiers entre eux deux à deux.

Alors  $F$  se décompose de manière unique sous la forme :

$$F = E + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n}, \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg A_i < \deg Q_i \quad (13.14)$$

**Démonstration :**

**existence** par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 2$  : le lemme donne  $F = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$ , avec  $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$

La division euclidienne de  $P_1$  par  $Q_1$  et de  $P_2$  par  $Q_2$  donne :

$$P_1 = E_1Q_1 + A_1 \text{ et } P_2 = E_2Q_2 + A_2 \tag{13.15}$$

Donc  $F = E_1 + E_2 + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2}$  avec  $\deg A_1 < \deg Q_1$  et  $\deg A_2 < \deg Q_2$ .

Supposons que c'est vrai pour un entier naturel  $n \geq 2$ .  $F = \frac{A}{Q_1Q_2 \dots Q_n Q_{n+1}}$ , où les  $Q_i$  sont premiers entre eux deux à deux. On applique le lemme ( $Q_{n+1}$  est premier avec chaque  $Q_i$ ,  $i \leq n$ , donc avec  $Q_1Q_2 \dots Q_n$ ) :

Donc  $F = \frac{P}{Q_1Q_2 \dots Q_n} + \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ . On applique ensuite l'hypothèse de récurrence, et on fait la division euclidienne de  $P_{n+1}$  par  $Q_{n+1}$ .

**unicité** supposons que  $F = E + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n}$

Déjà,  $E$  est la partie entière de  $F$  :

$$E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{Q_i} \right) \leq \max_{i \in [1, n]} \deg \left( \frac{A_i}{Q_i} \right) < 0 \tag{13.16}$$

Si on a une deuxième décomposition :

$$F = E + \frac{B_1}{Q_1} + \frac{B_2}{Q_2} + \dots + \frac{B_n}{Q_n} \text{ où } \forall i \in [1, n], B_i \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg B_i < \deg Q_i \tag{13.17}$$

Donc

$$\frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n} = \frac{B_1}{Q_1} + \frac{B_2}{Q_2} + \dots + \frac{B_n}{Q_n} \tag{13.18}$$

On obtient alors :

$$Q_1Q_2 \dots Q_n \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{Q_i} \right) = Q_1Q_2 \dots Q_n \left( \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{Q_i} \right) \tag{13.19}$$

$$\underbrace{Q_1Q_2 \dots Q_n \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{Q_i} \right)}_{\text{divisible par } Q_n} + Q_1Q_2 \dots Q_{n-1}C_n = 0 \text{ où } \forall i \in [1, n], C_i = A_i - B_i \tag{13.20}$$

Donc  $Q_n$  divise  $Q_1Q_2 \dots Q_{n-1}C_n$ . Donc  $Q_n$  divise  $C_n$ .

Donc  $C_n = 0$  car  $\deg C_n \leq \max(\deg A_n, \deg B_n) < \deg Q_n$

Et, de proche en proche,  $\forall i \in [1, n], C_i = 0$

Donc  $\forall i \in [1, n], A_i = B_i$

**B) Deuxième décomposition**

**Théorème :**

Soit  $F = \frac{A}{Q^n}$  où  $A \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X], n \in \mathbb{N}^*$

Alors  $F$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \dots + \frac{P_n}{Q^n}, \text{ où } E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \forall i \in [1, n], P_i \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg P_i < \deg Q \tag{13.21}$$

**Démonstration :**

**Existence** on a :

$$F = \frac{A}{Q^n} = \frac{D_1Q + P_n}{Q^n} \quad (\text{Division euclidienne de } A \text{ par } Q) \quad (13.22)$$

Donc  $F = \frac{D_1}{Q^{n-1}} + \frac{P_n}{Q^n}$  avec  $\deg P_n < \deg Q$ .

La division euclidienne de  $D_1$  par  $Q$  donne ensuite, de la même manière :

$$F = \frac{D_2}{Q^{n-2}} + \frac{P_{n-1}}{Q^{n-1}} + \frac{P_n}{Q^n} \quad (13.23)$$

Et ainsi de suite :

$$F = \frac{D_{n-1}}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \dots + \frac{P_n}{Q^n}. \quad (13.24)$$

Enfin, la division euclidienne de  $D_{n-1}$  par  $Q$  donne :

$$F = E + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \dots + \frac{P_n}{Q^n} \quad (13.25)$$

**Unicité** Si  $F = E + \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q^2} + \dots + \frac{P_n}{Q^n}$ , où  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\deg P_i < \deg Q$ , on a alors :

$$EQ^n + P_1Q^{n-1} + P_2Q^{n-2} + \dots + P_n = A \quad (13.26)$$

Donc  $P_n$  est le reste dans la division euclidienne de  $A$  par  $Q$ , d'où l'unicité de  $P_n$ . On note ensuite  $A_1$  le quotient de cette division euclidienne...

### C) Décomposition en éléments simples

**Définition :**

Un élément simple de  $\mathbb{K}(X)$  est une fraction rationnelle du type  $\frac{P}{Q^n}$ , où  $Q \in \mathbb{K}[X]$  est irréductible,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ , de degré  $< \deg Q$ .

**Exemple :**

- $\frac{\lambda}{(X-a)^n}$  où  $a \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  est un élément simple de  $\mathbb{K}(X)$ .
- Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , elles sont les seuls éléments simples de  $\mathbb{C}(X)$
- Les éléments simples de  $\mathbb{R}(X)$  sont les :

**1<sup>ère</sup> espèce**  $\frac{\lambda}{(X-a)^n}$ , où  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**2<sup>ème</sup> espèce**  $\frac{\lambda X + \mu}{(X^2 - sX + p)^n}$ , où  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $s, p \in \mathbb{R}$ ,  $s^2 - 4p < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

**Théorème :**

Soit  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ , où  $A \in \mathbb{K}[X]$  et  $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$  (ainsi,  $F \notin \mathbb{K}[X]$ )

$B$  s'écrit sous la forme  $Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\alpha_2} \dots Q_n^{\alpha_n}$  où les  $Q_i$  sont irréductibles, non associés deux à deux et les  $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $F$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = \underbrace{E}_{\in \mathbb{K}[X]} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}}_{\text{élément simple}}, \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket, \deg A_{ij} < \deg Q_i \quad (13.27)$$

partie polaire de  $F$  relative au facteur irréductible  $Q_i$

**Démonstration :**

**Existence** Selon l'étape 1, on a :

$$F = E + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}, \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg A_i < \deg Q_i^{\alpha_i} \quad (13.28)$$

Et, selon l'étape 2, on a, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}} = \underbrace{E_i}_{=0 \text{ car } \deg A_i < \deg Q_i^{\alpha_i}} + \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}, \text{ où } \forall j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket, \deg A_{ij} < \deg Q_i \quad (13.29)$$

**Unicité** On décompose  $F$  sous la forme  $F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$ .

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$  s'écrit sous la forme  $\frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}$ , où  $A_i \in \mathbb{K}[X]$ . Ces  $A_i$  sont déterminés de manière unique d'après la première décomposition. Ensuite, chacun de ces  $A_i, \frac{A_i}{Q_i^{\alpha_i}}$  se décompose de manière unique sous la forme  $\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{Q_i^j}$ . D'où l'unicité.

**Remarque :**

Ceci est valable même si  $(A, B)$  n'est pas un représentant irréductible de  $F$ , mais si  $(A, B)$  est irréductible, les  $A_{i, \alpha_i}$  sont tous non nuls (en effet, si  $A_{i, \alpha_i} = 0$ , alors, en remettant au même dénominateur la décomposition, on obtient  $F = \frac{A_1}{B_1}$ , où  $B_1 = Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\alpha_2} \dots Q_i^{\alpha_i - 1} \dots Q_n^{\alpha_n}$  donc  $(A, B)$  n'était pas irréductible)

**Exemple :**

On considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^{10} + 1}{(X^3 - 1)^2(X + 2)} \leftarrow \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad (13.30)$$

On a

$$B = (X^3 - 1)^2(X + 2) = (X - 1)^2(X - j)^2(X - j^2)^2(X + 2) \quad (13.31)$$

$A(-2), A(1), A(j), A(j^2)$  sont non nuls. Donc  $\text{pgcd}(A, B) = 1$

$$F = X^3 + bX^2 + cX + d + \underbrace{\frac{\lambda}{X + 2}}_{\text{partie polaire relative au pôle } -2} + \underbrace{\frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{(X - 1)^2}}_{\text{partie polaire relative au pôle } 1} + \underbrace{\frac{\alpha'}{X - j} + \frac{\beta'}{(X - j)^2}}_{\text{partie polaire relative au pôle } j} + \frac{\alpha''}{X - j^2} + \frac{\beta''}{(X - j^2)^2} \quad (13.32)$$

*Attention :* on ne peut utiliser le terme de partie polaire relative à un nombre (comme dans l'exemple donné) que lorsqu'on travaille dans  $\mathbb{C}(X)$ .

## V Pratique de la décomposition

**Exemple :**

On considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{X}{(X^4 - 1)(X^2 - 1)} \leftarrow \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad (13.33)$$

à décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  :



1. Factorisation du dénominateur :

$$B = (X^4 - 1)(X^2 - 1) = (X - i)(X + i)(X - 1)^2(X + 1)^2 \quad (13.34)$$

On a donc les racines  $i, -i, 1, -1$ .

Donc  $(A, B)$  est irréductible. Les pôles de  $F$  sont donc  $i, -i, 1, -1$  avec les multiplicités 1, 1, 2, 2.

2. Partie entière : obtenue en faisant la division euclidienne de  $A$  par  $B$ . Ici 0.

3. Forme de la décomposition :

$$F = 0 + \frac{\alpha}{X - i} + \frac{\alpha'}{X + i} + \frac{\beta}{X - 1} + \frac{\gamma}{(X - 1)^2} + \frac{\beta'}{X + 1} + \frac{\gamma'}{(X + 1)^2}, \text{ où } \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{C} \quad (13.35)$$

(Remarque :  $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma' \neq 0$ )

4. Considération de symétries Ici,  $F = \frac{X}{(X^4 - 1)(X^2 - 1)}$ . Donc  $F(-X) = -F(X)$  (impaire).

On a :

$$\underbrace{F(-X)}_{-F(X)} = \frac{-\alpha}{X + i} + \frac{-\alpha'}{X - i} + \frac{-\beta}{X + 1} + \frac{\gamma}{(X + 1)^2} + \frac{-\beta'}{X - 1} + \frac{\gamma'}{(X - 1)^2} \quad (13.36)$$

D'où, par unicité de la décomposition, on obtient :

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = -\gamma \quad (13.37)$$

Et

$$F = \frac{\alpha}{X - i} + \frac{\alpha}{X + i} + \frac{\beta}{X - 1} + \frac{\gamma}{(X - 1)^2} + \frac{\beta}{X + 1} - \frac{\gamma}{(X + 1)^2} \quad (13.38)$$

5. Détermination des parties polaires

- D'abord celles relatives à des pôles simples (c'est plus simple  $\bigwedge$ )

En effet : Pour  $F = \frac{A}{B}$ , si  $a$  est un pôle simple de  $F$ , c'est-à-dire si  $\begin{cases} (X - a)Q = B \text{ avec } Q(a) \neq 0 \\ A(a) \neq 0 \end{cases}$ ,

alors  $F = \frac{\lambda}{(X - a)} + G$  où  $G$  est une fraction rationnelle dont  $a$  n'est pas pôle.

Donc  $\underbrace{(X - a)F}_{= \frac{A}{Q}, \text{ fraction rationnelle dont } a \text{ n'est pas pôle}} = \lambda + \underbrace{(X - a)G}_{\text{fraction rationnelle dont } a \text{ est un zéro}}$ . Donc  $\frac{A(a)}{Q(a)} = \lambda$

Ici,

$$\underbrace{F \times (X - i)}_{\frac{X}{(X+i)(X^2-1)^2}} = \alpha + (X - i) \times G, \text{ où } G = \frac{\alpha}{X + i} + \frac{\beta}{X - 1} + \frac{\gamma}{(X - 1)^2} + \frac{\beta}{X + 1} - \frac{\gamma}{(X + 1)^2}. \quad (13.39)$$

Donc  $\alpha = \frac{i}{(i+i)(i^2-1)^2} = \frac{1}{8}$

**Remarque :**

dans certains cas, calculer  $Q(a)$  n'est pas aisé.

On a :  $B = (X - a)Q$ . Donc  $B' = (X - a)Q' + Q$ . Donc  $B'(a) = Q(a)$

Ainsi,  $\lambda = \frac{A(a)}{Q(a)} = \frac{A(a)}{B'(a)}$

- Les pôles multiples : d'abord les pôles doubles

Pour  $F = \frac{A}{B}$ , si  $a$  est pôle double de  $F$  :  $\begin{cases} (X - a)^2 Q = B \text{ avec } Q(a) \neq 0 \\ A(a) \neq 0 \end{cases}$ . Alors

$$F = \frac{\lambda_1}{(X - a)} + \frac{\lambda_2}{(X - a)^2} + G \quad (13.40)$$

où  $a$  n'est pas pôle de  $G$ .

Calcul de  $\lambda_2$  : en multipliant l'égalité par  $(X - a)^2$ , on obtient :

$$\underbrace{F \times (X - a)^2}_{=\frac{A}{Q}} = \lambda_1(X - a) + \lambda_2 + (X - a)^2G \quad (13.41)$$

En remplaçant  $X$  par  $a$ , on a alors  $\lambda_2 = \frac{A(a)}{Q(a)}$ .

Pour calculer  $\lambda_1$ , on a deux méthodes :

**1<sup>ère</sup> méthode** on dérive la deuxième égalité :  $\left(\frac{A}{Q}\right)' = \lambda_1 + 2(X - a)G + (X - a)^2G'$ .

$$\text{Ainsi, } \lambda_1 = \left(\frac{A}{Q}\right)'(a)$$

**2<sup>ème</sup> méthode** on connaît déjà  $\lambda_2$ . D'après la première égalité,  $F - \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + G$ .

D'après le membre de droite, celui de gauche n'a  $a$  pour pôle que d'ordre au maximum 1.

$$\text{Le calcul donne } F_1 = F - \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} = \frac{A_1}{(X-a)Q_1}.$$

On est ensuite ramené au problème du pôle simple.

Application sur l'exemple :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{(X-1)^2} + G \\ &= \frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)(X+1)^2} \end{aligned} \quad (13.42)$$

Donc  $\frac{X}{(X^2+1)(X+1)^2} = \beta(X-1) + \gamma + (X-1)^2G$ . Donc  $\gamma = \frac{1}{2 \times 2^2} = \frac{1}{8}$

**Méthode 1**

$$\frac{(X+1)^2(X^2+1) - X(2(X+1)(X^2+1) + (X+1)^2 2X)}{(X+1)^4(X^2+1)^2} = \beta + G'(X-1)^2 + 2G(X-1) \quad (13.43)$$

$$\frac{(X+1)(X^2+1) - 2X(X^2+1) - (X+1) \times 2X^2}{(X+1)^3(X^2+1)^2} = \beta + G'(X-1)^2 + 2G(X-1) \quad (13.44)$$

$$\text{Donc } \beta = \frac{-1}{8}$$

**Méthode 2 :**

$$\begin{aligned} F - \frac{\gamma}{(X-1)^2} &= \frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)(X+1)^2} - \frac{1}{8(X-1)^2} \\ &= \frac{8X - (X+1)^2(X^2+1)}{8(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)} \end{aligned} \quad (13.45)$$

on vérifie que le numérateur est nul en 1 puisque 1 est au mieux pôle simple

$$\begin{aligned} 8X - (X+1)^2(X^2+1) &= 8(X-1+1) - (X-1+2)(X+1)(X^2+1) \\ &= (X-1)[8 - (X+1)(X^2+1)] + 8 - 2(X+1)(X^2+1) \end{aligned} \quad (13.46)$$

$$\begin{aligned} 8 - 2(X+1)(X^2+1) &= 8 - 2(X-1+2)(X^2+1) \\ &= (X-1)[-2(X^2+1)] + 8 - 4(X^2+1) \\ &= (X-1)[-2(X^2+1)] - 4(X^2-1) \end{aligned} \quad (13.47)$$

Donc

$$F - \frac{\gamma}{(X-1)^2} = \frac{8 - (X+1)(X^2+1) - 2(X^2+1) - 4(X+1)}{8(X-1)(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{\beta}{(X-1)} + G \quad (13.48)$$

$$\text{Ainsi, } \beta = \frac{8-2 \times 2 - 2 \times 2 - 4 \times 2}{8 \times 2^2 \times 2} = \frac{-1}{8}$$

6. Conclusion :

$$F = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} \right) \quad (13.49)$$

Intérêt de la décomposition en éléments simples : pour l'intégration.

**Exemple (Autres) :**

- $$F = \frac{1}{X^2 - a^2} \text{ où } a \in \mathbb{C}^* \quad (13.50)$$

Partie entière nulle (deg  $F = -2$ )

Forme de la décomposition :

$$F = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{X+a} \quad (13.51)$$

On multiplie par  $X - a$ , on prend la valeur en  $a$  :  $\alpha = \frac{1}{2a}$

De même,  $\beta = \frac{-1}{2a}$

Donc

$$\frac{1}{X^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{X-a} - \frac{1}{X+a} \right) \quad (13.52)$$

- $$F = \frac{1}{X^n - 1} \quad (13.53)$$

Forme de la décomposition :

$$F = \frac{\alpha_0}{X - \omega_0} + \frac{\alpha_1}{X - \omega_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{X - \omega_{n-1}}, \text{ où } \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (13.54)$$

Pour chaque  $k$  : on multiplie par  $X - \omega_k$ . On obtient  $\frac{1}{Q} = \alpha_k + (X - \omega_k)G$ , où  $Q$  est tel que  $X^n - 1 = (X - \omega_k)Q$ .

Donc  $\alpha_k = \frac{1}{Q(\omega_k)}$

On a :  $X^n - 1 = (X - \omega_k)Q$ . Donc, en dérivant :

$$nX^{n-1} = Q + (X - \omega_k)Q' \quad (13.55)$$

Donc  $\alpha_k = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$  Donc

$$F = \frac{1}{n} \left( \frac{\omega_0}{X - \omega_0} + \frac{\omega_1}{X - \omega_1} + \dots + \frac{\omega_{n-1}}{X - \omega_{n-1}} \right) \quad (13.56)$$

Autre méthode :

On multiplie par  $X - 1$ . D'où  $\alpha_0 = \frac{1}{Q(1)}$  où  $Q = 1 + X + \dots + X^{n-1}$

Donc  $\alpha_0 = \frac{1}{n}$

On remarque que :

$$F(\omega_1 X) = \frac{1}{(\omega_1 X)^n - 1} = \frac{1}{X^n - 1} = F(X) \quad (13.57)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\alpha_0}{\omega_1 X - \omega_0} + \frac{\alpha_1}{\omega_1 X - \omega_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1 X - \omega_{n-1}} \\ &= \frac{\alpha_0}{\omega_1} \frac{1}{X - \underbrace{\omega_0/\omega_1}_{\omega_{n-1}}} + \frac{\alpha_1}{\omega_1} \frac{1}{X - 1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1} \frac{1}{X - \omega_{n-2}} \end{aligned} \quad (13.58)$$

Donc  $\alpha_{n-1} = \frac{\alpha_0}{\omega_1}$ ,  $\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} \dots \alpha_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_1}$ . Comme  $\alpha_0$  est connu, on peut trouver les autres.

- $$F = \frac{1}{(X^n - 1)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\alpha_k}{X - \omega_k} + \frac{\beta_k}{(X - \omega_k)^2} \right) \quad (13.59)$$

Symétries :

$$F(\omega_1 X) = F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\alpha_k}{\omega_1 X - \omega_k} + \frac{\beta_k}{(\omega_1 X - \omega_k)^2} \right) \quad (13.60)$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a :

$$\frac{\beta_k}{(\omega_1 X - \omega_k)^2} = \frac{\beta_k}{\omega_1^2 (X - \omega_{k-1})^2}, \quad \frac{\alpha_k}{\omega_1 X - \omega_k} = \frac{\alpha_k}{\omega_1 X - \omega_{k-1}} \quad (\text{avec } \omega_{-1} = \omega_{n-1}) \quad (13.61)$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{\alpha_k}{\omega_1} = \alpha_{k-1} \text{ et } \frac{\beta_k}{\omega_1^2} = \beta_{k-1} \quad (13.62)$$

D'où,

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} \alpha_k &= \omega_1^k \alpha_0 = \omega_k \alpha_0 \\ \beta_k &= \omega_1^{2k} \beta_0 = \omega_{2k} \beta_0 \end{cases} \quad (13.63)$$

Obtention de  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  :

$$F = \frac{1}{(X^n - 1)^2} = \frac{\alpha_0}{X-1} + \frac{\beta_0}{(X-1)^2} + G \quad (13.64)$$

Donc, en multipliant par  $(X-1)^2$  et en prenant la valeur en 1, on trouve  $\beta_0 = \frac{1}{n^2}$ .

$$F = \frac{1}{\underbrace{(1 + X + \dots + X^{n-1})^2}_Q} = \alpha_0(X-1) + \beta_0 + G(X-1)^2 \quad (13.65)$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{-2Q'}{Q^3} = \alpha_0 + (X-1)^2 G' + 2(X-1)G \quad (13.66)$$

Valeur en 1 :  $\alpha_0 = \frac{-2Q'(1)}{n^3}$  ;  $Q'(1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

Donc  $\alpha_0 = \frac{-(n-1)}{n^2}$

- $$F = \frac{1}{(X^2 - X + 1)^2(X-1)} \text{ dans } \mathbb{C}(X) \quad (13.67)$$

Pôles :  $-j, -j^2, 1$

$$F = \frac{\alpha}{X+j} + \frac{\beta}{(X+j)^2} + \frac{\alpha'}{X+j^2} + \frac{\beta'}{(X+j^2)^2} + \frac{\gamma}{X-1} \quad (13.68)$$

Symétries :

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $F(x) \in \mathbb{R}$  (car  $F \in \mathbb{R}(X)$ )

Donc  $\overline{F(x)} = F(x)$

Or,

$$F(x) = \frac{\alpha}{x+j} + \frac{\beta}{(x+j)^2} + \frac{\alpha'}{x+j^2} + \frac{\beta'}{(x+j^2)^2} + \frac{\gamma}{x-1} \quad (13.69)$$

et

$$\overline{F(x)} = \frac{\bar{\alpha}}{x+j^2} + \frac{\bar{\beta}}{(x+j^2)^2} + \frac{\bar{\alpha}'}{x+j} + \frac{\bar{\beta}'}{(x+j)^2} + \frac{\bar{\gamma}}{x-1} \quad (\text{rappel : } j^2 = \bar{j}) \quad (13.70)$$

Donc

$$F = \frac{\bar{\alpha}}{X+j^2} + \frac{\bar{\beta}}{(X+j^2)^2} + \frac{\bar{\alpha}'}{X+j} + \frac{\bar{\beta}'}{(X+j)^2} + \frac{\bar{\gamma}}{X-1} \quad (13.71)$$

(car les deux fractions rationnelles coïncident sur une infinité de valeurs, à savoir  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ )

Donc, par unicité de la décomposition en éléments simples :

$$\alpha' = \bar{\alpha}, \quad \beta' = \bar{\beta}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (13.72)$$

En multipliant par  $X-1$  et en prenant la valeur en 1, on obtient  $\gamma = \frac{1}{1^2} = 1$

En multipliant par  $(X+j)^2$  on obtient la valeur de  $\beta$ , puis  $\alpha$  en dérivant...

**Remarque (à propos de la décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$ ) :**

**1<sup>ère</sup> idée** mauvaise quand les pôles non réels sont d'ordre plus grand (ou égal) à 2 :

Pour  $F = \frac{A}{B}$  irréductible :

Si  $B$  a toutes ses racines dans  $\mathbb{R}$ , on procède comme dans  $\mathbb{C}(X)$

Si  $B$  a une racine  $a$  non réelle, alors  $\bar{a}$  est aussi racine de  $B$  avec la même multiplicité :

- Si cette multiplicité vaut 1 :

$$B = \underbrace{(X - a)(X - \bar{a})}_{X^2 - sX + p} Q, \text{ où } Q(a) \neq 0$$

La décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  donne :

$$F = \frac{\lambda}{X - a} + \frac{\bar{\lambda}}{X - \bar{a}} \leftarrow \text{voir exemple précédent} + G = \frac{(\lambda + \bar{\lambda})X - (a\bar{\lambda} + \bar{a}\lambda)}{X^2 - sX + p} + G \quad (13.73)$$

- Si cette multiplicité est  $\geq 2$  (ici, 2) La décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$  donne :

$$F = \underbrace{\frac{\lambda}{X - a} + \frac{\bar{\lambda}}{X - \bar{a}}}_{\frac{(\lambda + \bar{\lambda})X - (a\bar{\lambda} + \bar{a}\lambda)}{X^2 - sX + p}} + \underbrace{\frac{\mu}{(X - a)^2} + \frac{\bar{\mu}}{(X - \bar{a})^2}}_{\frac{\mu(X - \bar{a})^2 + \bar{\mu}(X - a)^2}{(X^2 - sX + p)^2} \leftarrow \text{non simple}} + G \quad (13.74)$$

(Remarque : on peut quand même s'en sortir avec la décomposition de la forme  $\frac{A}{Q^n} = E + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2} + \dots + \frac{A_n}{Q_n}$ )

**Autre idée** (pour un pôle  $a$  non réel d'ordre 2)

Écrire la forme de la décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$F = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 - sX + p} + \frac{\lambda' X + \mu'}{(X^2 - sX + p)^2} + G \quad (13.75)$$

En multipliant par  $(X^2 - sX + p)^2$  et en prenant la valeur en  $a$ , on obtient la valeur de  $\lambda'a + \mu'$  d'où  $\lambda'$  et  $\mu'$  car  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et  $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$  ( $(1, a)$  est une famille libre du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{C}$ )

Ensuite, par dérivation, on peut obtenir  $\lambda$  et  $\mu$ .